

01;10

Дисперсионное уширение эмиттанса пучка в линейных ускорителях электронов на высокие энергии

© В.М. Цаканов

Ереванский физический институт,
375036 Ереван, Армения
E-mail: tsakanov@jerewan 1.yerphi.am

(Поступило в Редакцию 12 февраля 1999 г.)

Иследуется дисперсионное уширение эмиттанса электронного пучка в линейном ускорителе, вызванное начальным некоррелированным энергетическим разбросом частиц в сгустке. Исследование проведено как для случая когерентных колебаний пучка, так и возмущенной центральной траектории и ее локальной коррекции. Особое внимание уделено аналитическому описанию процесса дисперсионного уширения эмиттанса пучка. Найдены точные аналитические выражения для эволюции эмиттанса пучка вдоль ускорителя, подкрепленные численным моделированием трассировки частиц в основном линейном ускорителе будущего электрон-позитронного столкновителя.

Введение

Достижение предельно малых поперечных эмиттансов электронного (позитронного) пучка в будущем линейном электрон-позитронном столкновителе является одной из ключевых проблем для достижения высокой светимости в месте столкновения встречных пучков [1–3]. В основном линейном ускорителе столкновителя, где частицы ускоряются от нескольких GeV до энергий в несколько сот GeV, в идеале естественный эмиттанс пучка предельно сжимается за счет адиабатического затухания поперечных колебаний частиц. Однако в реальной машине траектории частиц возмущены как из-за допусков на элементы электронно-оптической системы ускорителя, так из-за воздействия поперечных кильватерных полей, возбуждаемых в ускоряющих секциях [4,5]. Вдобавок сгусток электронов имеет энергетический разброс, как коррелированный с продольной координатой частицы за счет взаимодействия с ускоряющей структурой, так и некоррелированный за счет предварительного формирования пучка. Метод Балакина–Новохатского–Смирнова [6] позволяет подавить увеличение эмиттанса, вызванное коррелированным энергетическим разбросом и воздействием поперечных кильватерных полей в пределах отдельного сгустка, соблюдением так называемых условий "автофазировки" частиц [7,8]. Тем не менее начальный некоррелированный разброс частиц по энергиям в сгустке остается нежелательным фактором, приводящим к дисперсионному уширению эмиттанса пучка, являющимся серьезным препятствием на пути получения высокоэнергетических пучков с предельно малыми горизонтальными и вертикальными эмиттансами.

Увеличение эмиттанса пучка с начальным энергетическим разбросом вызвано как когерентными бетатронными колебаниями пучка с ненулевыми начальными амплитудами (отклонение, угол) центра тяжести пучка, так и возмущением центральной траектории пучка из-за неточности установок квадрупольных линз. Частицы

пучка с разной энергией, проходя через фокусирующую систему ускорителя, получают разный набег фазы бетатронных колебаний и, как следствие, при ненулевой центральной траектории разделяются на фазовой плоскости, приведя к дисперсионному уширению эмиттанса пучка. Теорема Лиувилля здесь уже неприменима, и эмиттанс пучка определяется статистически как среднеквадратичный разброс частиц на фазовой плоскости поперечных колебаний.

Различные аспекты дисперсионного уширения эмиттанса пучка рассмотрены в ряде работ [9–17] как с точки зрения аналитического описания, так и численного моделирования трассировки частиц в линейном ускорителе. Хотя физическая картина дисперсионного уширения эмиттанса пучка в линейных ускорителях достаточно прозрачна (см., например, [9,13,15]), тем не менее в литературе отсутствует единый подход к проблеме, позволяющий точно аналитически описать уширение эмиттанса пучка при наличии начального разброса частиц по энергиям. Остановимся на двух существенных моментах.

Двухчастичная модель сгустка явно непригодна для аналитического описания дисперсионного уширения эмиттанса пучка при высокой степени расщепления частиц, поскольку при относительном набеге фазы бетатронных колебаний неравновесной частицы, равной 2π (один оборот неравновесной частицы вокруг фазового эллипса по отношению к равновесной частице), среднеквадратичный эмиттанс зануляется. В реальности распределение частиц по энергиям в сгустке приводит к тому, что по мере расщепления частиц весь фазовый эллипс поперечных бетатронных колебаний центра тяжести пучка оказывается заполненным частицами с неравновесными энергиями и при аналитическом описании дисперсионного уширения эмиттанса необходимо основываться на реальном распределении частиц по энергиям.

Второе замечание относится к численному моделированию эффектов уширения эмиттанса пучка при возмущении центральной траектории и ее коррекции. Дело в

том, что неточность установок линз при треке частиц можно учесть только заданием отклонений квадрупольных линз относительно оси ускорителя в виде случайного набора некоррелированных смещений со среднеквадратичным значением точности юстировки. Однако возмущенная центральная траектория пучка для двух разных наборов может различаться на порядки [18,19] и необходимо проводить усреднение эффектов уширения эммитанса пучка по большому числу наборов отклонений элементов фокусирующей системы от нулевой траектории. Как показано в работе [20], введением среднеквадратичной площади возмущенного машинного фазового эллипса удается точно аналитически описать среднеквадратичное возмущение центральной траектории вдоль ускорителя, к которому сходятся результаты трека частиц при усреднении по большому числу наборов отклонений линз от оси. Фактически при аналитическом описании процесса удается точно проводить усреднение среднеквадратичных параметров пучка по всем возможным траекториям частиц сгустка.

В настоящей работе исследуется дисперсионное уширение эммитанса пучка в линейных ускорителях, вызванное некоррелированным начальным энергетическим разбросом частиц в сгустке. Рассматриваются случаи, когда пучок совершает когерентные бетатронные колебания и центральная траектория пучка возмущена из-за неточности установок квадрупольных линз. Наконец, мы остановимся на случае, когда центральная траектория корректируется в каждой квадрупольной линзе дипольным корректором на основе измерений центра тяжести пучка. Приведены результаты исследования для ФОДО (Ф — фокусирующая линза, Д — дефокусирующая линза, О — свободный промежуток) ячейки периодичности при различных законах вариации набега фазы бетатронных колебаний с энергией частиц вдоль ускорителя [8,21]. Полученные аналитические выражения для среднеквадратичного эммитанса пучка сравниваются с результатами трассировки частиц в основном ускорителе проектов теплового линейного столкновителя SBLC с частотой ускоряющего поля 3 GHz и сверхпроводящего линейного столкновителя TESLA с частотой ускоряющего поля 1.3 GHz [22].

Уравнение движения и дисперсия фазы бетатронных колебаний

Как обычно, будем предполагать, что ускоритель состоит из большого числа ФОДО периодов фокусирующей системы с двумя ускоряющими секциями в одном периоде. Частицы в сгустке испытывают одинаковое ускорение с постоянным градиентом γ' , так что равновесная энергия частиц γ меняется вдоль ускорителя линейно $\gamma(z) = \gamma_0 + \gamma'z$, где γ_0 , $\gamma(z)$ — начальный и текущий лоренц-факторы равновесной частицы, z — координата частицы вдоль ускорителя. Фокусирующую систему ускорителя мы зададим таким образом, что набег фазы бета-

тронных колебаний на ячейку периодичности меняется с энергией как [8]

$$\text{tg} \frac{\mu_n}{2} = \frac{1}{4} K_n L_q (\beta_{n \max} - \beta_{n \min}) = \text{tg} \frac{\mu_1}{2} g_n^\alpha, \quad (1)$$

где μ_n — набег фазы бетатронных колебаний в n -й ячейке; $g_n = \gamma_0/\gamma_n$; $\gamma_n = \gamma_0 + (n-1) \cdot \Delta\gamma$ — энергия при влете в n -ю ячейку; $\Delta\gamma$ — прирост энергии частиц на один период ФОДО ячейки; $K_n = ec(\partial B/\partial x)/E$ — нормализованная сила квадрупольных линз, e — заряд электрона, c — скорость света, $\partial B/\partial x$ — градиент магнитного поля линзы, E — текущая энергия равновесной частицы; L_q — длина квадрупольных линз.

Заметим, что вышеприведенная формула есть не что иное, как хроматичность ячейки периодичности, определяющая относительное смещение набега фазы бетатронных колебаний неравновесной частицы за период. Параметр α определяет закон изменения фазы бетатронных колебаний по мере ускорения частиц. Таким образом, набег фазы бетатронных колебаний на первый период μ_1 и параметр α определяют однозначно всю фокусирующую систему ускорителя и линейную оптику электронного пучка в приближении отсутствия связи горизонтальных и вертикальных колебаний. Заметим, что такой подход охватывает все возможные траектории пучка и, как будет видно далее, эффекты дисперсионного уширения эммитанса пучка во многом обусловлены выбором набега фазы в начале ускорителя и его изменением вдоль ускорителя. Как показано в [8], важным следствием такого задания фокусирующей системы линейного ускорителя является выполнение условий автофазировки частиц при модуляции набега фазы бетатронных колебаний с энергией частиц по закону $\alpha = 0.5$.

Линеаризованное уравнение поперечного движения в линейном ускорителе неравновесной частицы с начальным некоррелированным относительным энергетическим разбросом $\delta_0 = \Delta E/E_0$ ($\delta_0 \ll 1$) с начальными амплитудами $x_0 = x(0, \delta_0)$, $x'_0 = x'(0, \delta_0)$ и при наличии смещения квадрупольных линз от оси имеет вид

$$x'' + \frac{\gamma'}{\gamma} + K_x(1 - \delta)(x - x_q) = 0, \quad (2)$$

где x — поперечное смещение частицы (горизонтальное или вертикальное), $\delta(z) = \delta_0 \gamma_0/\gamma(z)$ — изменение некоррелированного относительного отклонения энергии частицы по мере ускорения пучка, K_x — сила квадрупольных линз, $x_q(z) = x_{qk}$ — случайные смещения линз от оси ускорителя, производная взята по координате z вдоль ускорителя.

Общее решение уравнения движения представляется в виде суммы свободных бетатронных колебаний x_b и возмущенной траектории x_d как

$$x(z, \delta) = x_b(z, \delta) + x_d(z, \delta). \quad (3)$$

Явный вид этих решений можно найти, воспользовавшись формализмом матрицы Твиса [23–25],

$$x_b(z, \delta) = a_b \left(\frac{\gamma_0}{\gamma(z)} \bar{\beta}(z) \right)^{1/2} \cos[\bar{\mu}(z) + \vartheta_b], \quad (4)$$

$$x_d(z, \delta) = \int_0^z M_{12}^\delta(z', z) K_x(z') dz', \quad (5)$$

где элемент M_{12}^δ матрицы Твиса для неравновесной частицы имеет вид

$$M_{12}^\delta(z', z) = \sqrt{\bar{\beta}(z') \bar{\beta}(z)} \left(\frac{\gamma(z')}{\gamma(z)} \right)^{1/2} \times \sin[\bar{\mu}(z) - \bar{\mu}(z')]. \quad (6)$$

Здесь $\bar{\beta} = \beta + \Delta\beta$ и $\bar{\mu} = \mu + \Delta\mu$ есть амплитудная бета-функция и фаза бетатронных колебаний неравновесной частицы; $\Delta\beta$, $\Delta\mu$ — изменение ее бета-функции и фазы колебаний относительно их равновесных значений β и μ ; a_b , ϑ_b определяют начальные поперечные амплитуды частицы (отклонение, угол) при влете в ускоритель. Можно показать, что величины $\Delta\beta$ и $\Delta\mu$ выражаются через параметры фокусирующей системы ускорителя следующим образом [23,24]:

$$\Delta\beta(z) = \int_0^z \delta(z') \beta(z') K_x(z') \sin[2\mu(z) - 2\mu(z')] dz', \quad (7)$$

$$\Delta\mu(z) = - \int_0^z \delta(z') \beta(z') K_x(z') \sin^2[\mu(z) - \mu(z')] dz'. \quad (8)$$

Таким образом, если средним изменением амплитудной функции в линейных ускорителях можно пренебречь в отличие от циклических ускорителей [24], увеличение в среднем набеге фазы бетатронных колебаний неравновесной частицы приводит к расщеплению пучка на фазовой плоскости и, как следствие, к увеличению среднеквадратичного эмиттанса пучка. Текущий эмиттанс пучка ε определяется статистически как среднеквадратичный разброс частиц на фазовой плоскости поперечных колебаний [26]

$$\varepsilon = \sqrt{\langle \Delta x^2 \rangle \langle \Delta x'^2 \rangle - \langle \Delta x \Delta x' \rangle^2}, \quad (9)$$

где $\Delta x = x - \bar{x}$; $\Delta x' = x' - \bar{x}'$; \bar{x} , \bar{x}' есть координата и угол центра тяжести пучка.

Усреднение осуществляется по всем частицам сгустка. Нас в дальнейшем будет интересовать среднее (по текущей фазе бетатронных колебаний) поведение эмиттанса пучка вдоль ускорителя. Тогда в предположении отсутствия дисперсии бетатронной функции эмиттанс пучка будет определяться как $\varepsilon = \langle \Delta x^2 \rangle / \beta$.

Некоррелированный энергетический разброс частиц в сгустке имеется на стадии инжекции сгустка в основной

линейный ускоритель и вызван, как обычно, предыдущим формированием электронного пучка (накопительное кольцо, компрессор сгустка). В предположении, что частицы в заданном сечении сгустка испытывают одинаковое ускорение, некоррелированный энергетический разброс частиц в сгустке спадает обратно пропорционально энергии равновесной частицы. Тогда среднее смещение набеге фазы неравновесной частицы с относительным начальным энергетическим отклонением δ_0 в приближении тонких линз представляется в виде суммы по ячейкам периодичности как

$$\Delta\mu = -\frac{1}{2} \delta_0 \sum_n g_n K_n L_{qn} (\beta_{n \max} - \beta_{n \min}). \quad (10)$$

В нашем задании фокусирующей системы формула переписывается в виде

$$\Delta\mu = -2\delta_0 \operatorname{tg} \frac{\mu_1}{2} \frac{1}{\Delta\gamma} \sum_n g_n^{\alpha+1} \Delta\gamma, \quad (11)$$

что есть просто интеграл по энергии при сравнительно медленном изменении энергии вдоль ускорителя ($\Delta\gamma/\gamma \ll 1$) и выражается через параметры ускорителя как

$$\Delta\mu = -2\delta_0 \operatorname{tg} \frac{\mu_1}{2} \frac{\gamma_0}{\Delta\gamma} \frac{1}{\alpha} (1 - g^\alpha). \quad (12)$$

Важной характеристикой машины является ее хроматичность ξ , физически обоснованным определением которой в случае линейных ускорителей на высокие энергии является смещение числа бетатронных колебаний неравновесной частицы со среднеквадратичным относительным отклонением энергии σ_ε от равновесной энергии при однократном пролете сгустка в ускорителе $\xi = \Delta\mu_s / 2\pi$. Величина хроматичности в линейных ускорителях фактически определяет степень расщепления пучка на фазовой плоскости поперечных бетатронных колебаний. Как видно, степень расщепления пучка линейного ускорителя определяется начальным среднеквадратичным энергетическим разбросом в пучке, приростом энергии на ячейку периодичности, набегом фазы

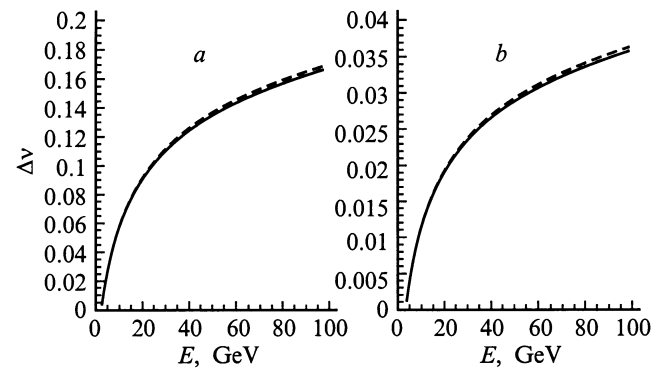


Рис. 1. Зависимость хроматичности пучка от энергии ускоренных частиц в основном ускорителе столкновений. *a* — SBLC, $\delta_0 = 0.01$; *b* — ТЕСЛИА, $\delta_0 = 0.014$.

бетатронных колебаний на первую ячейку и законом изменения набега фазы вдоль ускорителя.

На рис. 1 приведены величины нарастания хроматичности вдоль основного линейного ускорителя проектов теплового (SBLC) и сверхпроводящего (ТЕСЛА) столкновителей с постоянными набегами фазы бетатронных колебаний на период ($\alpha = 0$), равными $\pi/2$ и $\pi/3$ соответственно [22]. Отметим, что малый набег фазы бетатронных колебаний на период фокусирующей структуры и сравнительно высокий прирост энергии частиц на период (~ 900 MeV) в проекте ТЕСЛА являются определяющими факторами малой хроматичности машины. Это, как будет видно далее, является существенным преимуществом с точки зрения сохранения естественного эммитанса пучка в основном линейном ускорителе.

Когерентные колебания пучка

Для начала рассмотрим динамику частиц в сгустке с некоррелированным начальным гауссовским энергетическим распределением влетающих в линейный ускоритель с начальными поперечными амплитудами (x_0, x'_0) когерентных бетатронных колебаний. Фокусирующие элементы ускорителя предполагаются идеально установленными по отношению к оси ускорителя. Пренебрегая дисперсией амплитуды, бетатронные колебания частицы сгустка с малым начальным относительным отклонением энергии δ_0 от равновесной (член x_b в (3)) можно представить в виде

$$x(z, \delta) = x_c(z, \delta) + x_\beta(x, \delta), \quad (13)$$

где

$$x_{c,\beta}(z, \delta) = a_{0,\beta} \left(\beta(z) \frac{\gamma_0}{\gamma(z)} \right)^{1/2} \times \cos [\mu(z) + \Delta\mu(z, \delta) - \vartheta_{0,\beta}], \quad (14)$$

где a_0, ϑ_0 определяют начальный центр тяжести сгустка на фазовой плоскости (x, x'), a_β, ϑ_β определяют начальные координаты частицы относительно центра сгустка.

Тогда текущий центр тяжести \bar{x} и среднеквадратичный размер $\sigma_x = \langle \Delta x^2 \rangle^{1/2}$ сгустка будут определяться как средние по энергетическому разбросу и начальным координатам частиц в сгустке

$$\bar{x}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} P_0(\delta) \langle x(z, \delta) \rangle_{a_\beta, \vartheta_\beta} d\delta, \quad (15)$$

$$\sigma_x^2(z) = \int_{-\infty}^{\infty} P_0(\delta) \langle x^2(z, \delta) - \bar{x}^2(z) \rangle_{a_\beta, \vartheta_\beta} d\delta, \quad (16)$$

где $P_0(\delta)$ есть начальное некоррелированное распределение частиц по энергиям, которое мы будем предполагать гауссовским со среднеквадратичным разбросом σ_ϵ .

Проведя усреднение, мы получим следующее выражение для изменения центра тяжести пучка вдоль ускорителя:

$$\bar{x}(z) = a_0 \left(\beta(z) \frac{\gamma_0}{\gamma(z)} \right)^{1/2} \times \exp(-\Delta\mu_s^2/2) \cos [\mu(z) - \vartheta_0], \quad (17)$$

где $\Delta\mu_s$ есть среднее смещение фазы бетатронных колебаний неравновесной частицы со среднеквадратичным начальным энергетическим разбросом σ_ϵ (12).

Аналогично находим среднеквадратичный поперечный размер сгустка

$$\sigma_x^2 = \frac{\gamma_0}{\gamma} \sigma_\beta^2 + \frac{a_0^2}{2} \frac{\gamma_0}{\gamma} \left\{ 1 - [\cos^2(\mu - \vartheta_0) - \cos(2\mu - 2\vartheta_0)] \exp(-\Delta\mu_s^2) \right\}, \quad (18)$$

где σ_β — начальный поперечный среднеквадратичный размер сгустка.

Средний вклад в увеличение среднеквадратичного эммитанса найдем, усреднив полученное выражение по текущей фазе бетатронных колебаний μ в пределах $(0, 2\pi)$. Учитывая, что в нашем приближении мы пренебрегаем дисперсией амплитудной бетатронной функции, для величины дисперсионного уширения эммитанса сгустка в ускорителе получим

$$\Delta\epsilon = \epsilon - \epsilon_\beta = \frac{a_0^2}{2} \frac{\gamma_0}{\gamma} [1 - \exp(-\Delta\mu_s^2)], \quad (19)$$

где ϵ_β и ϵ есть естественный и среднеквадратичный текущие эммитансы пучка.

Учитывая, что величина a_0^2 соответствует площади начального центрального фазового эллипса, величина уширения эммитанса ограничена половиной площади эллипса когерентных бетатронных колебаний пучка

$$\Delta\epsilon_{\max} = \frac{1}{2} \frac{\gamma_0}{\gamma} (\gamma_x x_0^2 + 2\alpha_x x_0 x'_0 + \beta_x x'^2_0), \quad (20)$$

где $\alpha_x, \beta_x, \gamma_x$ есть параметры матрицы Твиса в начале ускорителя.

Заметим, что величина дисперсионного уширения пучка не зависит от естественного эммитанса и при высокой степени расщепления пучка является критичным при ускорении пучков с малым вертикальным эммитансом, так как машинный эллипс может значительно превосходить естественный эммитанс пучка. В дальнейшем мы будем предполагать, что начальный фазовый эллипс когерентных бетатронных колебаний совпадает с естественным фазовым эллипсом, или, другими словами, начальные амплитуды (отклонение и угол) центра тяжести пучка лежат на односигмовом контуре ($a_0^2 = \epsilon_{\beta 0}$). На рис. 2 приведены нормализованные фазовые эллипсы частиц с разной энергией по мере их ускорения в основном линейном ускорителе SBLC. Как видим, по мере

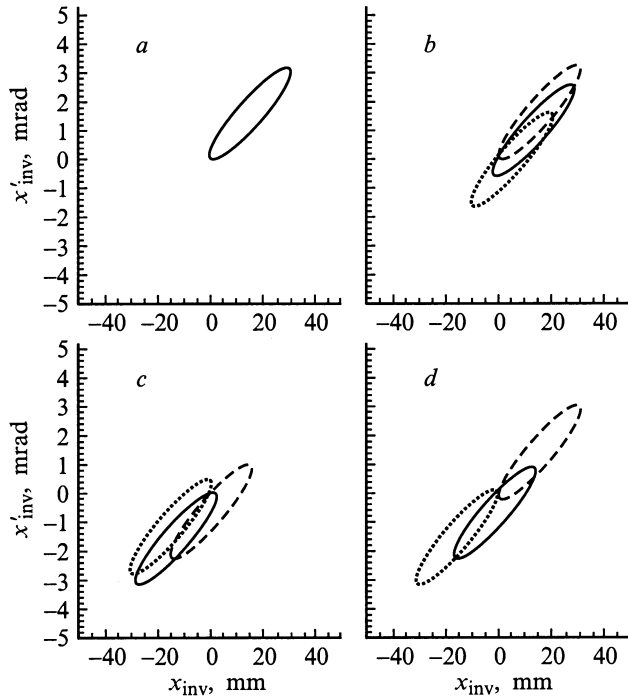


Рис. 2. Расщепление фазовых эллипсов частиц на инвариантной фазовой плоскости (x, x') при когерентных бетатронных колебаниях пучка в основном ускорителе SBLC. Показаны фазовые эллипсы равновесной частицы (сплошная линия) и частиц с энергией больше (штриховая линия) и меньше (пунктирная линия) равновесной энергии. E, GeV : a — 3.15, b — 25, c — 100, d — 250.

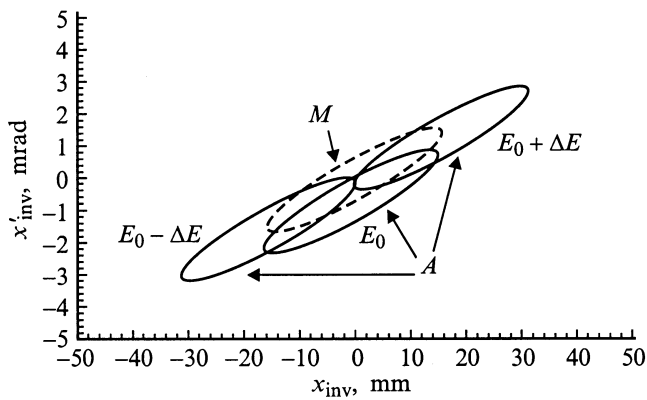


Рис. 3. Машинный фазовый эллипс (M) и актуальный фазовый портрет пучка (A) после расщепления частиц на фазовой плоскости при когерентных колебаниях пучка в линейном ускорителе SBLC. $E = 250 \text{ GeV}$.

ускорения частиц фазовые эллипсы расщепляются на фазовой плоскости, причем частицы с большей энергией запаздывают по фазе, тогда как частицы с меньшей энергией опережают по фазе равновесную частицу. Частицы сгустка стремятся заполнить машинный фазовый эллипс когерентных бетатронных колебаний независимо

от начальной фазы когерентных бетатронных колебаний (рис. 3). Важное следствие состоит в том, что при этом центр тяжести пучка стремится к оси ускорителя и амплитуда когерентных бетатронных колебаний экспоненциально затухает со степенью дисперсионного расщепления пучка, что обусловлено затуханием Ландау [5]. Выражение для параметра затухания Ландау для некогерентного начального гауссовского разброса частиц в сгустке по энергиям следует из формул (12), (17)

$$\alpha_L(z) = \frac{1}{2} \Delta \mu_s^2 = \frac{1}{8} \left[\sigma_\epsilon \operatorname{tg} \frac{\mu_1}{2} \frac{\gamma_0}{\Delta \gamma} \frac{1}{\alpha} (1 - g^\alpha) \right]^2. \quad (21)$$

При малой степени расщепления пучка ($\xi \ll 1$) величину дисперсионного уширения пучка можно приближенно оценить как

$$\frac{\Delta \epsilon}{\epsilon} \approx 2 \sigma_\epsilon^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\mu_1}{2} \left(\frac{\gamma_0}{\Delta \gamma} \right)^2 \frac{1}{\alpha^2} (1 - g^\alpha)^2. \quad (22)$$

На рис. 4 приведена динамика дисперсионного уширения эмиттанса пучка вдоль основного линейного ускорителя столкновителей SBLC и TESLA, описываемая формулой (19) (пунктир). Для сравнения сплошной кривой показана также динамика уширения эмиттанса пучка при численном моделировании трассировки частиц в ускорителе. Отметим хорошее согласие результатов трека частиц с аналитическим описанием. Сказанное также справедливо для величины затухания Ландау по мере ускорения частиц. Таким образом, полученные формулы

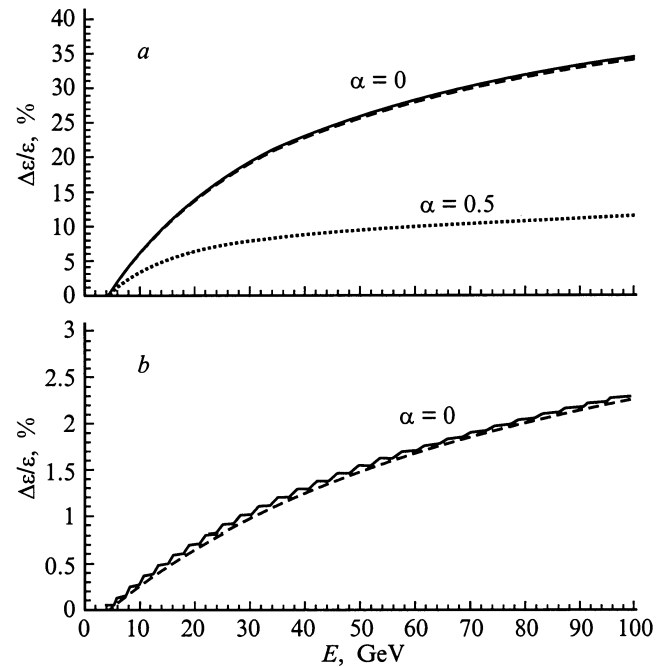


Рис. 4. Относительное увеличение среднеквадратичного эмиттанса сгустка при когерентных колебаниях пучка. Сплошная кривая — результаты трассировки частиц, штриховая — аналитическое описание. a — SBLC, $\delta_0 = 0.01$; b — TESLA, $\delta_0 = 0.014$.

можно считать точным аналитическим описанием некоррелированного дисперсионного уширения эмиттанса пучка при когерентных бетатронных колебаниях пучка в линейных ускорителях. Заметим, что при выполнении условий автофазировки частиц [8] ($\alpha = 0.5$) существенно подавляется также некоррелированное дисперсионное уширение эмиттанса пучка, что видно из рис. 4 для проекта столкновителя SBLC (пунктир). Заметим, что рассмотренный процесс дисперсионного уширения эмиттанса пучка при когерентных колебаниях обратим и, как показано в [17], увеличение эмиттанса пучка можно подавить при предварительном перераспределении частиц на фазовой плоскости в бездисперсионной арке с положительной хроматичностью, располагаемой на стадии инжекции пучка в основной ускоритель.

Возмущение центральной траектории и ее коррекция

Теперь исследует возмущенную часть уравнения движения, вызванную неточностью установки квадрупольных линз вдоль ускорителя. Для начала рассмотрим возмущение центральной траектории пучка с учетом случайных отклонений квадрупольных линз от оси ускорителя. Как следует из (3), (5) и (6), частное решение уравнения движения, соответствующее возмущенной центральной траектории пучка ($\delta = 0, x_0 = 0, x'_0 = 0$), можно представить в виде

$$x_d(z) = \sqrt{\frac{\beta(z)}{\gamma(z)}} \sum_k K_k L_{qk} x_{qk} \sqrt{\beta_k \gamma_k} \times \sin[\mu(z) - \mu(z_k)], \quad (23)$$

где величины с индексом k соответствуют их значениям в k -й квадрупольной линзе.

Мы предполагаем, что случайные отклонения линз от оси не коррелированы друг с другом и, следовательно, перекрестные члены не дают вклада в среднее квадратичное смещение центральной траектории ($\langle x_{qk} x_{ql} \rangle = 0$ при $k \neq l$). Введя аналогично свободным бетатронным колебаниям частиц среднее квадратичное возмущенное текущее фазовое эллипс пучка [20]

$$\gamma_x \langle x_d^2 \rangle + 2\alpha_x \langle x_d x'_d \rangle + \beta_x \langle x'^2_d \rangle = A^2, \quad (24)$$

для площади возмущенного эллипса (деленного на π) получим следующее выражение:

$$A^2 = 16 \frac{\langle x_q^2 \rangle}{L_c \gamma(z)} \sum_n \gamma_n \operatorname{tg} \frac{\mu_n}{2} = 16 \frac{\langle x_q^2 \rangle}{L_c^2} \frac{\gamma_0}{\Delta \gamma} \operatorname{tg} \frac{\mu_1}{2} \frac{1}{2 - \alpha} \frac{\gamma_0}{\gamma} \left[\left(\frac{\gamma}{\gamma_0} \right)^{2 - \alpha} - 1 \right]. \quad (25)$$

Здесь $\alpha_x, \beta_x, \gamma_x$ есть текущие параметры матрицы Твиса, L_c — длина ФОДО ячейки. При выводе выражения (25)

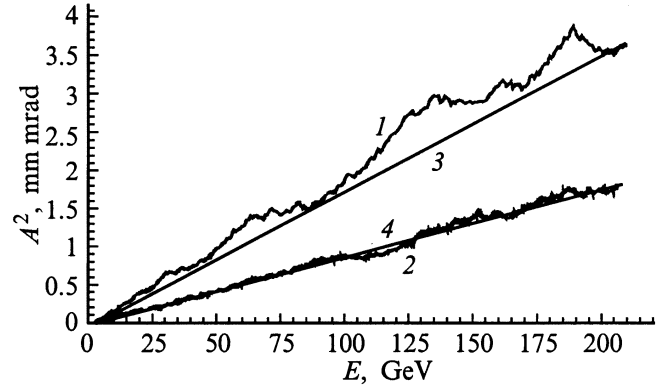


Рис. 5. Эволюция площади среднее квадратичного возмущенного машинного эллипса вдоль линейного ускорителя (трассировка частиц), усредненное по 100 наборам случайных отклонений линз от оси со среднее квадратичным значением 0.1 mm (1 — SBLC) и 0.5 mm (2 — TESLA). 3, 4 — аналитическое описание.

мы воспользовались следующими соотношениями для амплитудных функций симметричной ФОДО ячейки периодичности [25]:

$$\beta_{\max} + \beta_{\min} = \frac{2L_c}{\sin \mu}, \quad KL_q L_c = 4 \sin \frac{\mu}{2}. \quad (26)$$

Заметим, что среднее квадратичное смещение линз связано с допуском a_q соотношением $a_q^2 = 3 \langle x_q^2 \rangle$. Как показано в [20], выражение (25) для площади среднее квадратичного возмущенного фазового эллипса, определяемое через основные параметры ускорителя, является точным описанием среднее квадратичного возмущения центральной траектории при наличии некоррелируемых случайных отклонений квадрупольных линз от оси ускорителя. На рис. 5 приведена эволюция площади возмущенного фазового эллипса вдоль основного ускорителя проектов SBLC и TESLA. Отметим, что среднее квадратичные значения площади фазового эллипса сходятся к точному решению при усреднении трека частиц по 100 и более наборам случайных отклонений линз от оси ускорителя.

При наличии начального некоррелированного энергетического разброса частиц в густке неравновесные частицы будут стремиться теперь заполнить возмущенный фазовый эллипс ускорителя. Траектория неравновесной частицы с начальным энергетическим отклонением δ_0 тогда будет задаваться следующим выражением:

$$x_d(z, \delta) = \sqrt{\frac{\beta(z)}{\gamma(z)}} \sum_k K_k L_{qk} x_{qk} \sqrt{\beta_k \gamma_k} \sin[\mu(z) - \mu(z_k) + \Delta \mu(z_k, z)] + x_\beta(z, \delta), \quad (27)$$

где

$$\Delta \mu(z_k, z) = -2\delta_0 \frac{\gamma_0}{\Delta \gamma} \operatorname{tg} \frac{\mu_1}{2} \frac{1}{\alpha} \left[1 - \left(\frac{\gamma_k}{\gamma} \right)^\alpha \right] \quad (28)$$

есть смещение фазы бетатронных колебаний неравновесной частицы, вызванное k -й квадрупольной линзой.

Опять же предполагая начальное гауссовское распределение частиц по энергиям и проводя усреднение по энергиям и координатам частиц, для среднеквадратичного поперечного размера пучка мы получим следующее выражение:

$$\sigma_x^2(z) = \frac{1}{2} \langle x_q^2 \rangle \frac{\beta(z)}{\gamma(z)} \sum_k K_k^2 L_{qk}^2 \beta_k \gamma_k \times [1 - \exp(-\Delta \hat{\mu}_k^2)] + \sigma_\beta^2(z), \quad (29)$$

где $\Delta \hat{\mu}_k$ теперь есть смещение фазы бетатронных колебаний неравновесной частицы со среднеквадратичным отклонением энергии.

При определении среднеквадратичного размера пучка проведено усреднение также по текущей фазе $\mu(z)$ в пределах $(0; 2\pi)$. Отметим, что при проведении усреднения учтен тот факт, что траектория невозмущенного движения, усредненная по начальным амплитудам $(a_\beta, \vartheta_\beta)$, равна нулю $\langle x_\beta \rangle = 0$, а среднеквадратичное отклонение совпадает с текущим невозмущенным среднеквадратичным размером пучка $\langle x_\beta^2 \rangle = \sigma_\beta^2$. Пренебрегая вкладом в смещение фазы в пределах одной ячейки периодичности (что оправдано при $\Delta\gamma/\gamma \ll 1$), выражение для среднеквадратичного размера пучка можно представить в виде суммы по ячейкам периодичности как

$$\sigma_x^2(z) = 8 \frac{\langle x_q^2 \rangle}{L_c} \frac{\beta(z)}{\gamma(z)} \operatorname{tg} \frac{\mu_1}{2} \sum_n \left(\frac{\gamma_0}{\gamma_n} \right)^\alpha \gamma_n \times [1 - \exp(-\Delta \hat{\mu}_n^2)] + \sigma_\beta^2(z). \quad (30)$$

Переходя от суммирования по ячейкам периодичности к интегралу по энергии, хорошее приближение для величины увеличения эмиттанса можно получить при малой степени расщепления пучка

$$\frac{\Delta \varepsilon}{\varepsilon_\beta} \approx 32 \frac{\langle x_q^2 \rangle}{\varepsilon_0 L_c} \sigma_\varepsilon^2 \left(\frac{\gamma_0}{\Delta \gamma} \right)^3 \times \operatorname{tg}^3 \frac{\mu_1}{2} \frac{1}{4 - \alpha^2} \left[\left(\frac{\gamma_0}{\gamma_0} \right)^{2-\alpha} - 1 \right]. \quad (31)$$

Отметим очень сильную зависимость дисперсионного уширения эмиттанса пучка от набега фазы за период фокусирующей структуры μ_1 и прироста энергии на ячейку периодичности $\Delta\gamma$. Для сравнения на рис. 6 приведено относительное увеличение эмиттанса вдоль основного ускорителя столкновений SBLC и TESLA. Усреднение среднеквадратичных размеров пучка проведено по 100 наборам отклонений линз от оси ускорителя. Ясно, что необходима коррекция центральной траектории пучка вдоль ускорителя.

Рассмотрим коррекцию возмущенной центральной траектории вдоль ускорителя на основе измерения центра тяжести пучка и найдем среднеквадратичное дисперсионное уширение эмиттанса пучка. Мы будем предполагать, что датчики положения пучка встроены в каждую

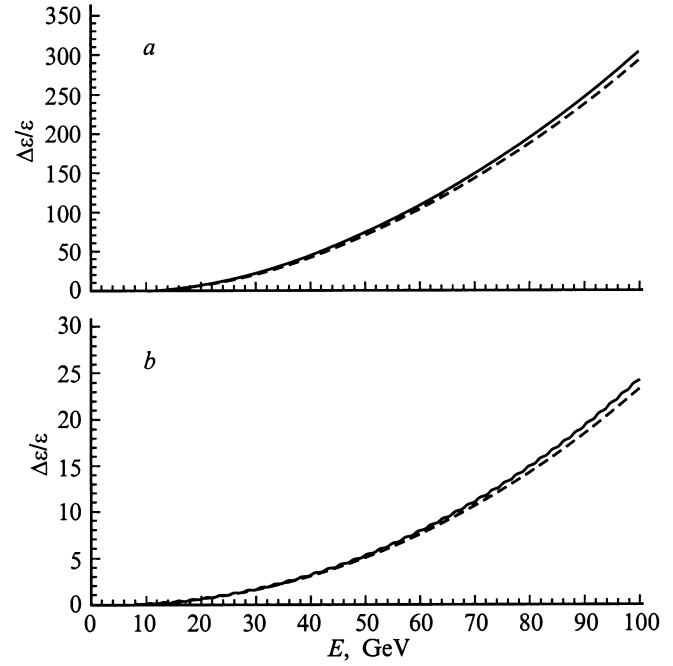


Рис. 6. Дисперсионное уширение эмиттанса пучка при возмущении центральной траектории (сплошная кривая). Штриховая — аналитическая кривая. *a* — SBLC, $\delta_0 = 0.01$, $\mu = \pi/2$; *b* — TESLA, $\delta_0 = 0.014$, $\mu = \pi/3$.

квадрупольную линзу с погрешностью отклонения от центра k -й линзы b_k , а сама квадрупольная линза имеет случайное отклонение от оси ускорителя x_{qk} . Смещения элементов ускорителя считаем статическими. После измерения центра тяжести пучка в k -й линзе траектория последующих сгустков корректируется к центру линзы с разрешимостью d_k предыдущими дипольными корректорами. Таким образом, центральная траектория опять возмущена, но не возрастает вдоль ускорителя, а смещение центра тяжести пучка в k -й квадрупольной линзе x_{ck} после процедуры коррекции есть

$$x_{ck} = x_{qk} + b_k + d_k. \quad (32)$$

Заметим, что все величины случайные и некоррелированы, а среднеквадратичное отклонение центра тяжести пучка вдоль ускорителя есть

$$\langle x_c^2 \rangle = \langle x_q^2 \rangle + \langle x_{\text{BPM}}^2 \rangle + \langle x_{\text{RES}}^2 \rangle, \quad (33)$$

где $\langle x_q^2 \rangle^{1/2}$ — среднеквадратичное отклонение квадрупольных линз от оси ускорителя, $\langle x_{\text{BPM}}^2 \rangle^{1/2}$ — среднеквадратичное отклонение датчиков от центра линз, $\langle x_{\text{RES}}^2 \rangle^{1/2}$ — среднеквадратичное значение разрешимости датчиков.

Нетрудно показать, что по первому порядку малости относительно энергетического разброса ($\delta_0 \ll 1$) смещение неравновесной частицы относительно центральной

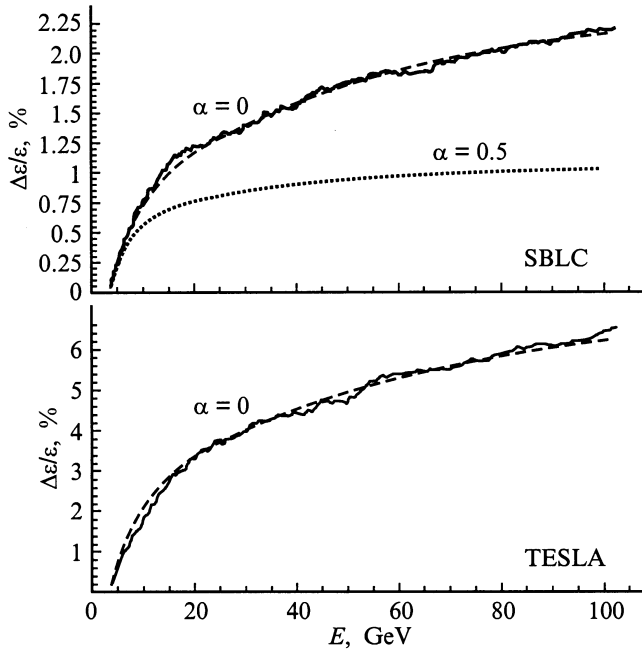


Рис. 7. Дисперсионное уширение эмиттанса пучка в линейном ускорителе после коррекции центральной траектории, усредненное по 100 наборам смещений датчиков относительно центров линз и их разрешимости (сплошная линия). Среднеквадратичные значения смещения датчиков и их разрешимости: 0.1 и 0.01 mm (SBLC); 0.5 и 0.05 mm (TESLA). Штриховая линия — аналитическая кривая.

возмущенной траектории $\Delta x = x_\delta - x_c$ будет удовлетворять следующему уравнению:

$$\Delta x'' + \frac{\gamma'}{\gamma} \Delta x' + K_x(1 - \delta) \Delta x = \delta K_x(x_c - x_q) - \delta G_x(z), \quad (34)$$

где $G_x(z) = ecB(z)/E = 1/\rho_s(z)$ — текущая кривизна возмущенной центральной траектории, возбужденной дипольными корректорами.

Мы будем предполагать, как обычно, что система коррекции скомпенсирована таким образом, что дополнительная функция дисперсии, вызванная дипольными корректорами, зануляется в конце ускорителя и не дает вклада в среднеквадратичный эмиттанс пучка. Тогда решение уравнения с использованием элемента M_{12} матрицы Твиса (6) представляется как

$$\Delta x(z) = \delta_0 \int_0^z \frac{\gamma_0}{\gamma(z')} K_x(z') [x_c(z') - x_q(z')] M_{12}^\delta(z', z) dz'. \quad (35)$$

Для нахождения точного решения дисперсионного уширения эмиттанса пучка при такой коррекции центральной траектории мы всегда можем представить возмущенную центральную траекторию $x_c(z)$ в виде некоторой гладкой функции $F(z)$ от координаты z с доопределением $F(z_k) = x_{ck}$ для любого заданного набора случайных величин x_{qk} , b_k , d_k вдоль ускорителя. Для

квадрата относительного смещения неравновесной частицы, усредненной по текущей фазе и энергетическому разбросу, тогда имеем

$$\langle \Delta x^2(z) \rangle = \frac{1}{2} \langle x_B^2 \rangle \sigma_\epsilon^2 \beta(z) \frac{\gamma_0}{\gamma(z)} \times \sum_n \frac{\gamma_0}{\gamma_n} K_n^2 L_{qn}^2 (\beta_{n \max} + \beta_{n \min}), \quad (36)$$

где величина $\langle x_B^2 \rangle = \langle x_{\text{BPM}}^2 \rangle + \langle x_{\text{RES}}^2 \rangle$ определяется только точностью установки корректоров относительно центра линзы и их разрешимостью.

Переходя к интегрированию, с учетом выражений для амплитудных функций (26) для относительного увеличения эмиттанса вдоль ускорителя мы получим следующее выражение:

$$\frac{\Delta \epsilon}{\epsilon} = 8 \sigma_\epsilon^2 \frac{\langle x_B^2 \rangle}{\epsilon_0 L_c} \frac{\gamma_0}{\Delta \gamma} \operatorname{tg} \frac{\mu_1}{2} \cdot \frac{1}{\alpha} \left[1 - \left(\frac{\gamma_0}{\gamma} \right)^\alpha \right]. \quad (37)$$

Заметим, что коррекция центральной траектории приводит к существенному уменьшению размазывания пучка даже по сравнению со случаем свободных когерентных колебаний пучка вдоль ускорителя. На рис. 7 приведено относительное увеличение горизонтального эмиттанса пучка для проектов SBLC и TESLA при такой коррекции центральной траектории. Опять же результаты трассировки частиц усреднены по 100 наборам случайных отклонений центра тяжести пучка от оси линейного ускорителя. Поскольку вертикальный эмиттанс пучка, как обычно, намного меньше горизонтального эмиттанса, то требования к точности установки квадрупольных линз и системе коррекции в вертикальной плоскости намного жестче. При выполнении условий автофазировки частиц ($\alpha = 0.5$) опять же некоррелированное дисперсионное уширение эмиттанса пучка существенно меньше при аналогичных параметрах корректирующей системы ускорителя (рис. 7, пунктир — проект SBLC).

Заключение

Мы нашли точные аналитические представления для величины дисперсионного увеличения эмиттанса пучка в линейных ускорителях на высокие энергии при произвольном законе изменения набега фазы бетатронных колебаний с энергией равновесной частицы. Исследованы случаи свободных когерентных колебаний пучка, возмущения центральной траектории и ее коррекции. Основным вкладом можно считать то, что полученные выражения позволяют точно оценить качество пучка и его поведение в линейных ускорителях на высокие энергии, оптимизировать фокусирующую и корректирующую системы ускорителя. Показано также, что при выполнении условий автофазировки частиц на основе изменяющегося с энергией частиц набега фазы бетатронных колебаний существенно подавляется некоррелированное дисперсионное уширение эмиттанса пучка.

В заключение автор выражает благодарность Рейнхарду Бринкманну, Йорку Россбаху и Райна Ванценбергу за постоянный интерес к работе и ряд ценных замечаний. Особая благодарность Эдмонду Газазяну за полезные комментарии к работе.

Список литературы

- [1] *Skrinsky A.* // Proc. 12th Intern. Conf. On High Energy Accel. Fermilab (Batavia, IL), 1983. P. 104–108.
- [2] *Seeman J.T.* // SLAC-PUB-4886. 1989. P. 5.
- [3] *Holtcamp N.* // Proc. 15th Intern. Conf. On High Energy Accel. Hamburg, 1993. P. 770–776.
- [4] *Bane K.* // SLAC-PUB-4169. 1986. P. 44.
- [5] *Chao A.* Physics of Collective Beam Instabilities in High Energy Accelerators. New York: Wiley, 1993. P. 286.
- [6] *Balakin V., Novokhatsky A., Smirnov V.* // Proc. 12th Intern. Conf. On High Energy Accel. Fermilab (Batavia, IL), 1983. P. 119–120.
- [7] *Балакин В.* Препринт ИЯФ. № 88-100. Новосибирск, 1988.
- [8] *Tsakanov V.M.* // Phys. Rev. Spec. Topics—Accel. and Beams. 1998. Vol. 1, 041001. P. 1–6.
- [9] *Капчинский И.М.* // УФН. 1980. Т. 132. Вып. 4. С. 639–661.
- [10] *Капчинский И.М.* Теория линейных резонансных ускорителей. М.: Энергоиздат, 1982. С. 240.
- [11] Линейные ускорители ионов / Под ред. Б.П. Мурина. Т. 1. М.: Атомиздат, 1978. С. 264.
- [12] *Balakin V., Novokhatsky A., Smirnov V.* // Proc. 12th Intern. Conf. On High Energy Accel. Fermilab (Batavia, IL), 1983. P. 121–122.
- [13] *Ruth R.D.* // SLAC-PUB-4436. 1987. P. 22.
- [14] *Ruth R.D.* // Proc. of 1991 Part. Accel. Conf. San Francisco, 1991. P. 2037–2041.
- [15] *Raubenheimer T.* // SLAC-387. 1991. P. 111–252.
- [16] *Drevlak M., Timm M., Weiland T.* // Proc. 18th Intern. Lingc Conf. Geneva, 1996. P. 621–623.
- [17] *Tsakanov V.M.* // Nucl. Instrum. and Meth. (A). 1999. Vol. 421. P. 423–430.
- [18] *Mosnier A., Zakharian A.* // Proc. 4th European Part. Accel. Conf. London, 1994. P. 1111–1113.
- [19] *Drevlac M.* // DESY 95-225. 1995. P. 148.
- [20] *Цаканов В.М.* // ЖТФ. 1999. Т. 69. Вып. 7. С. 95–98.
- [21] *Guignard G.* // Proc. 1993. Part. Accel. Conf. New York: APS, 1993. P. 3600–3602.
- [22] Conceptual Design of a 500 GeV e^+e^- Linear Collider with Integrated X-Ray Laser Facility / Edited R. Brinkmann, G. Materlik, J. Rossbach, A. Wagner. Hamburg: DESY, 1997. Vol. I, II. P. 275–861.
- [23] *Courant E.D., Snyder H.S.* // Ann. Phys. 1958. Vol. 3. P. 1–48.
- [24] *Sands M.* The Physics of Electron Storage Rings. SLAC-121. 1971. P. 172.
- [25] *Rossbach J., Schmuser P.* // Proc. CERN Accelerator School (CERN 94-01). 1994. P. 17–88.
- [26] *Buon J.* // Proc. CERN Accelerator School (CERN 94-01). 1994. P. 89–116.