01;03

Неустойчивость заряженной сферической вязкой капли, движущейся относительно среды

© А.И. Григорьев, В.А. Коромыслов, С.О. Ширяева

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
150000 Ярославль, Россия
E-mail: rectorat@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 12 июля 1999 г.)

Показано, что с увеличением скорости потока, обтекающего заряженную каплю вязкой жидкости, критическая для реализации неустойчивости капли величина собственного заряда быстро снижается. Обнаружено, что в некоторых диапазонах значений величины собственного заряда, отношения плотностей сред и скорости внешней среды четные и нечетные моды капиллярных колебаний капли попарно взаимодействуют между собой, реализуя колебательную неустойчивость капли по отношению к тангенциальному разрыву поля скоростей на ее поверхности. При скоростях среды, превышающих значения, соответствующие таким диапазонам, инкременты неустойчивости нечетных мод превышают инкременты четных с меньшими номерами, что соответствует парашютообразной деформации капли в потоке.

В ряде академических, технических и технологических проблем приходится иметь дело с неустойчивостью заряженной вязкой капли, движущейся относительно среды. С проблемой устойчивости по отношению к тангенциальному скачку поля скоростей на свободной поверхности капли приходится сталкиваться при работе различных каплеструйных устойств, при распылении лакокрасочных материалов и жидких топлив [1–3]. Данная задача представляет также значительный интерес для проблемы грозового электричества в связи с исследованием физического механизма инициирования разрыва молнии, поскольку, согласно [4–6], молния может начаться с коронного разряда в окрестности свободного падающей крупной обводненной градины. Хотя исследованию неустойчивости капли, падающей в атмосфере либо движущейся с постоянной скоростью в более плотной среде, посвящено весьма значительное число работ [7], тем не менее условия реализации неустойчивости по отношению к тангенциальному разрыву поля скоростей на поверхности капли, движущейся относительно среды, остаются пока мало исследованными. Аналогичная задача при наличии заряда на капле почти не исследовалась. Из общих соображений очевидно, что в этом случае должны реализоваться неустойчивости двух типов: неустойчивость капли по отношению к собственному заряду [3,8] и неустойчивость границы раздела капли и среды по отношению к тангенциальному разрыву поля скоростей, т.е. неустойчивость типа Кельвина–Гельмгольца [9,10].

В связи с вышесказанным представляется интересным рассмотреть условия возникновения неустойчивости заряженной капли вязкой жидкости, движущейся с постоянной скоростью в среде. При решении задачи будем рассматривать внешнюю среду как идеальную жидкость.

1. Пусть идеальная несжимаемая диэлектрическая жидкость с плотностью ρ_1 и диэлектрической проницаемостью ε движется с постоянной скоростью $\mathbf{U}$ относительно сферической капли радиуса R идеально проводящей жидкости с плотностью ρ_2 и кинематической вязкостью ν_2, имеющей заряд Q. Найдем критические условия неустойчивости капиллярных колебаний капли в описанных условиях. Все рассмотрение проведем в сферической системе координат с началом отсчета в центре капли в линейном приближении по $\xi(\Theta,t)$ — величине возмущения равновесной сферической поверхности капли, связанного с капиллярным волновым движением жидкости. Уравнение возмущенной поверхности капли запишем в виде $r(\Theta,t)=R+\xi(\Theta,t)$.

Система уравнений гидродинамики, описывающая капиллярные движения жидкости в такой системе, будет состоять из уравнений Эйлера для потенциального движения среды (т.е. $\operatorname{rot}\mathbf{V}_1=0$) и Навье–Стокса для капли

$$\frac{\partial \mathbf{V}_1}{\partial t}+\frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla}(V_1^2)=-\frac{1}{\rho_1}\boldsymbol{\nabla}P_1, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}_2}{\partial t}=-\frac{1}{\rho_2}\boldsymbol{\nabla}P_2+\nu_2\Delta\mathbf{V}_2 \qquad (2)$$

и уравнений непрерывности

$$\operatorname{div}\mathbf{V}_j=0; \qquad j=1;\,2 \qquad (3)$$

с граничными условиями

$$r=0: \qquad V_2=0, \qquad (4)$$

$$r=R: \qquad \frac{\partial\xi}{\partial t}=V_{1r}-\frac{1}{r}V_{1\Theta}\frac{\partial\xi}{\partial\Theta}, \qquad \frac{\partial\xi}{\partial t}=V_{2r}, \qquad (5)$$

$$\mathbf{n}(\mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{V}_2+\boldsymbol{\tau}(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{V}_2=0, \qquad (6)$$

$$-P_1-P_\sigma+P_E=-P_2+2\rho_2\nu_2\mathbf{n}_1(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{V}_2, \qquad (7)$$

$$r\to\infty: \qquad \mathbf{V}_1=\mathbf{U}, \qquad (8)$$

условий неизменности объемов обеих сред

$$\int_\Omega \xi(\Theta,\varphi,t)\,d\Omega=0 \qquad (9)$$

и условия неподвижности центра масс системы

$$\int\limits_{\Omega} (\Theta, \varphi, t)\mathbf{e}_r d\Omega = 0. \qquad (10)$$

Здесь и далее индекс 1 соответствует параметрам внешней среды, индекс 2 — параметрам капли; $\mathbf{n}$ и $\boldsymbol{\tau}$ — орты нормали и касательной к поверхности раздела капля–среда; $\mathbf{V}_j(\mathbf{r}, t)$ и $P_j(\mathbf{r}, t)$ — поля скоростей и давлений соответственно; P_σ — возмущение давления сил поверхностного натяжения [9]

$$P_\sigma(\xi) = -\frac{\sigma}{R^2}(2 + \Delta_\Omega)\xi, \qquad (11)$$

σ — коэффициент поверхностного натяжения на границе раздела сред; Δ_Ω — угловая часть оператора Лапласа в сферической системе координат; P_E — возмущение давления электрического поля, связанное с возмущением поверхности капли [11]

$$P_E = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}(n+1)A_{nm}Y_n^m(\Theta, \varphi) - \frac{Q^2}{2\pi\varepsilon}\xi,$$

$$A_{nm} = Q\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\xi(\Theta, \varphi, t)Y_n^m(\Theta, \varphi)\sin\Theta d\Theta d\varphi. \qquad (12)$$

$Y_n^m(\Theta, \varphi)$ — нормированные сферические функции, $d\Omega$ — элемент телесного угла.

В (1) слагаемое $\sim V_1^2$ сохранено, так как содержит слагаемые нулевого и первого порядка малости. Условия (9), (10) ограничивают снизу спектр капиллярных колебаний системы [11].

2. Чтобы упростить решение задачи, целесообразно перейти от MTL размерного базиса, где M, L, T — размерности массы, длины, времени, к другому, более удобному базису, уменьшающему число параметров задачи. Для обезразмеривания в качестве основных единиц выберем размерности объемной плотности вещества капли ρ_2, радиуса капли R и коэффициента поверхностного натяжения σ, приняв их равными единице $\rho_2 = R = \sigma = 1$. Характерные масштабы величин в новом базисе имеют вид

$$r_* = R, \quad t_* = R^{3/2}\rho_2^{1/2}\sigma^{-1/2}, \quad U_* = R^{-1/2}\rho_2^{-1/2}\sigma^{1/2},$$

$$P_* = R^{-1}\sigma, \quad Q_* = R^{3/2}\sigma^{1/2}, \quad \nu_* = R^{1/2}\rho_2^{-1/2}\sigma^{1/2}.$$

Обозначим безразмерные величины $\nu_2 \equiv \nu_1$, $\rho_1 \equiv \rho$.

В силу осевой симметрии задачи в дальнейшем не будем учитывать зависимость величин от угла φ, что в данной задаче будет означать отсутствие тороидальной вихревой компоненты поля скоростей, которая не представляет интереса, поскольку не взаимодействует с потенциальной и вихревой полоидальной компонентами скорости [11] и не влияет на устойчивость капли. Поле скоростей в капле V_2 будем представлять согласно [11] в виде суммы двух ортогональных полей

$$\mathbf{V}_2(\mathbf{r}, t) = \boldsymbol{\nabla}\Psi_1(\mathbf{r}, t) + \boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{r})\Psi_2(\mathbf{r}, t), \qquad (13)$$

где первое слагаемое определяет потенциальную часть поля скоростей, а второе — вихревую полоидальную.

Поле скоростей в среде в окрестности невозмущенной поверхности сферической капли в соответствии с [9,10] представим в виде

$$\mathbf{V}_1 = \boldsymbol{\nabla}\varphi + \boldsymbol{\nabla}\varphi^{(0)},$$

$$\mathbf{V}_1^{(0)} = \boldsymbol{\nabla}\varphi^{(0)} = -\frac{R^3}{2r^3}[3\mathbf{n}(\mathbf{U}\cdot\mathbf{n}) - \mathbf{U}] + \mathbf{U}, \qquad (14)$$

где Ψ_1, Ψ_2, φ — величины первого порядка малости.

3. Выражения для скалярных функций $\Psi_1(\mathbf{r}, t)$, $\Psi_2(\mathbf{r}, t)$ и $\varphi(\mathbf{r}, t)$, через которые выражается поле скоростей движения жидкости в среде и капле, и возмущение равновесной сферической поверхности капли $\xi(\mathbf{r}, t)$ будем искать в виде

$$\Psi_j(\mathbf{r}, t) = \sum_n \Psi_{jn}(r)Y_n(\Theta)\exp(St) \quad (j = 1,\ 2),$$

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \sum_n \varphi_n(r)Y_n(\Theta)\exp(St);$$

$$\xi(\mathbf{r}, t) = \sum_n Z_n Y_n(\Theta)\exp(St). \qquad (15)$$

Решение задачи (1)–(15) проведем методом скаляризации, подробно описанным в [11] и проиллюстрированным на задачах [12–15]. Поэтому, не останавливаясь на промежуточных расчетах, приведем окончательную систему алгебраических уравнений относительно неизвестных амплитуд Z_n капиллярных движений жидкости, формирующих рельеф возмущения границы раздела сред,

$$\rho U^2 K_n Z_{n-2} - \rho USL_n Z_{n-1} + \big\{\varkappa_n S^2 + 2\nu F_n(x)S$$
$$- \rho U^2 M_n + \gamma_n\big\}Z_n + \rho USI_n Z_{n+1} + \rho U^2 J_n Z_{n+2} = 0,$$

$$W \equiv \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon}, \qquad M_n \equiv \frac{9\alpha_n\beta_{n-1}}{2n} + \frac{9\beta_n\alpha_{n+1}}{2(n+2)},$$

$$K_n \equiv \frac{9\alpha_n\alpha_{n-1}}{2n}, \qquad L_n \equiv \frac{(9n+6)\alpha_n}{2n(n+1)},$$

$$I_n \equiv \frac{(9n+12)\beta_n}{2(n+1)(n+2)}, \qquad J_n \equiv \frac{9\beta_n\beta_{n+1}}{2(n+2)},$$

$$\alpha_n \equiv \frac{n(n-1)}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}, \quad \beta_n \equiv \frac{(n+1)(n+2)}{\sqrt{(2n+1)(2n+3)}},$$

$$x = \sqrt{\frac{S}{\nu}}, \quad \varkappa_n \equiv \frac{\rho}{(n+1)} + \frac{1}{n}, \quad \gamma_n \equiv (n-1)[n+2-W],$$

$$F_n(x) = \frac{1}{n}(n-1)(2n+1) + \frac{1}{n}(n-1)^2(n+1)\left[1 - \frac{x}{2}\frac{i_n(x)}{i_{n+1}(x)}\right]^{-1}, \quad (16)$$

$i_n(x)$ — сферические функции Бесселя.

В предельном переходе к невязкой капле рассматриваемая задача переходит в задачу о движении с постоянной скоростью U капли идеальной жидкости в идеальной среде, разобранную в [10], а поскольку при $\nu \to 0$ стремится к нулю и $F_n(x)$ [11], то уравнение (16) сводится к соответствующему уравнению, полученному в [10]. Если взять нулевую плотность внешней среды ($\rho = 0$), исходная задача редуцируется к задаче о капиллярных колебаниях заряженной вязкой капли в вакууме, решенной в [11,12], а уравнение (16) сводится к полученному там уравнению. При $U = 0$ получаем задачу о капиллярных колебаниях заряженной капли в диэлектрической среде, к которой сводится при $\nu_1 = 0$ задача, рассмотренная в [15]. Таким образом, предельные переходы к более простым ситуациям выполняются.

4. Предельный случай капли маловязкой жидкости позволяет аналитически исследовать влияние вязкости на собственные частоты капиллярных колебаний, декременты их затухания и инкременты неустойчивости. В этом случае $x \gg 1$ можно воспользоваться асимптотическим разложением для сферических функций Бесселя при больших значениях аргумента [11]

$$i_n(x)\big|_{x\gg 1} \approx \frac{1}{2x}e^x\left[1 + 0\left(\frac{1}{x}\right)\right],$$

тогда отношение сферических функций Бесселя имеет асимптотику

$$\left.\frac{i_n(x)}{i_{n+1}(x)}\right|_{x\gg 1} \approx 1 + 0\left(\frac{1}{x}\right),$$

а зависимость от вязкости ν и частоты S громоздкого второго слагаемого в фигурных скобках в (16) имеет вид

$$2\nu F_n(x)S \sim 2\nu F_{n0}S - 2\nu\sqrt{\nu s}, \quad F_{n0} = \frac{1}{n}(n-1)(2n+1).$$

Сохраняя в (16) слагаемые не выше первого порядка малости по ν, без учета взаимодействия мод получим дисперсионное уравнение

$$\varkappa_n S^2 + 2\nu F_{n0}S - \rho U^2 M_n + \gamma_n = 0. \quad (17)$$

Решения (17) легко выписываются

$$S = -\nu(n-1)(2n+1)\cdot\left(\frac{n\rho}{(n+1)} + 1\right)^{-1} \pm \sqrt{[n(n-1)[W-(n+2)] + n\rho U^2 M_n]\cdot\left(\frac{n\rho}{(n+1)} + 1\right)^{-1}}.$$

Из данного выражения следует, что a) если

$$W < (n+2) - \frac{1}{(n-1)}\rho U^2 M_n, \quad (18)$$

то величина S определяет собственные частоты колебаний поверхности заряженной капли маловязкой жидкости ω_n, совпадающие с собственными частотами колебаний капли идеальной жидкости; учет же вязкости приводит к появлению пропорционального вязкости декремента затухания β_n собственных колебаний поверхности капли

$$S = -\beta_n \pm i\omega_n \equiv -\nu(n-1)(2n+1)\cdot\left(\frac{n\rho}{(n+1)} + 1\right)^{-1} \pm i\sqrt{[n(n-1)[(n+2)-W] - n\rho U^2 M_n]\cdot\left(\frac{n\rho}{(n+1)} + 1\right)^{-1}};$$

b) если выполняется условие, противоположное (18), то S характеризует инкремент нарастания неустойчивости заряженной капли маловязкой жидкости δ_n, который оказывается несколько меньше (а именно на величину декремента β_n) инкремента неустойчивости заряженной капли идеальной жидкости δ_{n0}, численно равного $|\omega_n|$

$$S = \delta_n = \delta_{n0} - \beta_n \equiv |\omega_n| - \beta_n;$$

c) как и в случае идеальной жидкости [10], знак равенства в (18) определяет положение границы, разделяющей устойчивые и неустойчивые решения и критическую связь между зарядом капли и скоростью ее движения относительно среды.

5. Для того чтобы проанализировать случай сильновязкой жидкости ($x \to 0$), можно воспользоваться асимптотическим разложением для сферических функций Бесселя по малому аргументу [11]

$$\left[\frac{x}{2}\frac{i_n(x)}{i_{n+1}(x)} - 1\right]^{-1} \approx \frac{2}{(2n+1)}\left[1 - \frac{x^2}{(2n+1)(2n+5)} + \frac{x^4}{(2n+1)(2n+5)^2(2n+7)}\dots\right]. \quad (19)$$

Подставляя (19) в уравнение (16), пренебрегая взаимодействием мод и собирая слагаемые с одинаковыми степенями S, получим дисперсионное уравнение в приближении большой вязкости

$$\left[A_n + \frac{n\rho}{(n+1)}\right]S^2 + B_n S\nu - n\rho U^2 M_n + n\gamma_n = 0,$$

$$A_n = \frac{3(4n^3 + 8n^2 + 6n + 3)}{(2n+1)^2(2n+5)},$$

$$B_n = \frac{2(n-1)(2n^2 + 4n + 3)}{(2n+1)}. \quad (20)$$

Решения уравненя (20) имеют вид

$$S = \left[-B_n\nu \pm \sqrt{B_n\nu^2 + 4\left[A_n + \frac{n\rho}{n+1}\right]\times \times[n(n-1)[W-(n+2)] + n\rho U^2 M_n]}\right] \times\left[A_n + \frac{n\rho}{n+1}\right]^{-1}. \quad (21)$$

Проанализируем зависимость этих решений от величины параметра W.

a) Если выполняется условие (18) и все выражение под знаком квадратного корня отрицательно, то выражение для S становится комплексным. Мнимая компонента S определяет частоты собственных колебаний поверхности ω_n, а модуль вещественной компоненты — декременты затухания β_n. Поверхность капли совершает затухающие колебания

$$S = -\beta_n \pm i\omega_n.$$

b) Если условие (18) справедливо, но вязкость ν настолько велика, что выражение под знаком квадратного корня положительно, то оба корня уравнения (21) отрицательны. Их абсолютные величины определяют декременты затухания возмущения формы поверхности капли $\beta_n^{(1)}$ и $\beta_n^{(2)}$. При этом зависимость от времени амплитуды возмущения, описываемого сферической функцией n-го порядка $Y_n(\Theta)$ (см. (15)) будет определяться линейной комбинацией двух экспонент

$$Z_n = C_1 \exp\left(-\beta_n^{(1)} t\right) + C_2 \exp\left(-\beta_n^{(2)} t\right).$$

Очевидно, что при малых значениях времени t $(t \to 0)$ затухание возмущения будет характеризовать меньший декремент $\beta_n^{(1)}$, так как экспонента с бóльшим значением $(\beta_n^{(2)})$ исчезает раньше.

Условие обращения в нуль подкоренного выражения в (21) разделяет периодические и апериодические, затухающие со временем решения

$$\left[n(n-1)[n+2-W] - n\rho U^2 M_n\right] \nu_{kp}^{-2} = \frac{B_n}{4}\left[A_n + \frac{n\rho}{n+1}\right]^{-1}. \qquad (22)$$

Уравнение (22) определяет точки бифуркации, т. е. такие значения вязкости ν_{kp} (для заданного заряда капли Q и номера моды колебаний n), при которых частота колебания ω_n обращается в нуль, и вместо одного декремента затухания β_n появляются два: $\beta_n^{(1)}$ и $\beta_n^{(2)}$. Численные расчеты, произведенные при $W = 0$, $\rho = 0$, $U = 0$, дают следующие результаты критических значений безразмерной вязкости, при которой исчезают капиллярные колебания: $\nu \approx 2.1$ (для $n = 2$), $\nu \approx 2.66$ (для $n = 3$), $\nu \approx 3.15$ (для $n = 4$), $\nu \approx 3.57$ (для $n = 5$), $\nu \approx 3.96$ (для $n = 6$), $\nu \approx 4.31$ (для $n = 7$). Из (22) видно, что рост параметра Рэлея W и скорости среды U снижают критическое значение безразмерной вязкости ν. При малых значениях скорости $(U \le 1)$ увеличение относительной плотности среды приводит к увеличению критического значения безразмерной вязкости ν, при больших значениях скорости — к снижению.

c) Если выполняется условие, противоположное (18), но корни уравнения (21) вещественны и противоположны по знаку, то поверхность капли неустойчива, так как появляются экспоненциально растущие со временем решения. Величина положительного корня определяет инкремент нарастания неустойчивости δ_n, который существенно зависит от вязкости,

$$\delta_n = \left[\sqrt{\begin{matrix} B_n\nu^2 + 4\left[A_n + \frac{n\rho}{n+1}\right] \times \\ \times [n(n-1)[W-(n+2)] + n\rho U^2 M_n] \end{matrix}} - B_b\nu\right] \times \left[A_n + \frac{n\rho}{n+1}\right]^{-1}.$$

Таким образом, как и в предельных случаях идеальной и маловязкой жидкости, для сильновязкой жидкости знак равенства в (18) определяет положение границы между устойчивыми и неустойчивыми решениями и критическую связь между зарядом капли и скоростью ее движения относительно среды.

6. Вернемся к исследованию общего случая произвольной вязкости. Необходимым и достаточным условием существования нетривиальных решений однородной системы (16) является равенство нуля определителя, составленного из коэффициентов при искомых амплитудах Z_n,

$$\begin{vmatrix} \chi_2 & \rho USI_2 & \rho U^2 J_2 & 0 & \dots \\ -\rho USL_3 & \chi_3 & \rho USI_3 & \rho U^2 J_3 & \dots \\ \rho U^2 K_4 & -\rho USL_4 & \chi_4 & \rho USI_4 & \dots \\ 0 & \rho U^2 K_5 & -\rho USL_5 & \chi_5 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0,$$

$$\chi_j = \varkappa_j S^2 + 2\nu F_j - \rho U^2 M_j + \gamma_j;$$

$$j = 2, 3, 4, 5, \dots . \qquad (23)$$

Это соотношение является дисперсионным уравнением, определяющим спектр капиллярных колебаний капли в зависимости от безразмерных физических параметров W, U, ρ и ν. Варьирование этих величин изменяет спектр капиллярных колебаний: при определенных значениях W, U и ρ некоторые из решений S_n^2 обращаются в нуль, а при дальнейшем изменении параметров становятся положительными. При этом амплитуды соответствующих капиллярных колебаний будут экспоненциально расти со временем, т. е. капля станет неустойчивой и распадется [3]. Условием появления нулевых решений дисперсионного уравнения является обращение в нуль свободного коэффициента уравнения (23). Это условие определяет критическую для реализации неустойчивость капли связь между ее зарядом и скоростью, и его несложно записать, положив в уравнении (23) $S = 0$. Численный расчет по получающемуся соотношению показывает, что искомая критическая связь между W и U слабо отличается от аналитической, получаемой в пренебрежении взаимодействием мод,

$$W_n = (n+2) - (n-1)^{-1}\rho U M_n^2. \qquad (24)$$

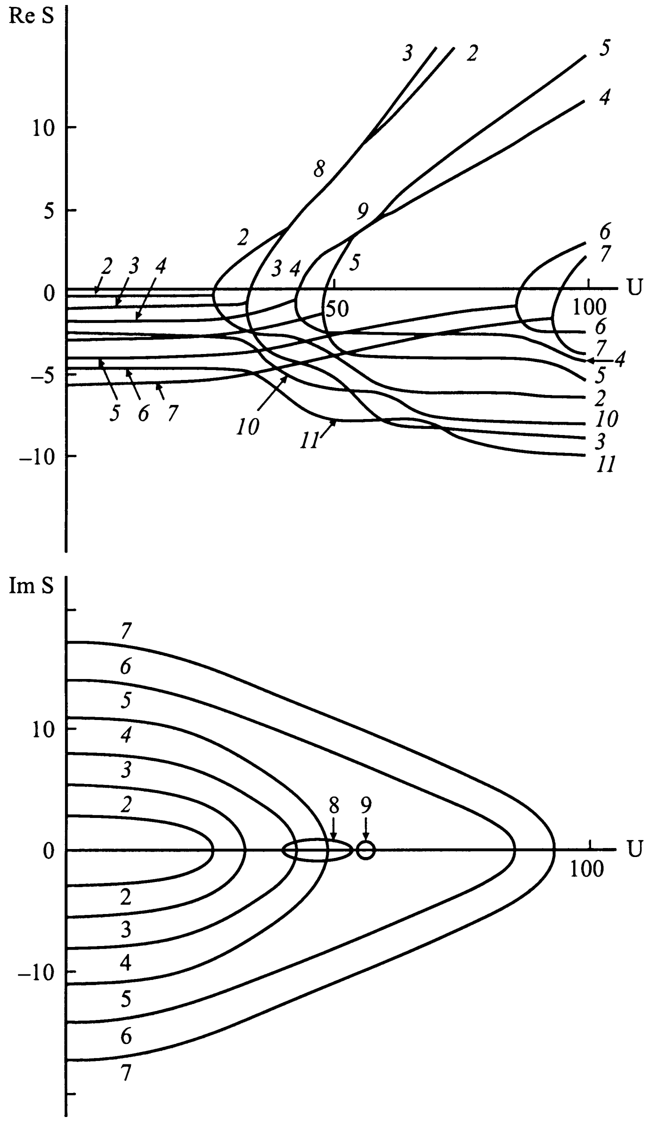

Рис. 1. Зависимость вещественной $\mathrm{Re}\,S(U)$ и мнимой $\mathrm{Im}\,S(U)$ компонент безразмерной частоты S капиллярных колебаний капли от безразмерной скорости U обтекающего потока при $\rho = 10^{-3}$, $\nu = 0.1$ и $W = 0$.

Быстрое снижение критического для реализации неустойчивости капли по отношению к собственному заряду значения параметра W с увеличением ρU^2 дает основание для реанимирования физической модели инициирования разряда молнии, разрабатывавшейся в [4–6]. Изложенные там представления основаны на идее зажигания коронного разряда в окрестности крупной тающей градины, свободно падающей в грозовом облаке. Полученные выше результаты позволяют произвести корректные численные оценки и согласовать модель инициирования разряда с реалиями грозового облака (по измеряемым величинам зарядов, скорости падения капель и напряженности внутриоблачного электрического поля).

Численные расчеты методом последовательных приближений по дисперсионному уравнению (23) показывают, что качественный ход зависимости частоты капиллярных колебаний капли от скорости набегающего потока $S = S(U)$ для различных мод при $W = 0$, $\nu = 0.1$ одинаков и при $\rho = 10^{-3}$ для первых шести мод проиллюстрирован рис. 1. Номера кривых *2–7* соответствуют номерам мод. Ветви *1* нет, так как соответствующая мода отвечает за трансляционное перемещение капли [9]. Обращает на себя внимание эффект попарного взаимодействия мод, второй с третьей и четвертой с пятой, приводящий к появлению колебательных решений *8* и *9* соответственно. Части кривых $\mathrm{Re}\,S = \mathrm{Re}\,S(U)$, лежащие в области $\mathrm{Re}\,S > 0$, определяют инкременты неустойчивости соответствующих мод капиллярных колебаний капли. Таким образом, в определенном диапазоне скоростей неустойчивость капли является колебательной

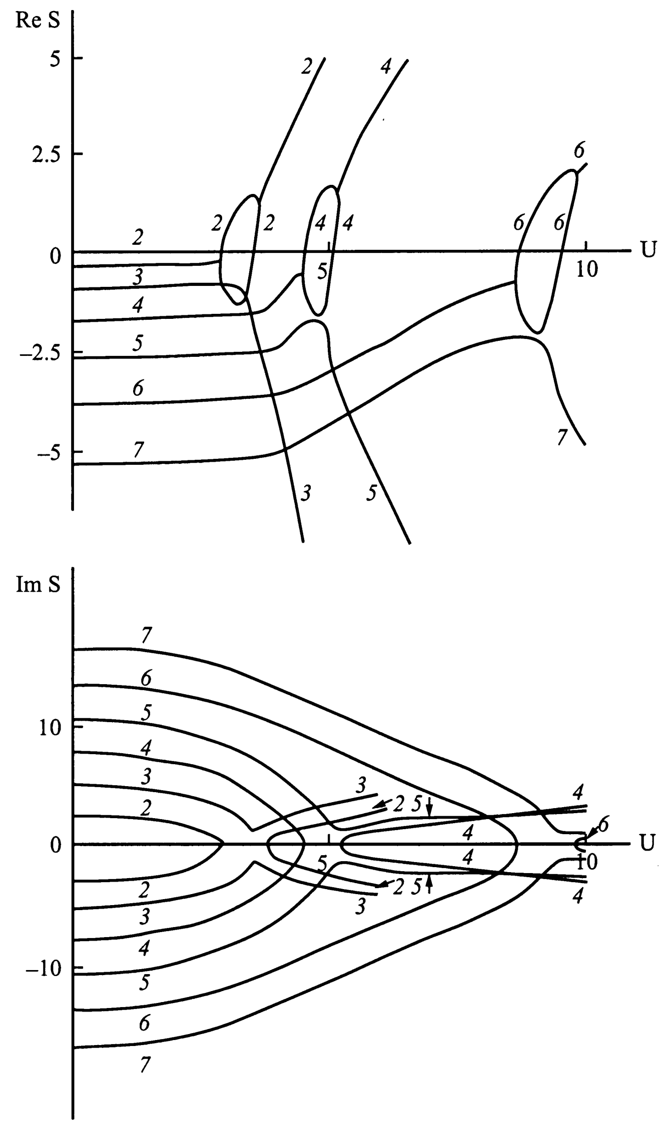

Рис. 2. То же, что на рис. 1, при $\rho = 0.1$. Ветви полоидальных движений не приведены.

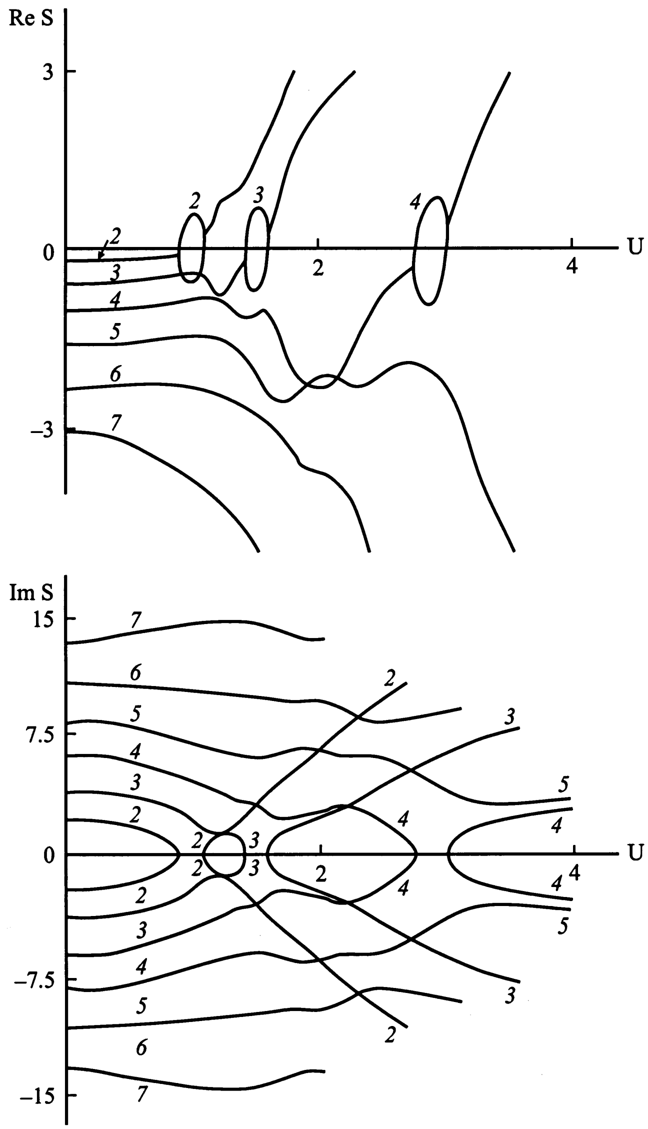

Рис. 3. То же, что на рис. 1, при $\rho = 1$.

неустойчивости высоких мод с увеличением скорости обдувающего потока растут с повышением номера моды. Собственно говоря, при анализе классической неустойчивости Кельвина–Гельмгольца на плоской свободной поверхности жидкости также отмечается рост волнового числа наиболее неустойчивой волны при увеличении скорости сдвигового потока [9,16].

Указанное различие в величинах инкрементов второй и третьей мод феноменологически должно проявляться в закономерностях распада неустойчивой капли. Так, если при заданных значениях плотности капли, среды и скорости обдувающего потока (скорости падения капли в неподвижной среде) максимальный инкремент неустойчивости имеет вторая (основная) мода, то неустойчивая капля приобретает форму, близкую к сфероиду (ветви *8, 9*), что характерно для неустойчивости типа Кельвина–Гельмгольца [9,10,16]. Кривые *10, 11* соответствуют апериодическим вихревым полоидальным движениям жидкости, которые не влияют на устойчивость капли. Детальнее о вихревых полоидальных движениях жидкости в заряженной капле изложено в [13,15].

Интересно, что правее диапазона скоростей, в котором реализуется взаимодействие второй и третьей мод, инкремент апериодической неустойчивости третьей моды превышает инкремент апериодической неустойчивости второй моды. Аналогичная картина наблюдается и для четвертой и пятой мод. Это обстоятельство можно прокомментировать, исходя из уравнений (16), в пренебрежении взаимодействием мод. Легко видеть, что производная от S_n^2 по ρU^2, определяющая скорость роста S_n с изменением U, пропорциональна $n \cdot M_n \sim n^3$. Т.е. и в отсутствие взаимодействия мод инкременты

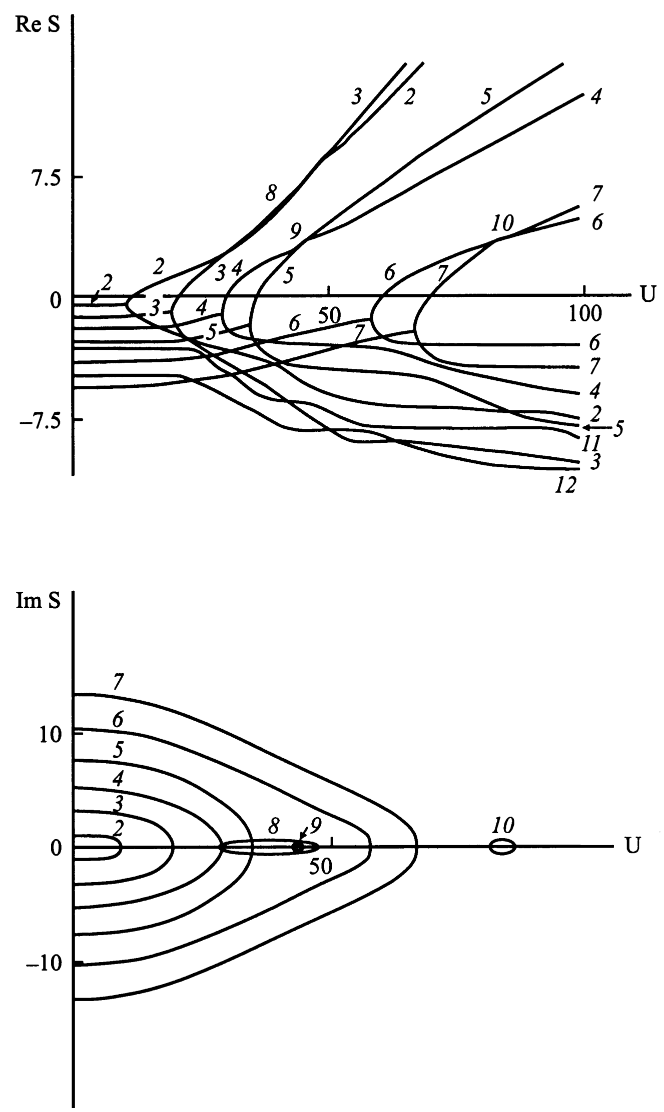

Рис. 4. То же, что на рис. 1, при докритическом по Рэлею заряде капли $W = 3.5$. Номера ветвей *2–7* совпадают с номерами мод. Ветвь *10* является результатом взаимодействия мод 6 и 7. Ветви *11, 12* соответствуют вихревым полоидальным движениям жидкости.

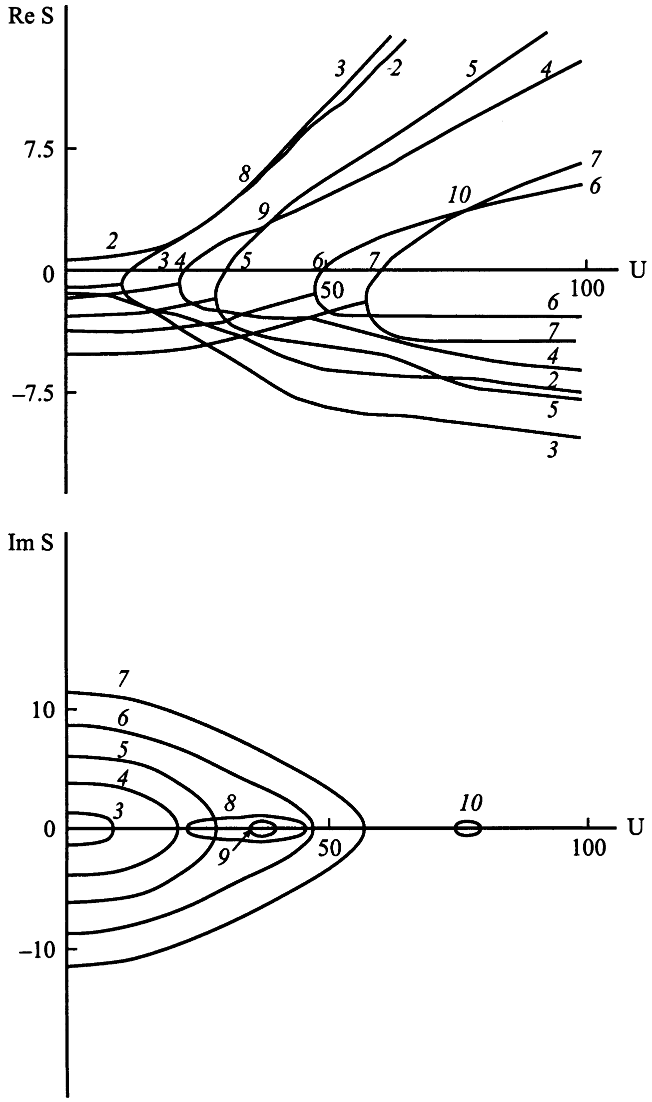

Рис. 5. То же, что на рис. 4, при закритическом по Рэлею заряде капли $W = 4.5$. Ветви полоидальных движений не приведены.

вращения (определяемую вторым полиномом Лежандра $P_2(\cos\Theta)$), а затем распадается согласно закономерностям, описанным в [8,17]. Если максимальный инкремент неустойчивости имеет третья мода, то неустойчивая капля приобретает парашютообразную форму (определяемую третьим полиномом Лежандра $P_3(\cos\Theta)$) и распадается на множество мелких и несколько крупных фрагментов [7]. Отмечается в экспериментах и колебательная неустойчивость свободно падающей капли [7].

Численные расчеты показывают, что с ростом плотности среды не только снижается критическое значение безразмерной скорости U, необходимое для реализации неустойчивости n-й моды, но и несколько меняется спектр движений жидкости. Колебательная неустойчивость, реализующаяся в результате взаимодействия второй и третьей мод, проявляется во всем диапазоне $U > 12$. Имеет место не только расширение области неустойчивости типа Кельвина–Гельмгольца, но и рост частот, соответствующих данным решениям. В остальном качественные зависимости хода кривых $S = S(U)$ сходны с приведенными на рис. 1.

Зависимости $S = S(U)$, представленные на рис. 2 и 3, рассчитаны при $\rho = 0.1$ (рис. 2) и 1 (рис. 3). Видно, что неустойчивость претерпевают только четные моды. Декременты затухания нечетных мод капиллярных движений в области, где должна осуществляться неустойчивость данных мод, быстро растут с увеличением скорости обтекающего потока.

Критические скорости, при которых реализуется неустойчивость различных мод капиллярных колебаний капли по отношению к тангенциальному скачку поля скоростей на ее поверхности, а также спектр колебаний, претерпевающих неустойчивость, зависят от отношения

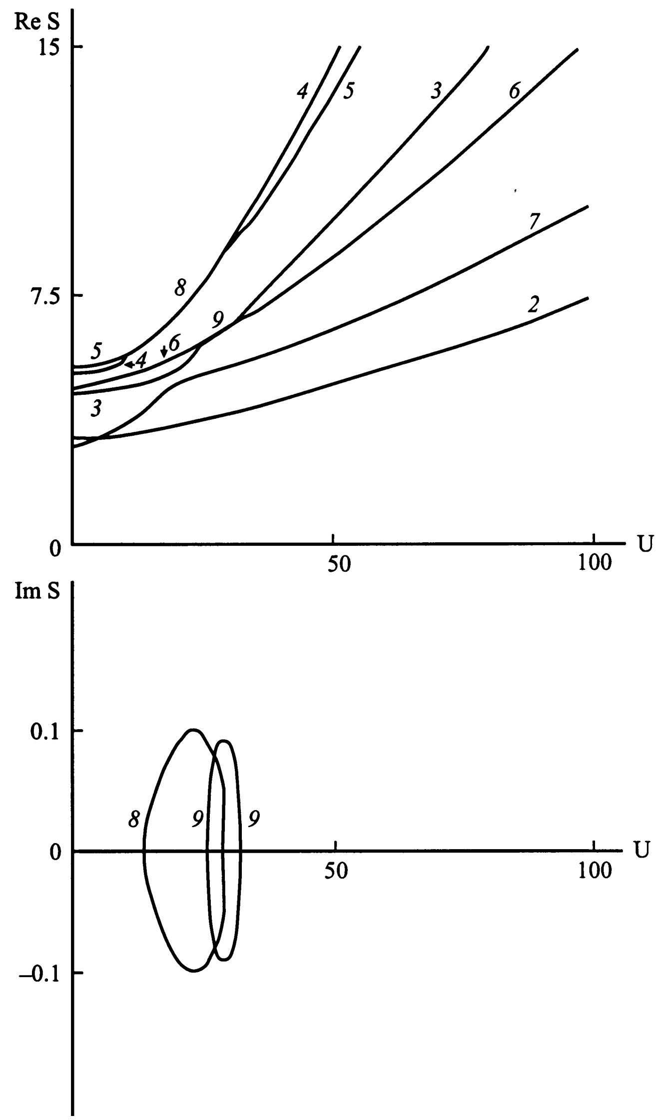

Рис. 6. То же, что на рис. 4, при существенно закритическом по Рэлею заряде капли $W = 10$. Ветви полоидальных движений не приведены.

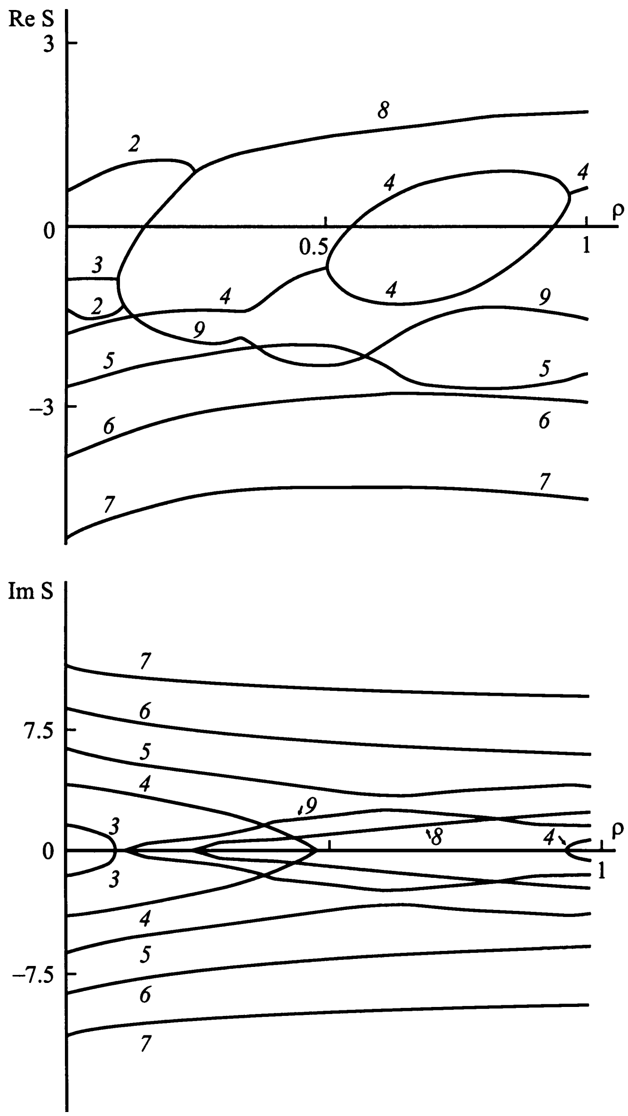

Рис. 7. Зависимость вещественной $\operatorname{Re} S(\rho)$ и мнимой $\operatorname{Im} S(\rho)$ компонент частоты S капиллярных колебаний капли от отношения плотностей среды и капли при $\nu = 0.1$, $U = 1$ и $W = 4.5$. Номера кривых *2–7* совпадают с номерами соответствующих мод, ветви *8, 9* — движения, образовавшиеся при взаимодействии мод.

плотностей сред. Так, из рис. 2 и 3 видно, что при $\rho = 10^{-1}$ неустойчивость испытывают только четные моды, а при $\rho = 1$ и меньших значениях скоростей — и четные, и нечетные. Амплитуды всех неустойчивых мод по мере увеличения скорости среды сначала растут апериодически, а при более высоких скоростях неустойчивость становится колебательной. Для апериодически неустойчивых ветвей на рис. 2 и 3 характерна неоднозначность.

При наличии на капле заряда, докритичного в смысле устойчивости по Рэлею (рис. 4), основные тенденции зависимости $S = S(U)$ совпадают с описанными выше. Влияние заряда приводит лишь к уменьшению критических значений скорости, при которых капля становится неустойчивой, что согласуется с аналитической зависимостью (24).

Рис. 5 иллюстрирует ситуацию, когда собственный заряд слабо закритичен по отношению к рэлеевскому распаду: $W = 4.5$ (капля становится неустойчивой при $W = 4$ [3]). Приведенная зависимость $S = S(U)$ похожа на представленную на рис. 4, но по сравнению с рис. 4 еще больше снижается критическое значение скорости, при котором капля претерпевает неустойчивость Кельвина–Гельмгольца, а вторая мода неустойчива изначально.

На рис. 6 представлена зависимость $S = S(U)$ для сильно закритичного заряда $W = 10$. Отличием данной ситуации от рассмотренных выше является то, что инкремент основной моды имеет минимальную величину по сравнению с инкрементами неустойчивости более высоких мод, неустойчивость которых колебательная или апериодическая (в зависимости от скорости U), и определяет распад капли. Интересно, что проявляется взаимодействие несоседних мод — третьей и шестой, приводящее к образованию колебательно-неустойчивой ветви.

Согласно численным расчетам, с ростом ρ декременты и частоты капиллярных движений жидкости уменьшаются незначительно. На рис. 7 приведены зависимости вещественной и мнимой компонент частоты от отношения плотностей среды и капли для закритического значения заряда капли $W = 4.5$. Ветви *8* и *9* представляют движения, образовавшиеся при взаимодействии мод. Ветвь *8* соответствует колебательно-неустойчивому движению, ветвь *9* — колебательно-затухающему.

Заключение

Заряженная капля в обтекающем ее потоке способна претерпевать неустойчивость, сопровождающуюся эмиссией сильно заряженных капель, при меньшей, чем в случае неподвижной внешней среды, величине собственного заряда. Это происходит в результате суперпозиции двух типов неустойчивости: неустойчивости свободной поверхности капли по отношению к тангенциальному скачку поля скоростей и неустойчивости по отношению к собственному заряду. В зависимости от отношения плотностей капли и среды, величины ее заряда и скорости обдувающего потока капля может претерпевать как апериодическую, так и колебательную неустойчивости. Апериодическая неустойчивость реализуется при малых скоростях обдувающего потока путем деформации к вытянутому сфероиду и распаду капли за счет сил электростатического отталкивания, либо по рэлеевскому механизму [8], либо путем распада на несколько фрагментов сравнимых размеров [17]. При больших скоростях обдувающего потока апериодическая неустойчивость реализуется путем деформации капли к парашютообразной форме (вследствие возбуждения неустойчивости нечетных мод) и распаду за счет аэродинамических сил на множество мелких и несколько крупных капель. Результаты проведенного анализа качественно согласуются с данными наблюдений и экспериментов [7].

Список литературы

[1] Монодиспергирование вещества. Принципы и применение / Под ред. В.А. Григорьева. М.: Энергоатомиздат, 1991. 332 с.

[2] *Шевченко С.И., Григорьев А.И., Ширяева С.О.* // Научное приборостроение. 1991. Т. 1. № 4. С. 3–21.

[3] *Григорьев А.И., Ширяева С.О.* // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 3. С. 3–22.

[4] *Мучник В.М., Рудько Ю.С.* // Труды УкрНИГМИ. Вып. 103. 1971. С. 96–101.

[5] *Дячук В.А., Мучник В.М.* // ДАН СССР. 1979. Т. 248. № 1. С. 60–63.

[6] *Grigor'ev A.I., Shiryaeva S.O.* // Phys. Scripta. 1996. Vol. 54. P. 660–666.

[7] *Гонор А.Л., Ривкинд В.Я.* // Итоги науки и техники. Сер. Механика жидкости и газа. Т. 17. М.: Изд-во ВИНИТИ, 1982. С. 98–159.

[8] *Григорьев А.И., Ширяева С.О.* // ЖТФ. 1991. Т. 61. Вып. 3. С. 19–28.

[9] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 733 с.

[10] *Григорьев А.И., Коромыслов В.А., Ширяева С.О.* // ЖТФ. 1999. Т. 69. Вып. 5. С. 7–14.

[11] *Ширяева С.О., Лазарянц А.Э.* и др. Метод скаляризации векторных краевых задач // Препринт ИМРАН. Ярославль, 1994. № 27. 128 с.

[12] *Григорьев А.И., Лазарянц А.Э.* // ЖВММФ. 1992. Т. 32. № 6. С. 929–938.

[13] *Ширяева С.О., Муничев М.И., Григорьев А.И.* // ЖТФ. 1996. Т 66. Вып. 7. С. 1–8.

[14] *Григорьев А.И., Ширяева С.О.* // Изв. РАН. МЖГ. 1997. № 5. С. 107–118.

[15] *Григорьев А.И., Ширяева С.О., Коромыслов В.А.* // ЖТФ. 1998. Т. 68. Вып. 9. С. 1–8.

[16] *Григорьев В.А., Ширяева С.О.* // ЖТФ. 1996. Т. 66. Вып. 2. С. 23–34.

[17] *Коромыслов В.А., Григорьев А.И., Ширяева С.О.* // ЖТФ. 1998. Т. 68. Вып. 8. С. 31–38.