04;10

Влияние многократного рассеяния и внешнего магнитного поля на развитие резистивной перетяжечной неустойчивости релятивистского электронного пучка

© Е.К. Колесников, А.С. Мануйлов

Санкт-Петербургский государственный университет,
Научно-исследовательский институт математики и механики им. В.И. Смирнова,
198904 Санкт-Петербург, Россия

(Поступило в Редакцию 28 мая 1999 г.)

Исследовано влияние процесса многократного кулоновского рассеяния и продольного внешнего магнитного поля на развитие резистивной перетяжечной неустойчивости релятивистского электронного пучка, распространяющегося в омической газоплазменной среде. Показано, что указанные факторы существенно понижают амплитуду перетяжечной моды.

В последние годы внимание исследователей все больше привлекают вопросы динамики транспортировки релятивистских электронных пучков (РЭП) в газоплазменных средах [1–12]. Особый интерес в комплексе проблем, связанных с транспортировкой РЭП, представляет исследование резистивных крупномасштабных неустойчивостей пучков, среди которых наряду со шланговой модой (азимутальное волновое число $m = 1$) важное значение имеет резистивная перетяжечная неустойчивость (РПН) с азимутальным числом $m = 0$. Для этой неустойчивости характерно возникновение аксиально-симметричных возмущений радиуса РЭП. Физический механизм РПН обусловлен фазовым запаздыванием индуцируемых при возмущениях радиуса РЭП вихревых токов относительно переменной составляющей плотности тока пучка. Изучению перетяжечной моды РЭП посвящен ряд работ [3–5,9,10]. Однако в указанных исследованиях не было изучено влияние часто встречающихся на практике эффектов многократного кулоновского рассеяния электронов пучка на атомах и молекулах фонового газа, а также наличия продольного магнитного поля.

В настоящей работе с помощью аналитических методов получена зависимость возмущений радиуса РЭП от плотности фонового газа, а также от значения индукции внешнего продольного магнитного поля.

Рассмотрим параксиальный аксиально-симметричный РЭП, распространяющийся вдоль оси z цилиндрической системы координат (r, θ, z) в рассеивающей газоплазменной среде, характеризуемой высокой омической проводимостью σ, такой что $4\pi\sigma R_b/c \gg 1$ (R_b — характерный радиус пучка, c — скорость света). Предполагается, что пучок полностью компенсирован по заряду и имеет место частичная магнитная (токовая) нейтрализация с коэффициентом f_m. Кроме того, РЭП распространяется вдоль стационарного однородного внешнего магнитного поля с индукцией B_0.

Тогда поперечная динамика РЭП описывается системой уравнений для удвоенного среднеквадратичного радиуса пучка R^2 и среднеквадратичного эмиттанса E^2 [1,3,5]

$$\frac{\partial^2 R}{\partial z^2} + \frac{2U}{R} + \frac{k_c^2 R}{4} = \frac{4E^2}{R^3} + \frac{4P_\theta^2}{R^3}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial E^2}{\partial z} = -\alpha_{ph}\frac{R^3 U}{E}\,\frac{\partial^2 R}{\partial z^2} + 2\sigma_1 n_g R^2, \tag{2}$$

где $U = \langle k_\beta^2 r^2 \rangle$ — обобщенный первеанс пучка; k_β^2 — квадрат бетатронного волнового числа частиц пучка (угловые скобки означают усреднение по радиальному профилю плотности тока РЭП); $k_c^2 = eB_0/\gamma mc^3$ — циклотронное волновое число электронов пучка в продольном магнитном поле с индукцией B_0 (e, m — заряд и масса электрона, γ — лоренц-фактор); $P_\theta - \theta$ — компонента обобщенного импульса частиц пучка в рассматриваемом сегменте РЭП; α_{ph} — коэффициент фазового перемешивания частиц пучка [8]; σ_1 — транспортное сечение многократного рассеяния электронов пучка на атомах фонового газа; n_g — концентрация атомов газа.

В предположении малости возмущенных величин (в частности, $\delta R = R - R_0 \ll 1$, где R_0 — удвоенный равновесный радиус пучка) на линейной стадии развития РШН из (1), (2) получим

$$\frac{\partial^2 \delta R}{\partial z^2} + \frac{4U_0}{R_0^2}\delta R + k_c^2\delta R + \frac{2\delta U}{R_0} = \frac{4\delta E^2}{R_0^3}, \tag{3}$$

$$\frac{\partial \delta E^2}{\partial z} = -\frac{\alpha_{ph}}{4}\,\frac{R_0^3 U_0}{E_0}\,\frac{\partial^2 \delta R}{\partial z^2} + 2R_0\delta R\sigma_1 n_g, \tag{4}$$

где индекс 0 относится к невозмущенным значениям соответствующих параметров.

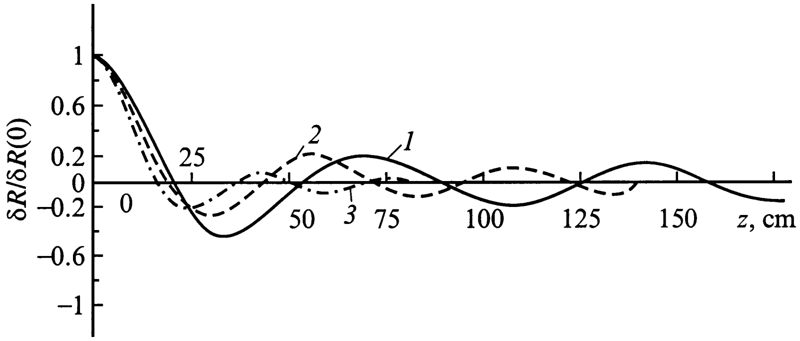
В предположении автомодельности пульсаций радиуса РЭП при развитии РПН можно получить

$$\delta U = \frac{\delta R}{R_0} 2\Psi(1 - f_m)U_0, \tag{5}$$

где

$$\Psi = \frac{4\pi^2}{I_b^2}\int\limits_0^\infty dr\, r^3 J_b^2(r), \tag{6}$$

I_b — полный ток пучка, $J_b(r)$ — радиальный профиль плотности тока РЭП.



Зависимость радиального возмущения $\delta R/\delta R(0)$ от z: *1* — ситуация (25), *2* — (26), *3* — (27).

Далее будем предполагать, что выполнено условие

$$\frac{L_{z0}}{L_{z1}} \gg 1, \tag{7}$$

где

$$L_{z0} = \frac{R_0}{\partial R_0/\partial z}, \quad L_{z1} = \frac{\delta R}{\partial \delta R/\partial z}, \tag{8}$$

т. е. равновесное значение среднеквадратичного радиуса значительно медленнее меняется с ростом z, чем возмущение δR. Тогда для решения системы (3), (4) в пределах дистанции $z \leqslant L_{z0}$ будем использовать метод преобразования Лапласа в виде

$$\Delta F = \int\limits_0^\infty dz \exp(i\Omega z) F(z), \tag{9}$$

где F — некоторая функция от z.

Тогда из (3) и (4) имеем

$$\Delta R = \frac{F(\Omega)}{D(\Omega)}. \tag{10}$$

Здесь

$$F(\Omega) = \left(1 + \frac{i\alpha_{ph}U_0}{\Omega E_0}\right)\left[\frac{\partial \delta R}{\partial z}(0) - i\Omega\delta R(0)\right], \tag{11}$$

$$D(\Omega) = \Omega_0^2 - \Omega^2 - \frac{i\alpha_{ph}\Omega U_0}{E_0} - \frac{4iS}{\Omega R_0^2}, \tag{12}$$

где $S = 2\sigma_1 n_g$, $U_0 = I_b/I_A$, I_A — предельный ток Альфвена,

$$\Omega_0^2 = \frac{4U_0}{R_0^2}(1 - f_m + \Psi) + k_c^2. \tag{13}$$

Здесь f_m — коэффициент токовой компенсации, формфактор Ψ представлен в (6). Применяя обратное преобразование Лапласа и полагая $\partial\delta R/\partial z(0) = 0$, получим

$$\delta R(z) = \frac{\delta R(0)}{2\pi i} \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\Omega \exp(-i\Omega z)$$

$$\times \frac{(\Omega + i\alpha_{ph}\mathcal{R})\Omega}{(\Omega\Omega_0^2 - \Omega^3 - i\alpha_{ph}\mathcal{R}\Omega^2 - i\Lambda_{sc})}, \tag{14}$$

где i — мнимая единица, $\Lambda_{sc} = 4S/R_0^2$, $\mathcal{R} = U_0/E_0$.

Очевидно, что интеграл по Ω в (13) может быть определен с помощью метода вычетов. В частном случае отсутствия рассеяния ($\Lambda_{sc} = 0$) нетрудно получить следующий результат:

$$\delta R(z) = \delta R(0) \exp\left(\frac{-\alpha_{ph}\mathcal{R}z}{2}\right)$$

$$\times \left[\cos(z\Psi_1) + \frac{\alpha_{ph}\mathcal{R}}{2\Psi_1}\sin(z\Psi_1)\right], \tag{15}$$

где величина Ω_0 представлена в (13) и

$$\Psi_1 = \left(\Omega_0^2 - \frac{\alpha_{ph}^2\mathcal{R}^2}{4}\right)^{1/2}. \tag{16}$$

Эта формула является обобщением результата работы [5] на случай $B_0 \neq 0$. Из (15) нетрудно видеть, что эффект фазового перемешивания понижает РПН на пространственном масштабе $L_{ph} \sim 2E_0/(\alpha_{ph}U_0)$.

При учете процесса многократного кулоновского рассеяния ($\Lambda_{sc} \neq 0$) для нахождения полюсов в интеграле (14) необходимо решать кубическое уравнение

$$\Omega^3 + i\alpha_{ph}\mathcal{R}\Omega^2 - \Omega\Omega_0^2 + i\Lambda_{sc} = 0. \tag{17}$$

Снова используя метод вычетов, после ряда громоздких вычислений получим

$$\delta R(z) = \delta R(0)\exp[-(b/3 + T/2)z]\frac{2}{(4A + 9T^2)}$$

$$\times \Big\{(2A + 2B - 3T\Psi_1)\cos(\sqrt{A}z)$$

$$+ \frac{[2A\Psi_1 + 3T(A+B)]}{\sqrt{A}}\sin(\sqrt{A}z)\Big\}$$

$$+ \exp[-(b/3 - T)z]\frac{4(T^2 + bT/3 + 2b^2/9)}{(4A + 9T^2)}, \tag{18}$$

где

$$T = \left(M - (P)^{1/2}\right)^{1/3} + \left(M + (P)^{1/2}\right)^{1/3}, \tag{19}$$

$$M = T_1 + \frac{\Lambda_{sc}}{4}, \quad b = \alpha_{ph}\frac{U_0}{E_0}, \tag{20}$$

$$T_1 = \frac{b\Omega_0^2}{6} - \frac{b^3}{2}7 + \frac{\Lambda_{sc}}{4}, \tag{21}$$

$$P = \frac{\Omega_0^4}{27}\left(\Omega_0^2 - \frac{b^2}{4}\right) + \Lambda_{sc}T_1, \tag{22}$$

$$A = \Omega_0^2 - \frac{b^2}{3} + \frac{3}{4}T^2, \tag{23}$$

$$B = \left(\frac{b}{3} + \frac{T}{2}\right)\left(\frac{2b}{3} - \frac{T}{2}\right). \tag{24}$$

На рисунке для "обрезанного" при $r = R_b$ $(\alpha_{ph} = 0.62)$ беннетовского радиального профиля плотности тока электронного пучка представлены зависимости δR от z, полученные с помощью формулы (18) в следующих ситуациях:

$$k_c = 0, \quad \Lambda_{sc} = 0, \tag{25}$$

$$k_c^2 = 3.6 \cdot 10^{-3}, \quad \Lambda_{sc} = 0, \tag{26}$$

$$k_c = 0, \quad \Lambda_{sc} = 2.3 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{cm}^{-3} \tag{27}$$

при условии $R_0 = 1\,\mathrm{cm}$, $U_0 = 2 \cdot 10^{-3}$. Значение $\Lambda_{sc} = 2.3 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{cm}^{-3}$ в (27) соответствует ситуации, когда рассеивающим газом является азот при атмосферном давлении и энергии частиц пучка $E = 5\,\mathrm{MeV}$. Приведенное в (26) значение k_c^2 соответствует $B_0 = 100\,\mathrm{G}$ при $\gamma = 10$.

Как видно из рисунка, процессы рассеяния, фазового перемешивания, а также наличие продольного внешнего магнитного поля приводят к подавлению радиальных возмущений при развитии РПН. Этот вывод находится в соответствии с результатами экспериментов, в которых не было обнаружено развитие незатухающих аксиально-симметричных возмущений радиуса пучка.

Список литературы

[1] *Lee E.P.* // Phys. Fluids. 1976. Vol. 19. N 1. P. 60–69.
[2] *Lee E.P.* // Phys. Fluids. 1978. Vol. 21. N 8. P. 1327–1343.
[3] *Lee E.P., Cooper R.K.* // Part. Accel. 1976. Vol. 7. P. 83–95.
[4] *Lee E.P., Yu S.S.* // Livermore Lab. Report UCID-18330. 1979. P. 23.
[5] *Lee E.P.* // Livermore Lab. Report UCID-18940. 1981. P. 34.
[6] *Fernsler R.F., Hubbard R.F., Lampe M.* // J. Appl. Phys. 1994. Vol. 75. N 7. P. 3278–3293.
[7] *Надеждин Е.Р., Сорокин Г.А.* // Физика плазмы. 1988. Т. 14. № 5. С. 619–622.
[8] *Barletta W.A., Lee E.P., Yu S.S.* // Nucl. Fusion. 1981. Vol. 21. N 8. P. 961–972.
[9] *Lampe M., Joyce G.* // Phys. Fluids. 1983. Vol. 26. N 11. P. 3371–3376.
[10] *Колесников Е.К., Мануйлов А.С.* // Письма в ЖТФ. 1991. Т. 17. Вып. 3. С. 46–50.
[11] *Колесников Е.К., Мануйлов А.С.* // ЖТФ. 1992. Т. 62. Вып. 9. С. 55–61.
[12] *Колесников Е.К., Мануйлов А.С.* // ЖТФ. 1997. Т. 67. Вып. 7. С. 108–111.