01

Классификация анизотропных напряженных состояний в сферических телах

© А.С. Баранов

Главная (Пулковская) астрономическая обсерватория РАН,
196140 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: vicabal@gao.spb.su

(Поступило в Редакцию 19 апреля 1999 г.)

Построены в явном виде примеры тензорных полей (выражающих, например, давление) с заданными свойствами симметрии по отношению к вращениям. Элементы тензора представлены полиномами от декартовых координат и удовлетворяют бигармоническому уравнению. Намечено применение результатов в различных областях технической физики.

Постановка задачи

Как известно, гармонические и бигармонические функции очень часто встречаются в технической физике. Примеры приложений можно найти в теории упругости, пластичности, фигур равновесия вращающейся жидкости и т. д. Аппарат разложения соответствующих функций по подходящему базису зависит от формы рассматриваемых тел. В частности, широко употребляются сферические функции [1]. Несколько менее известны сфероидальные функции [2]. Для сфероидальных тел обычно ограничивались рассмотрением гармонических функций. В [3] нами был разработан аппарат бигармонических функций для сфероидальных тел, что должно помочь решать обширный круг задач в тех случаях, когда граничная поверхность тела близка к сфероидальной. Однако ситуация со сферическими телами тоже допускает более широкий подход в сравнении с материалом, приводимым в обычных руководствах.

Действительно, в технической физике мы имеем дело не только со скалярными характеристиками. В особенности следует отметить тензорный характер давления и родственных ему величин. Такой анизотропный аналог давления применяется при анализе газовых конфигураций с магнитным полем, сыпучих тел, недр Земли и других планет и т. д. В теории плазмы и звездной динамике аналог давления тоже всегда в большей или меньшей степени проявляет свойства анизотропии [4]. Такое же положение возникает в технических приложениях при изучении равновесия различных округлых упругих тел с той только разницей, что вместо самогравитации фигурируют внешние силы, приложенные к поверхности [5]. Поэтому представляет интерес классификация возможных пространственных распределений анизотропного давления внутри тела с точки зрения симметрии при поворотах.

В соответствии с вышесказанным будем считать элементы тензора давления либо гармоническими, либо бигармоническими функциями, поскольку такое ограничение очень часто вытекает из дополнительных физических условий [1,3]. Тогда произвольное распределение давления, удовлетворяющее условию гармоничности или бигармоничности, а также условию равновесия внутри объема, можно представить суперпозицией более простых распределений, удовлетворяющих определенным требованиям симметрии.

В отличие от более общего случая [3], где классификация тензорных полей может выглядеть несколько формальной, для частного случая сферических тел она естественным образом связана с симметрией фигуры в целом по отношению к вращениям. Именно поэтому мы рассматриваем сферический случай отдельно. Его специфика состоит в подборе решения бигармонического уравнения $\Delta\Delta U = 0$ в соответствии с представлениями группы вращений [6]. Такие представления бывают однозначными или двузначными, но нас, естественно, интересуют только однозначные. Каждое представление характеризуется индексом n, который для однозначных представлений пробегает значения $0, 1, 2, \ldots$ и объединяет в одну систему $2n + 1$ состояний объекта. При этом при любых вращениях эти состояния линейно преобразуются друг через друга. Обойтись меньшим числом состояний невозможно, иначе при некоторых поворотах будут появляться новые состояния. Тривиальным примером может служить преобразование одиночного вектора при вращениях: в таком преобразовании участвуют все три компоненты вектора. Примером несколько другого рода является преобразование скалярных полей на сфере. Тогда стандартным базисом представления при фиксированных n является набор из $2n + 1$ сферических гармоник с одним и тем же индексом [7].

Вообще говоря, спинорные, векторные и тензорные поля на сфере изучались с аналогичной точки зрения И.М. Гельфандом с сотрудниками, но соответствующие формулы носят довольно абстрактный характер. Их трудно применять к конкретным техническим задачам, тем более если ставится дополнительное условие гармоничности или бигармоничности. Поэтому подойдем к задаче с несколько иной стороны.

Условия равновесия

Среди базисных состояний (или "векторов"), соответствующих данному n, будем рассматривать одно, которое проще всего должно выражаться в декартовых координатах. Опыт работы со скалярными полями показывает, что следует выбрать крайний "вектор", который при повороте вокруг полярной оси на угол Θ приобретает множитель $\exp(in\Theta)$. В случае скалярных полей речь идет о так называемой секториальной гармонике.

Пусть m — степень полинома, которыми выражаются компоненты тензора давления. Тензор давления выражается, как известно, симметричной матрицей

$$\begin{pmatrix} P_{xx} & P_{xy} & P_{xz} \\ P_{yx} & P_{yy} & P_{yz} \\ P_{zx} & P_{zy} & P_{zz} \end{pmatrix} \quad (P_{xy} = P_{yx},\ \ P_{xz} = P_{zx},\ \ P_{yz} = P_{zy}),$$

где x, y, z — декартовы координаты; z — полярная ось.

Поскольку элемент P_{zz} сам по себе не меняется при повороте вокруг полярной оси, то зависимость от азимута должна сводиться ко множителю $\exp(in\Theta)$ или в декартовых координатах — ко множителю φ_n (при этом мы ввели обозначение $\varphi_n = (x + iy)^n$), где другим сомножителем является некоторый многочлен относительно z и $R^2 = x^2 + y^2$. Следовательно, если начинать с элемента P_{zz}, его нужно искать в виде $P_{zz} = c_0\varphi_n$ $(m = n)$, $P_{zz} = c_1 z\varphi_n$ $(m = n + 1)$, $P_{zz} = (c_1R^2 + c_2z^2)\varphi_n$ $(m = n+2)$, а при $m < n$ построить аналогичный многочлен невозможно и остается принять $P_{zz} = 0$. Ниже мы убедимся, что случай $|m - n| > 2$ невозможен.

Совершенно аналогичным образом, только с другими коэффициентами, преобразуется величина $\Phi = P_{xx} + P_{yy}$, поскольку она тоже является скаляром, при повороте вокруг полярной оси. Продолжим это рассуждение. Элементы P_{xz} и P_{yz} сами по себе при поворотах вокруг полярной оси преобразуются по тому же закону, что и компоненты двумерного вектора, т. е. $P_{xz} \to P_{xz}\cos\Theta - P_{yz}\sin\Theta$, $P_{yz} \to P_{xz}\sin\Theta + P_{yz}\cos\Theta$. Для их комплексной комбинации имеем $P_{xz} + iP_{yx} \to F\exp(i\Theta)$, $P_{yz} - iP_{xz} \to F_1\exp(i\Theta)$, где $F = P_{yz} + iP_{xz}$, $F_1 = P_{yz} - iP_{xz}$.

Так преобразуются элементы P_{xz}, P_{yz}, взятые сами по себе, но с учетом того, что, как было сказано выше, при повороте поля в целом меняется точка пространства, к которой они относятся, для их нахождения в неподвижной системе координат надо включать в вышенаписанные формулы множитель $\exp(in\Theta)$. Таким образом, в отличие от P_{zz} общее выражение $P_{xz} \pm iP_{yz}$ должно включать в себя множитель φ_n. Второй же сомножитель опять должен быть либо многочленом по z и R^2 суммарной степени $m - (n \pm 1)$, либо нулем, если последнее выражение отрицательно. Наконец, компоненты P_{xx}, P_{xy}, P_{yy} преобразуются при повороте вокруг полярной оси как компоненты двумерного тензора, т. е. так же, как попарные произведения двух различных векторов. Достаточно простыми свойствами при поворотах обладают комбинации $H = P_{xx} - P_{yy} - 2iP_{yx}$ и $H_1 = P_{xx} - P_{yy} + 2iP_{yx}$. Точно такие же рассуждения показывают, что выражения H и H_1 должны содержать соответственно множитель $\varphi_{n\pm 2}$ (если $m - (n \pm 2) \geqslant 0$).

Предыдущие рассуждения относились к вращению вокруг полярной оси, но их недостаточно для обоснования полной требуемой симметрии поля. Характерным признаком рассматриваемого крайнего состояния является то, что оно должно аннулироваться оператором $\mathbf{I}_x + i\mathbf{I}_y$, где $\mathbf{I}_x$ и $\mathbf{I}_y$ — операторы бесконечно малых вращений вокруг соответственно оси x и y (вращение принимается происходящим в одну и ту же сторону, если смотреть с положительных концов обеих горизонтальных осей).

Таблица воздействия оператора $\mathbf{I}_x + i\mathbf{I}_y$ на элементы тензора, взятые сами по себе, легко составляется точно так же, как при поворотах вокруг оси z с изменением ролей координат. В результате получаем 6 уравнений, связывающих элементы тензора давления [6]. После некоторого их перекомбинирования (детали опускаем) имеем следующую систему уравнений:

$$-z\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)P_{zz} + (x + iy)\frac{\partial P_{zz}}{\partial z} - 2(P_{xz} + iP_{yz}) = 0,$$

$$(x+iy)\left(\frac{\partial P_{xz}}{\partial z} + i\frac{\partial P_{yz}}{\partial z}\right) - z\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)(P_{xz} + iP_{yz}) - H_1 = 0,$$

$$(x + iy)\frac{\partial \Phi}{\partial z} - z\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} + i\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) + 2(P_{xz} + iP_{yz}) = 0,$$

$$(x + iy)\frac{\partial H_1}{\partial z} - z\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)H_1 = 0,$$

$$-(x + iy)\frac{\partial H}{\partial z} + z\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)H - 4(P_{xz} - iP_{yz}) = 0,$$

$$(x + iy)\left(\frac{\partial P_{xz}}{\partial z} - i\frac{\partial P_{yz}}{\partial z}\right)$$

$$- z\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)(P_{xz} - iP_{yz}) + 2P_{zz} - \Phi = 0. \qquad (1)$$

Уравнения (1) являются основными в нашей задаче. Напомним, что мы интересуемся только такими тензорными полями, которые удовлетворяют условиям механического равновесия

$$\frac{\partial P_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial P_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial P_{xz}}{\partial z} = \frac{\partial P_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial P_{yz}}{\partial z}$$

$$= \frac{\partial P_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial P_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial P_{zz}}{\partial z} = 0,$$

где при наличии самогравитации $P_{xx} = p_{xx} + \rho V$; $P_{xy} = p_{xy}, \ldots$; ρ — плотность вещества, предполагаемая постоянной; $p_{xx}, p_{xy}, \ldots$ — компоненты собственно давления; $V(x, y, z)$ — гравитационный потенциал; естественно, что в отсутствии внешних объемных сил компоненты P и p совпадают.

После некоторых преобразований условия равновесия могут быть написаны в виде [3]

$$2\frac{\partial}{\partial z}(P_{xz}+iP_{yz})+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}+i\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)-\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right)H_1=0,$$

$$2\frac{\partial}{\partial z}(P_{xz}-iP_{yz})+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}-i\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)H=0,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)(P_{xz}-iP_{yz})+\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right)(P_{xz}+iP_{yz})+2\frac{\partial P_{zz}}{\partial z}=0. \qquad (2)$$

Далее рассматриваем по отдельности различные возможные показатели n при заданной степени полиномов m.

Определение основных функций

Проще всего один из крайних случаев $n=m+2$. Тогда, как объяснялось выше, в элементах тензора не встречаются множители $\exp(in\Theta)$, $\exp[i(n\pm 1)\Theta]$, $\exp[i(n+2)\Theta]$. Единственной из перечислявшихся комбинаций, отличной от нуля, является величина $H=c\varphi_n$, так что при надлежащем выборе постоянного коэффициента $c=4$ имеем

$$P_{xx}=\varphi_n,\quad P_{yy}=-\varphi_n,\quad P_{xy}=i\varphi_n,\quad P_{xz}=P_{yz}=P_{zz}=0.$$

Заметим, что найденное решение автоматически удовлетворяет как условиям равновесия, так и условию гармоничности элементов. Далее берем $n=m+1$. Множители с $\exp(in\Theta)$, $\exp[i(n+1]\Theta$, $\exp[i(n+2)\Theta]$ в данном случае невозможны, так что $P_{zz}=\Phi=P_{xz}+iP_{yz}=H_1=0$. Но $H=cz\varphi_{n-1}$, а из предпоследнего уравнения (1) получаем $P_{xz}-iP_{yz}=-(c/4)\varphi_n$. Например, при $c=8$ имеем

$$P_{xz}=-\varphi_n,\quad P_{yz}=-i\varphi_n,\quad P_{xx}=2z\varphi_{n-1},$$

$$P_{yy}=-2z\varphi_{n-1},\qquad P_{xy}=2iz\varphi_{n-1}.$$

Опять условия равновесия и гармоничности автоматически удовлетворяются. Перейдем к случаю $m=n$. Исключается наличие множителей $\exp[i(n+1)\Theta]$, $\exp[i(n+2)\Theta]$, т. е. $P_{xz}+iP_{yz}=H_1=0$. Можем исходить из элемента $H=(c_1R^2+c_2z^2)\varphi_{n-2}$. Тогда предпоследнее уравнение (1) дает $P_{xz}-iP_{yz}=(c_1-c_2)z\varphi_{n-1}/2$, а последнее дает $\Phi-2P_{zz}=(c_1-c_2)\varphi_n/2$. Второе уравнение (2) приводит к соотношению $\Phi=(c_2-3c_1)\varphi_n/(2n)$, так что $P_{zz}=(1/4)\big[(c_2-3c_1)/n-(c_1-c_2)\big]\varphi_n$.

На этот раз потребовалось привлечь условия равновесия (2). Элементы остаются гармоническими или бигармоническими функциями. Отличие от предыдущих случаев состоит в том, что мы имеем дело с двумя линейно независимыми решениями. Одно получается, если на элементы наложить условие гармоничности. Тогда $2(n-1)c_1+c_2=0$. Например, при $c_1=4$, $c_2=-8(n-1)$ имеем

$$P_{xz}-iP_{yz}=2(2n-1)\varphi_{n-1},\qquad P_{xz}=(2n-1)z\varphi_{n-1},$$

$$P_{yz}=i(2n-1)z\varphi_{n-1},\quad \Phi=P_{xx}+P_{yy}=-2(2+1/n)\varphi_n,$$

$$P_{zz}=-(2n+1+1/n)\varphi_n,\quad H=\big[4R^2-8(n-1)z^2\big]\varphi_{n-2},$$

$$P_{xx}-P_{yy}=2\big[R^2-2(n-1)z^2\big]\varphi_{n-2},$$

$$P_{xy}=i\big[R^2-2(n-1)z^2\big]\varphi_{n-2}.$$

Второе решение будет уже не гармоническим, а существенно бигармонически. Например, при $c_1=4(n+1)$, $c_2=4(n+2)$ имеем

$$P_{xz}-iP_{yz}=-4z\varphi_{n-1},\quad P_{xz}=-2z\varphi_{n-1},\quad P_{yz}=-2iz\varphi_{n-1},$$

$$P_{xx}-P_{yy}=\big[2(n+1)R^2+2(n+3)z^2\big]\varphi_{n-2},$$

$$P_{xy}=i\big[(n+1)R^2+(n+3)z^2\big]\varphi_{n-2},$$

$$\Phi=P_{xx}+P_{yy}=-4\varphi_n,\qquad P_{zz}=0.$$

Перейдем к случаю $n=m-1$. В нуль сразу обращается только величина H_1. Пусть $P_{zz}=cz\varphi_{n-1}$ (согласно общему правилу). Тогда первое уравнение (1) приводит к соотношению $P_{xz}+iP_{yz}=(c/2)\varphi_n$. С другой стороны, можно взять $H=(c_1z^3+c_2zR^2)\varphi_{n-3}$. Подстановка этого равенства в предпоследнее уравнение (1) дает $P_{xz}-iP_{yz}=(1/4)\big[-c_2R^2+(2c_2-3c_1)z^2\big]\varphi_{n-2}$.

Из последнего уравнения (1) находим $\Phi=\big[2c+3(c_2-c_1)/2\big]z\varphi_{n-1}$. Наконец, третье уравнение (1) дает связь $(c_2-c_1)/2+c=0$ между коэффициентами, в результате получаем $\Phi=(c_2-c_1)z\varphi_{n-1}/2$. Учитывая второе условие равновесия (2), находим единственное соотношение между коэффициентами c_1 и c_2: $(n+2)c_1-(n+3)c_2=0$. Можно взять $c_1=4(n+3)$, $c_2=4(n+2)$, $c=2$. Тогда

$$P_{xz}+iP_{yz}=\varphi_n,\quad P_{xz}-iP_{yz}=-\big[(n+2)R^2+(n+5)z^2\big]\varphi_{n-2},$$

$$P_{xx}+P_{yy}=-2z\varphi_{n-1},\quad P_{xx}-P_{yy}=2z\big[(n+3)z^2+(n+2)R^2\big]\varphi_{n-3},$$

$$P_{xy}=iz\big[(n+3)z^2+(n+2)R^2\big]\varphi_{n-3},\qquad P_{zz}=2z\varphi_{n-1}.$$

Рассмотрим, наконец, последний случай $n=m-2$. Соображения симметрии не дают непосредственно указаний на обращение в нуль каких-либо комбинаций. Начинаем с элемента $P_{zz}=(cR^2+\bar{c}z^2)\varphi_{n-2}$. Тогда первое уравнение (1) дает $P_{xz}+iP_{yz}=(\bar{c}-c)z\varphi_{n-1}$. С другой стороны, $H=(c_1z^4+c_2R^2z^2+c_3R^4)\varphi_{n-4}$. После подстановки в предпоследнее уравнение (1) получаем

$$P_{xz}-iP_{yz}=z\big[(c_3-c_2/2)R^2+(c_2/2-c_1)z^2\big]\varphi_{n-3}.$$

Из последнего же уравнения (1) следует

$$\Phi=\left[\left(c_3-\frac{c_2}{2}+2c\right)R^2+\left(\frac{5}{2}c_2-3c_1-2c_3+2\bar{c}\right)z^2\right]\varphi_{n-2}.$$

Вернемся ко второму уравнению (1). Оно дает соотношение $H_1 = (\bar{c} - c)\varphi_n$. Наконец, третье уравнение (1) связывает коэффициенты

$$\bar{c} - c = c_3 + c_1 - c_2. \tag{3}$$

Перейдем к условиям равновесия. Подстановка вышенайденных функций в уравнения (2) дает соотношения, частью зависимые от предыдущего и друг от друга. Остаются два независимых уравнения

$$2(n+1)(\bar{c} - c) + 2c_3 - c_2 + 4c = 0,$$

$$2(n+2)c_3 - nc_2 + 4(n-1)c = 0. \tag{4}$$

В результате мы для пяти параметров получили три соотношения, так что у нас фактически два независимых параметра. В качестве таковых можно взять, например, c_1 и c_2. Тогда, в частности,

$$\bar{c} = \big[(n+4)(n-1)c + c_2\big] / \big[(n+1)(n+2)\big].$$

Обратимся к условию бигармоничности. Оно нетривиально только для фукнции H (остальные рассматриваемые функции автоматически оказываются бигармоническими) и дает $3c_1 + 2(n-3)c_2 + 4(n-2)(n-3)c_3 = 0$.

Комбинируя полученные соотношения с тремя предыдущими соотношениями (3) и (4), находим с точностью до произвольного общего коэффициента

$$c_1 = 2(n-3)(n+2), \qquad c_2 = 2n^2 - 5n - 6$$

и затем

$$c_3 = -\frac{2n^2 - 2n - 3}{2(n-2)}, \qquad c = \frac{2n^3 - 5n^2 + n + 6}{4(n-2)},$$

$$\bar{c} = \frac{2n^3 - 5n^2 - 3n + 12}{4(n-2)}.$$

Легко показать, что в случае $n = m+2$ допустимы любые неотрицательные значения m. В остальных случаях существуют ограничения снизу, иначе получались бы не полиномы, а дробные функции. Точнее, при $n = m+1$ или $n = m$ должно быть $m \geqslant 1$ (причем при $n = m$ остается только один вариант, представляющий собой линейную комбинацию, из рассматриваемых в работе). Аналогично при $n = m-1$ и $n = m-2$ действует ограничение $m \geqslant 3$.

Во всех рассмотренных нами случаях легко убедиться, что значения квадратичной фармы $Q = x^2P_{xx} + y^2P_{yy} + z^2P_{zz} + 2xyP_{xy} + 2xzP_{xz} + 2yzP_{yz}$ дают пространственное поле с нужным типом симметрии, т. е. при заданном r $\left(= (x^2+y^2+z^2)^{1/2}\right)$ они пропорциональны сферической гармонике порядка n.

Операторный подход

Полезно указать другой подход к построению найденных решений, основанный на прямом построении элементов матрицы давления, исходящим из некоторой скалярной функции φ_n и использующим операции, сохраняющие заданный тип симметрии.

В случае $n = m$, как и следовало ожидать, получаются два варианта тензора давления. В одном случае $P_{xx} = (2J_x^2 - n - 1)\varphi_n$, $P_{xy} = (J_xJ_y + J_yJ_x)\varphi_n$, где введены операторы вращения [3]

$$J_x = y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}, \quad J_y = z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}, \quad J_z = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}.$$

Остальные элементы очевидным образом строятся по аналогии.

Другой вариант в рассматриваемом случае таков:

$$P_{xx} = 2x\frac{\partial\varphi_n}{\partial x} - (n+3)\varphi_n, \quad P_{xy} = x\frac{\partial\varphi_n}{\partial y} + y\frac{\partial\varphi_n}{\partial x}.$$

Обратимся к случаю $n = m - 1$. Имеем

$$P_{xx} = 2(n+4)\,J_x\frac{\partial U}{\partial x} - 2xJ_x\Delta U,$$

$$P_{xy} = (n+4)\,J_y\frac{\partial U}{\partial x} + J_x\frac{\partial U}{\partial y} - (yJ_x + xJ_y)\Delta U,$$

где $U = r^2\varphi_n$.

Рассмотрим, наконец, случай $n = m - 2$. Имеем

$$P_{xx} = r^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \alpha x^2\Delta U + \beta x\frac{\partial U}{\partial x} + \gamma U + \delta r^2\Delta U,$$

$$P_{xy} = r^2\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y} - \alpha xy\Delta U + \frac{\beta}{2}\left(y\frac{\partial U}{\partial x} + x\frac{\partial U}{\partial y}\right),$$

где

$$\alpha = -\frac{2n+5}{2(n+3)}, \qquad \beta = -\frac{2n^2 + 9n + 8}{n+3},$$

$$\gamma = -\frac{2n^3 + 15n^2 + 37n + 28}{2(n+3)}, \qquad \delta = -1.$$

Коэффициенты в вышеприведенных формулах подобраны так, чтобы элементы тензора давления удовлетворяли условию бигармоничности и условиям равновесия (2). По этим формулам мы привели соответствующие расчеты и убедились в совпадении результатов с теми, которые приведены в основной части работы (с точностью до умножения матрицы тензора давления на произвольный коэффициент).

Указанное совпадение имеет место для любых n, но естественно, что его легче всего проверять для сравнительно небольших n.

Установим следующую легко проверяемую особенность найденных решений, а именно: бигармоническое решение, соответствующее $n = m,\ m-1,\ m-2$, применением оператора Лапласа переводится с точностью до постоянного коэффициента в гармоническое решение соответственно $n = m+2,\ m+1, m$ (но с другим m). Это тоже служит одним из средств проверки найденных решений.

Заключение

Итак, при каждом m можно построить только шесть линейно независимых тензорных полей, удовлетворяющих условиям равновесия и условию бигармоничности каждого элемента. Эти шесть полей относятся к пяти разным типам симметрии, причем двойственность решения имеет место только при $n = m$.

Напомним, что каждый тип симметрии имеет еще $2n + 1$-кратное вырождение, т. е. в результате вращений рассмотренных конфигураций вокруг различных осей получается $2n + 1$ линейно независимых тензорных полей. Сходное вырождение для скалярных, векторных и других полей часто встречается в прикладных задачах (см., например, [8]). Симметрия внутренних состояний обычно оказывается следствием внешних условий. Естественно, что для сфероидальных тел группа геометрической симметрии оказывается более узкой [3]. Возможно, впрочем, что и для сфероидальных тел удастся найти какую-то более глубокую симметрию, формально аналогичную рассмотренной здесь симметрии полей в сферических телах.

Построенные поля напряжений можно использовать для представления равновесных и колебательных состояний различных упругих и пластичных тел преимущественно сферической или близкой к сферической формы. Естественно, в конкретных задачах во многих случаях окажется необходимым брать суперпозицию конечного или бесконечного числа найденных решений.

Список литературы

[1] *Антонов В.А., Тимошкова Е.И., Холшевников К.В.* Введение в теорию ньютоновского потенциала. М.: Наука, 1988.

[2] *Гобсон Е.И.* Теория сферических и эллипсоидальных функций. М.: ИЛ, 1952.

[3] *Баранов А.С.* // ЖВВМФ. 1997. Т. 37. № 4. С. 395–403.

[4] *Огородников К.Ф.* Динамика звездных систем. М.: Физматгиз, 1958.

[5] *Ляв А.* Математическая теория упругости. М., Л.: Гостехиздат, 1935.

[6] *Любарский Г.Я.* Теория групп и ее применение. М.: Физматгиз, 1958.

[7] *Виленкин Н.Я.* Специальные функции и теория представления групп. М.: Наука, 1965.

[8] *Баранов А.С.* // Астрон. журн. 1993. Т. 70. № 1. С. 223–226.