01

Релятивистская частица в бегущем магнитном поле

© А.И. Торопова

Специализированный учебно-научный центр Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова
121357 Москва, Россия
E-mail: toropova@simlab.ilc.msu.su

(Поступило в Редакцию 27 апреля 1999 г.)

В рамках гамильтонова формализма получено точное решение уравнений движения заряженной частицы в электромагнитном поле, создаваемом бегущей волной тока. Рассмотрены движение частицы в бегущей волне скачка магнитного поля, в монохроматическом поле и волновой механизм бетатронного ускорения. Показано, что в этих системах можно реализовать режим ускорения, приводящий к возрастанию продольной и поперечной компонент скорости.

В настоящее время известно ограниченное число точно решаемых задач релятивистской механики, связанных с движением заряженных частиц в поле электромагнитной волны, возбуждаемой в реальных электродинамических системах. В работе [1] получено решение уравнений движения частицы в поле TEM-волны, распространяющейся в квадрупольном волноводе. В случае движения пучка нерелятивистских частиц эта электродинамическая система, впервые предложенная В. Паулем, позволила создать масс-спектрометр высокого разрешения [2,3]. Анализ областей устойчивости движения показал, что квадрупольный волновод может быть использован для фокусировки и сепарации релятивистских частиц по массам, удельному заряду, подавления разброса поперечных скоростей частиц пучка.

В предлагаемой работе получено точное решение гамильтоновых уравнений движения релятивистской частицы в поле электромагнитной волны, возбуждаемой бегущей волной тока в аксиально-симметричной электродинамической системе. Полученные решения позволяют исследовать области устойчивости, найти кинетическую энергию и продольный импульс частицы. Рассмотрены режимы ускорения частиц в бегущей волне скачка магнитного поля и в монохроматическом поле. Показано, что в случае режима волнового бетатронного ускорения должно выполняться условие, аналогичное известному правилу 2:1. Предложенный метод решения, основанный на теории канонических преобразований, может быть применен при произвольном способе возбуждения поля.

Электромагнитное поле электродинамической системы

4-потенциал электромагнитного поля представим в виде

$$A^\mu(x) = [(e_2x)e_1^\mu - (e_1x)e_2^\mu]\,B(kx)/2, \qquad (1)$$

где $x^\mu = (ct, x, y, z)$; $e^\mu_{(1)} = (0,1,0,0)$; $e^\mu_{(2)} = (0,0,1,0)$; $n^\mu = (1,0,0,1)$; $k^\mu = (\omega/c)n^\mu$; $B(kx)$ — произвольная функция; $kx = \omega t - \omega z/c$ [4]; здесь использована метрика $g^{\mu\nu} = \mathrm{diag}\,(1,-1,-1,-1)$; скалярное произведение 4-векторов $ab = a^\mu b_\mu = a_0b_0 - \mathbf{ab}$, $a^2 \equiv a^\mu a_\mu$; 4-потенциал удовлетворяет волновому уравнению $\partial^\nu\partial_\nu A^\mu = 0$ и условию Лоренца $\partial_\mu A^\mu = 0$.

Тензор электромагнитного поля

$$F^{\mu\nu} = t^{\mu\nu}B(kx) + [(e_1x)1^{\mu\nu} - (e_2x)f^{\mu\nu}]B'/2,$$

где $t^{\mu\nu} = e^\mu_{(2)}e^\nu_{(1)}e^\mu_{(1)}e^\nu_{(2)}$, $f^{\mu\nu} = e^\mu_{(1)}k^\nu - k^\mu e^\nu_{(1)}$, $1^{\mu\nu} = e^\mu_{(2)}k^\nu - k^\mu e^\nu_{(2)}$; $B' = dB/d(kx)$.

Напряженности электрического и магнитного полей соответственно равны

$$\mathbf{E} = (yk_0B'/2,\ -xk_0B'/2,\ 0),$$

$$\mathbf{B} = (xk_0B'/2,\ yk_0B'/2,\ B), \qquad k_0 = \omega/c.$$

Очевидно, $\mathbf{EB} = 0$. Отметим, что в случае $B = \mathrm{const}$ потенциал (1) задает однородное постоянное магнитное поле. "Бегущее" магнитное поле $B_z = B(\omega t - \omega z/c)$ индуцирует вихревые электрическое и магнитное поля в плоскости перпендикулярной оси симметрии системы. Функция $B(kx)$ удовлетворяет естественным граничным условиям $B(kx) \to B_1$ при $kx \to -\infty$; $B(kx) \to B_2$ при $kx \to +\infty$, где $B_1, B_2 > B_1$ — положительные постоянные величины.

Решение уравнений движения

Уравнение траектории частицы представим в параметрической форме $x^\mu = x^\mu(\tau)$, где τ — собственное время. 4-скорость частицы $\dot{x}^\mu = (c\dot{t}, \dot{x})$; точка обозначает производную по τ, $\dot{x}^\mu = \gamma(c, \mathbf{v})$, $\gamma = [1 - v^2/c^2]^{-1/2}$. Найдем решение уравнений движения заряженной частицы в терминах гамильтонова формализма. Гамильтониан частицы, движущейся в электромагнитном поле, задаваемом 4-потенциалом (1), имеет вид [5]

$$H(x,p) = -(1/2m)[p - (e/c)A(x)]^2 + mc^2/2. \qquad (2)$$

Учитывая значения фундаментальной скобки Пуассона (СП) $[x^\mu, p^\nu] = -g^{\mu\nu}$, получим систему

$$\dot{x}^\mu = [x^\mu, H], \quad m\dot{x}^\mu = p^\mu - (e/c)A^\mu, \qquad (3)$$

$$\dot{p}_\mu = [p_\mu, H], \quad \dot{p}_\mu = (e/c)\dot{x}_\alpha\partial A^\alpha/\partial x^\mu. \qquad (4)$$

Начальные условия $x^\mu(0) = (0, x_0, y_0, z_0)$, $\dot{x}^\mu(0) = u^\mu$, $u^\mu = \gamma_0(c, \mathbf{v}_0)$, $\gamma_0 = [1 - (\mathbf{v}_0/c)^2]^{-1/2}$. Система (3), (4) обладает тремя интегралами. Один из них найдем, образуя свертку уравнения (4) с 4-вектором k^μ. В результате имеем $kp = mku$. Далее, образуя свертку (3) с k_μ, получим $k\dot{x} = ku$ или в координатной форме

$$c\dot{t} - \dot{z} = nu. \tag{5}$$

Следовательно, фаза волны на траектории частицы $kx = ku\tau + kx_0$. Другой тривиальный интеграл системы (3), (4) имеет вид $\dot{x}^2 = c^2$ или

$$(c\dot{t})^2 - \dot{x}^2 - \dot{y}^2 - \dot{z}^2 = c^2. \tag{6}$$

Разрешая (5), (6) относительно $\dot{t}, \dot{z}$, находим

$$c\dot{t} = nu/2 + (1/2nu)(c^2 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2),$$

$$\dot{z} = -nu/2 + (1/2nu)(c^2 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2). \tag{7}$$

Первый интеграл (5) следует по существу из системы четырех уравнений (3), (4), соответствующих значениям $\mu = 0.3$,

$$mc\dot{t} = p_0, \quad m\dot{z} = p_z,$$

$$\dot{p}_0 = (e/c)k_0(y\dot{x} - x\dot{y})B'/2,$$

$$\dot{p}_z = (e/c)k_0(y\dot{x} - x\dot{y})B'/2. \tag{8}$$

Приращение кинетической энергии частицы $E = mc^2\dot{t}$ обусловлено вихревым электрическим полем

$$dE/d\tau = c\dot{x}E, \quad dE/d\tau = -(e\omega/c)(x\dot{y} - y\dot{x})B'/2. \tag{9}$$

Полагая в (3), (4) $\mu = 1.2$ и подставляя первый интеграл (5), запишем уравнения как гамильтонову систему

$$m\dot{x} = p_x + (c/c)yB(\sigma)/2, \quad m\dot{y} = p_y - (c/c)xB(\sigma)/2, \tag{10}$$

$$\dot{p}_x = (e/c)\dot{y}B(\sigma)/2, \quad \dot{p}_y = -(e/c)\dot{x}B(\sigma)/2, \tag{11}$$

$\sigma(\tau) = ku\tau + kx_0$, порождаемую частью гамильтониана (2), не зависящей от компонент импульса p_0 и p_z,

$$H_{12} = (1/2m)[p_x^2 + p_y^2] + (e/2mc)[yp_x - xp_y]B(\sigma)$$

$$+ (e^2/8mc^2)(x^2 + y^2)B^2(\sigma). \tag{12}$$

Уравнения (10), (11) имеют первый интеграл — проекцию момента обобщенного импульса на ось z

$$M_z = m(x\dot{y} - y\dot{x}) + (e/2c)(x^2 + y^2)B(\sigma).$$

Закон изменения энергии (9) приобретает вид

$$dE/d\tau = (e^2\omega/8mc^2)(x^2 + y^2)(B^2)' - e\omega M_z/mc.$$

Из уравнений (8) находим $cdp_z/d\tau = dE/d\tau$. Отсюда следует весьма важное следствие — одновременно с увеличением энергии возрастает продольный импульс частицы.

Решение уравнений (10), (11) можно найти в результате ряда канонических преобразований (КП). Произведем вначале КП $x, y, p_x, p_y \to x', y', p'_x, p'_y$:

$$x = (1/2m)^{1/2}(x' + y'), \quad y = -i(1/2m)^{1/2}(x' - y'),$$

$$p_x = (m/2)^{1/2}(p'_x + p'_y), \quad p_y = i(m/2)^{1/2}(p'_x - p'_y). \tag{13}$$

В новых переменных гамильтониан (12) имеет вид

$$H'_{12} = p'_x p'_y + (ie/2mc)(y'p'_y - x'p'_x)B + (eB/2mc)^2 x'y'. \tag{14}$$

Теперь исключим из (14) второе слагаемое, производя КП

$$x' = \exp(-i\beta/2)x'_1, \quad y' = \exp(i\beta/2)x'_2,$$

$$p'_x = \exp(i\beta/2)p'_1, \quad p'_y = \exp(-i\beta/2)p'_2,$$

$$\beta(\tau) = (e/mc)\int_0^\tau d\Theta B|\sigma(\Theta)|. \tag{15}$$

Новый гамильтониан

$$H''_{12} = p'_1 p'_2 + (eB/2mc)^2 x'_1 x'_2. \tag{16}$$

Решение канонических уравнений

$$dx'_1/d\tau = p'_2, \quad dx'_2/d\tau = p'_1,$$

$$dp'_1/d\tau = -(eB/2mc)^2 x'_2, \quad dp'_2/d\tau = -(eB/2mc)^2 x'_1$$

можно представить в виде

$$x'_1 = (1/2)^{1/2}(wa_1 + w^* a_2^*), \quad x'_2 = (1/2)^{1/2}(wa_2 + w^* a_1^*),$$

$$p'_1 = (1/2)^{1/2}(\dot{w}a_2 + \dot{w}^* a_1^*),$$

$$p'_2 = (1/2)^{1/2}(\dot{w}a_1 + \dot{w}^* a_2^*), \tag{17}$$

где a_1, a_2 — константы; функция $w\tau$ — комплексное решение уравнения осциллятора

$$d^2w/d\tau^2 + [eB(\sigma)/2mc]^2 w = 0 \tag{18}$$

с начальным условием $w = (2/\omega_1)^{1/2}\exp(-i\omega_1\tau/2)$, $\omega_1 = eB_1/mc$ при $\tau \to -\infty$. Определитель Вронского пары решений w, w^* не зависит от τ: $w\dot{w}^* - \dot{w}w^* = 2i$. Подставляя (15), (17) в (13), получим решение уравнений движения (10), (11)

$$x = (1/\sqrt{m})\,\mathrm{Re}\,[(wa_1 + w^* a_2^*)\exp(-i\beta/2)],$$

$$y = (1/\sqrt{m})\,\mathrm{Im}\,[(wa_1 + w^* a_2^*)\exp(-i\beta/2)]. \tag{19}$$

Подставляя (19) в (7), найдем функции $t(\tau)$ и $z(\tau)$. В дальнейшем нас будет интересовать решение уравнения (18) при $\tau \to \infty$, когда функция $B(kx)$ достигает постоянного значения B_2. В этом случае асимптотика имеет вид

$$w = (2/\omega_1)^{1/2}[C_1\exp(-i\omega_2\tau/2) + C_2\exp(i\omega_2)\tau/2],$$

$$\omega_2 = eB_2/mc. \tag{20}$$

Сделаем 2 замечания.

1. Для нахождения коэффициентов C_1 и C_2 можно использовать решения, известные в квантовой механике, поскольку асимптотики соответствуют задаче рассеяния на одномерном потенциале. Согласно [6], величины $1/C_1$ и C_2/C_1 играют роль амплитуд рассеяния вперед и назад для волны, падающей на потенциал справа. Пусть $1/p$ — характерный масштаб изменения функции $B(\sigma)$. Тогда в случае адиабатически медленного изменения $|dB(\sigma)/d\tau| \ll pku\,B(\sigma)$ отношение $C_2/C_1 \sim \exp(-\pi\omega_1/pku)$ имеет экспоненциальную малость [6].

2. Поскольку вронскиан линейно независимых решений w, w^* равен $2i$, то решение (17) представляет собой КП $x'_n, p'_n \to x_n = a_n$, $p_n = ia^*_n$ $(n = 1, 2)$, порождаемый производящей функцией, зависящей от старых и новых координат [5],

$$p'_n = \partial F_1/\partial x'_n, \quad p_n = \partial F_1/\partial x_n,$$

$$F_1 = (1/w^*)[\dot{w}^* x'_1 x'_2 - i\sqrt{2}(x'_1 x_2 + x'_2 x_1) + w x_1 x_2].$$

Учитывая значение вронскиана, находим, что после замены переменных новый гамильтониан $h = H''_{12} + \partial F_1/\partial\tau$ обращается в нуль.

Движение частицы в бегущей волне скачка магнитного поля

Особый интерес представляет магнитное поле (1), для которого функция

$$B^2(\sigma) = (1/2)(B_1^2 + B_2^2) + (1/2)(B_2^2 - B_1^2)$$
$$\times\ \mathrm{th}\,[p(\sigma - \sigma_0)] + [B_0/2\,\mathrm{ch}p\,(\sigma - \sigma_0)]^2$$

принимает предельные значения B_1^2, B_2^2 и имеет максимум при $B_0^2 > B_2^2 - B_1^2$. Эта функция известна в квантовой механике как потенциал Эккарта [6]. Наибольший интерес представляет случай $pku \gg \omega_1$, соответствующий резкому скачку $B(\sigma)$. Полагая $B_0 = 0$, получим функцию $B(\sigma) \approx B_1$, $\sigma < \sigma_0$; $B(\sigma) \approx B_2$, $\sigma > \sigma_0$. Поскольку на траекториях системы $\sigma - \sigma_0 = ku(\tau - \tau_c)$, $\tau_c = (\sigma_0 - kx_0)/ku > 0$, то, интегрируя уравнения второго порядка, следующие из (10), (11) по малой окрестности точки $\tau = \tau_c$, получим граничные условия — приращения компонент скорости частицы $\Delta\dot{x}(\omega_2 - \omega_1)y(\tau_c)/2$, $\Delta\dot{y} = -(\omega_2 - \omega_1)x(\tau_c)/2$. В соответствии с (20) решение уравнения (18) имеет вид

$$w_{(1)} = (2/\omega_1)^{1/2}\exp(-i\omega_1\tau/2), \quad \tau \le \tau_c;$$

$$w_{(2)} = (2/\omega_1)^{1/2}[D\exp(-i\omega_2\tau/2)$$
$$+ S\exp(i\omega_2\tau/2)], \quad \tau \ge \tau_c, \qquad (21a)$$

$$D,\ S = (D_0, S_0)\exp(-i\omega_1\tau_c/2 \pm i\omega_2\tau_c/2),$$
$$D_0, S_0 = (1/2)(1 \pm \omega_1/\omega_2). \qquad (21b)$$

Пусть $x_0 = 0$, $y_0 > 0$, $z_0 = 0$, $\mathbf{v}_0 = (v_1, 0, 0)$. Тогда $\dot{x}^\mu(0) = (c\gamma_0, u_1, 0, 0)$, $u_1 = \gamma_0 v_1$, $\beta = \omega_1\tau$. Подставляя (21a) в (19) и полагая $\tau = 0$, находим $(m\omega_1)^{-1/2}a_1 = iR$, $(m\omega_1)^{-1/2}a_2^* = i(y_0 - R)$, $R = u_1/\omega_1$. В интервале $0 \le \tau \le \tau_c$ уравнение траектории $x(\tau) = R\sin\omega_1\tau$, $y(\tau) = R\cos\omega_1\tau + (y_0 - R)$, $z(\tau) = 0$. Частица движется по окружности радиусом R, координаты центра $(0, y_0 - R, 0)$. После подстановки (21b) в (19) получим решение уравнений (10), (11) в области $\tau > \tau_c$: $x(\tau) = \mathrm{Re}\,x_+$, $y(\tau) = \mathrm{Im}\,x_+$, $x_+(\tau) = x + iy$

$$x_+(\tau) = i[D_0R\exp(-i\omega_1\tau_c) + S_0(y_0 - R)]\exp[-i\omega_2(\tau - \tau_c)]$$
$$+ i[S_0R\exp(-i\omega_1\tau_c) + D_0(y_0 - R)].$$

Полагая $[D_0R\exp(-i\omega_1\tau_c) + S_0(y_0 - R)] = R_2\exp(-i\eta)$, получим компоненты 4-скорости

$$\dot{x}(\tau) = \omega_2R_2\cos[\omega_2(\tau - \tau_c) + \eta],$$
$$\dot{y}(\tau) = -\omega_2R_2\sin[\omega_2(\tau - \tau_c) + \eta]. \qquad (22)$$

Из (7) находим значения кинетической энергии $T = E - mc^2$, $E = mc^2\dot{t}$ и продольного импульса $p_z = m\dot{z}$

$$c\dot{t} = c\gamma_0 + [(\omega_2R_2)^2 - (\omega_1R)^2]/(2c\gamma_0),$$
$$\dot{z} = [(\omega_2R_2)^2 - (\omega_1R)^2]/(2c\gamma_0). \qquad (23)$$

Частица движется по винтовой линии радиусом R_2, ось которой находится на расстоянии $r_2 = |S_0R\exp(-i\omega_1\tau_c) + D_0(y_0 - R)|$ от оси z. Отметим, что в случае $v_1 = 0$ имеем $\dot{x}(\tau) = \omega_2R_2\cos\omega_2(\tau - \tau_c)$, $\dot{y}(\tau) = -\omega_2R_2\sin\omega_2(\tau - \tau_c)$, $R_2 = S_0y_0$, $r_2 = D_0y_0$. В другом частном случае $y_0 = R$ находим $\dot{x}(\tau) = \omega_2R_2\cos[\omega_2(\tau - \tau_c) + \omega_1\tau_c]$,

$$\dot{y}(\tau) = -\omega_2R_2\sin[\omega_2(\tau - \tau_c) + \omega_1\tau_c],$$
$$R_2 = D_0R, \qquad r_2 = S_0R.$$

Из (23) следует, что после прохождения скачка магнитного поля энергия частицы возрастает.

Движение частицы в монохроматическом поле

Пусть функция $B(kx) = B_0 + b\cos kx$. Тогда из (18) получим уравнение

$$d^2w/d\tau^2 + (1/4)[\Omega_0 + \omega_0\cos\sigma(\tau)]^2w = 0,$$
$$\Omega_0 = eB_0/mc, \quad \omega_0 = eb/mc,$$

которое представляет собой уравнение Хилла. Полагая

$$2s = ku\tau + kx_0, \quad \mu = (\Omega_0^2 + \omega_0^2/2)/(4ku)^2,$$
$$q = \omega_0\Omega_0/(4ku)^2, \quad q_2 = (\omega_0/8ku)^2,$$

получим стандартную форму уравнения Хилла

$$d^2w/ds^2 + (\mu + 2q\cos 2s + 2q_2\cos 4s)w = 0. \qquad (24)$$

Показатель экспоненты в (15)

$$\beta(\tau) = \Omega_0\tau + (\omega_0/ku)[\sin(ku\tau + kx_0) - \sin(kx_0)].$$

В случае $q_2 \ll q$ или $b \ll 2B_0$ имеем уравнение Матье [7,8]. Из теории функций Матье известно, что плоскость параметров (μ, q) содержит области, соответствующие ограниченным и неограниченным решениям [7]. При малых значениях μ и q ограниченное решение уравнения (24) реализуется в первой области устойчивости в плоскости (μ, q), которая лежит справа от кривой $\mu_{c0}(q) = -q^2/2 + 7q^4/128 + \ldots$ и ограничена кривыми $\mu_{c1}(q) = 1 - q - q^2/8 + \ldots$ при $q > 0$ и $\mu_{c1}(q) = \mu_{c1}(-q)$ при $q < 0$.

Особый интерес представляет случай параметрического резонанса, когда можно ожидать заметного увеличения энергии и продольного импульса при значениях $\mu = 1, 4, 9, \ldots$. Анализ областей устойчивости решений приводит к выводу о возможности реализации ускорения частиц в режиме параметрического резонанса и сепарации частиц по удельному заряду.

”Бетатронный” режим ускорения

Известно, что для предотвращения потерь частиц необходимо использовать фокусирующее магнитное поле, убывающее с увеличением расстояния от оси системы. Рассмотрим движение частицы в неоднородном бегущем поле, задаваемом в цилиндрической системе координат компонентами 4-потенциала,

$$A_0 = A_\rho = A_z = 0, \quad A_\varphi = (1/\rho)\int\limits_0^\rho d\rho\,\rho B(\rho, kx),$$

$kx = \omega t - \omega z/c$.

Лагранжиан, описывающий движение релятивистткой частицы, запишем в представлении собственного времени (в СИ) [9]

$$L = (m/2)[\dot\rho^2 + \rho^2\dot\phi^2 + \dot z^2 - c^2\dot t^2]$$

$$+ e\dot\phi\int\limits_0^\rho d\rho\,\rho B(\rho, \omega t - \omega z/c).$$

Уравнения Лагранжа–Эйлера имеют первые интегралы (5), (6); $kx = \sigma(\tau)$, $\sigma(\tau) = ku\tau + kx_0$. Найдем решение уравнений движения, рассматривая цикл ускорения на цилиндрической поверхности постоянного радиуса. Полагая $\dot\phi = \Omega$, $\rho = R$, имеем систему

$$dE/d\tau = -(e\Omega\omega/2\pi)d\Phi/d\sigma,$$

$$\Phi(\sigma) = 2\pi\int\limits_0^R d\rho\,\rho B(\rho, \sigma), \qquad (25)$$

$$0 = m\Omega + eB(R, \sigma), \qquad (26)$$

$$mR^2 d\Omega/d\tau + (e/2\pi)d\Phi/d\tau = 0, \qquad (27)$$

$$md^2z/d\tau^2 = -(e\Omega\omega/2\pi c)d\Phi/d\sigma, \qquad (28)$$

где Φ — полный магнитный поток, пронизывающий орбиту.

Из уравнений (26), (27) находим $d\Phi/d\tau = 2\pi R^2 dB/d\tau$. Интегрируя по циклу ускорения с начальными условиями $B(R, \sigma) = 0$, $\Phi(\sigma) = 0$ при $\tau = 0$, получим аналог ”бетатронного правила” $\Phi(\sigma_m) = 2\pi R^2 B(R, \sigma_m)$, $\sigma_m = ku\tau_m + kx_0$. Подставляя Φ и Ω в (25), (28), найдем значения кинетической энергии $T = E - mc^2$ и z-компоненты 4-скорости

$$E(\tau_m) = mc^2\gamma_0 + e^2R^2B^2(R, \sigma_m)/(2mnu),$$

$$m\dot z = m\dot z(0) + e^2R^2B^2(R, \sigma_m)/(2mcnu).$$

Пусть $B(R, \sigma_m) = B_m$ — максимальное значение индукции, $\dot z(0) = 0$. Тогда $\gamma_0 = 1$, кинетическая энергия частицы в конце цикла ускорения $T(\tau_m) = e^2R^2B_m^2/(2m)$. Поскольку $ecRB_m = 300\,[R(m)B_m(T)]$ MeV, то величину $T(\tau_m)$ можно представить в виде $T(\tau_m) = 45\,[R^2(m)B_m^2(T)/mc^2\,(\mathrm{MeV})]$ GeV. При ускорении протонов $T_p(\tau_m) = 45\,[R^2(m)B_m^2(T)]$ MeV, при ускорении электронов $T_e(\tau_m) = 90\,[R^2(m)B_m^2(T)]$ GeV. Отметим, что в случае обычного бетатронного механизма ускорения кинетическая энергия частицы $T(\tau_m) = [(mc^2)^2 + (ecRB_m)^2]^{1/2} - mc^2 \approx ecRB_m$.

В заключение выражаю благодарность Ю.Г. Павленко за обсуждение.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 97-01-00957).

Список литературы

[1] *Павленко Ю.Г., Наумов Н.Д., Торопова А.И.* // ЖТФ. 1997. Т. 67. Вып. 7. С. 98–102.
[2] *Пауль В.* // УФН. 1990. Т. 169. № 12. с. 109.
[3] *Pradip K.* Ghosh. Ion Traps. The International Series of Monograph on Physics. Oxford: Clarendon PRESS, 1995.
[4] *Малкин И.А., Манько В.И.* Динамические симметрии и когерентные состояния квантовых систем. М.: Наука, 1979.
[5] *Павленко Ю.Г.* Гамильтоновы методы в электродинамике и квантовой механике. М.: Изд-во Московского ун-та, 1988.
[6] *Базь А.И., Зельдович Я.Б., Переломов А.М.* Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике. М.: Наука, 1971.
[7] *Морс Ф.М., Фешбах Г.* Методы теоретической физики. Т. 1. М.: ИЛ, 1958. Morse Philip M., Feshbach Herman. Metods of Theoretical Physics. Pt 1. New York; Toronto; London: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1953.
[8] *Мак-Лахлан Н.В.* Теория и приложения функций Матье. М.: ИЛ, 1953. McLachlan N.W. Theory and Application of Mathieu Functions, London, 1947.
[9] *Павленко Ю.Г.* Лекции по теоретической механике. М.: Изд-во Московского ун-та, 1991.