01;02;09

Высокочастотная граница приближения Рэлея–Джинса в задачах СВЧ радиометрии

© И.А. Семин

Рязанский государственный педагогический университет им. С.А. Есенина,
390000 Рязань, Россия

(Поступило в Редакцию 17 марта 1999 г. В окончательной редакции 24 декабря 1999 г.)

Выделяется волноводная теорема Кирхгофа как средство адекватного описания электродинамической системы широкополосного детекторного высокочувствительного радиометра СВЧ диапазона волн. Рассматривается переход от общего аналитического выражения этой теоремы к частному случаю. Указывается, что такой переход эквивалентен переходу от распределения Планка к приближению Рэлея–Джинса. Получено простое соотношение, определяющее по заданной точности частотную границу указанного перехода как функцию температуры.

Появление сверхпроводниковых нелинейных элементов привело, с одной стороны, к разработке новых устройств с рекордными характеристиками [1], с другой стороны, расширило горизонты радиофизических задач. В полной мере сказанное относится к одному из таких элементов — торцевому джозефсоновскому переходу [2].

Теоретической основой для экспериментальных исследований [2–4] детектирующих свойств торцевого перехода послужили работы [5,6]. В частности, в [6] приведен последовательный расчет детекторных характеристик перехода, включенного в широкополосную электродинамическую систему, представленную моделью длинной линии. Однако неудовлетворительное согласие рассчитанных характеристик с экспериментальными результатами заставило отказаться от указанной модели в пользу волноводной теоремы Кирхгофа [7].

Одним из сомножителей аналитического выражения указанной теоремы является средняя энергия квантового осциллятора, которая с точностью до энергии нулевых колебаний описывается выражением

$$\langle\varepsilon\rangle_P = h\nu\left(\exp(h\nu/kT) - 1\right)^{-1}, \qquad (1)$$

где h — постоянная Планка, k — постоянная Больцмана, T — температура.

В случаях $h\nu \ll kT$ и $h\nu \gg kT$ выражение (1) существенно упрощается. Для области применения волноводной теоремы Кирхгофа интерес представляет только первый случай. Поэтому указанная теорема допускает два различных выражения: общее, полученное с помощью (1), и асимптотическое, полученное с помощью (1) в пределе $h\nu \ll kT$.

Следует отметить, что условие перехода от общего выражения теоремы к асимптотическому эквивалентно переходу от распределения Планка к распределению, описываемому законом Рэлея–Джинса (в дальнейшем — приближение Рэлея–Джинса). Обычно применение приближения Рэлея–Джинса приводит к существенному упрощению расчетных задач, что делает его более предпочтительным по сравнению с распределением Планка. Однако платой за простоту служит точность расчета. Одной из первых работ, в которой было обращено внимание на недопустимость использования приближения Рэлея–Джинса для описания источников излучения с температурой $\sim 4.2\,\mathrm{K}$ уже в миллиметровом диапазоне волн, является [8].

Целью данной работы являлась разработка критерия для определения по заранее заданной точности высокочастотной границы, обеспечивающей переход от распределения Планка к приближению Рэлея–Джинса.

Исходя из этого рассмотрим выражение (1) для средней энергии квантового осциллятора. В пределе $h\nu \ll kT$ оно с точностью до несущественного в дальнейшем множителя, описывающего число осцилляторов, принимает вид приближения Рэлея–Джинса

$$\langle\varepsilon\rangle_{RD} = kT. \qquad (2)$$

Для разработки указанного в цели работы критерия сравним (1) и (2). Можно видеть, что для всех $\nu > 0$ и $T > 0$ справедливо неравенство

$$kT > h\nu\bigl(\exp(h\nu/kT) - 1\bigr)^{-1}. \qquad (3)$$

Чтобы убедиться в этом, достаточно осуществить разложение экспоненциальной функции в выражении (3) в ряд Маклорена. Вводя далее обозначение

$$x = h\nu/kT, \qquad (4)$$

запишем неравенство (3) в виде

$$x^{-1} > (\exp x - 1)^{-1}. \qquad (5)$$

Неравенство (5) посредством введения коэффициента $0 \leqslant \beta < 1$ может быть преобразовано в уравнение относительно x

$$(1 - \beta)(\exp x - 1) = x. \qquad (6)$$

Введенный таким образом коэффициент β обладает следующими свойствами. Во-первых, β является относительной методической погрешностью, возникающей

β	ν_β, GHz		
	$T = 10\,\mathrm{K}$	$T = 80\,\mathrm{K}$	$T = 300\,\mathrm{K}$
0.001	0.4212	3.370	12.64
0.005	2.087	16.70	62.66
0.010	4.181	33.45	125.4
0.050	21.20	169.6	635.9
0.100	43.16	345.3	1294

при использовании приближения Рэлея–Джинса вместо распределения Планка. Действительно, согласно (1), (2), (4), (6), справедливо

$$\beta = (\langle\varepsilon\rangle_{RD} - \langle\varepsilon\rangle_P)/\langle\varepsilon\rangle_{RD} = \Delta\langle\varepsilon\rangle_{RD}/\langle\varepsilon\rangle_{RD}. \qquad (7)$$

Во-вторых, при фиксированной температуре любое допустимое значение β осуществляет деление оси частот на две части, с одной из которых удобно связать область правомерного использования приближения Рэлея–Джинса. Действительно, выражение (6) определяет β как функцию от x в виде

$$\beta = 1 - x/(\exp x - 1). \qquad (8)$$

Физической областью определения выражения (8) является промежуток $(0, \infty)$. В этом промежутке функция $\beta(x)$ является монотонно возрастающей с областью значений $(0, 1)$. В силу этого произвольная ордината на графике зависимости $\beta(x)$ определяет уровень, по которому однозначно находится x, а так как x и ν при фиксированной температуре T связаны линейным соотношением (4), то произвольному уровню β однозначно соответствует некоторая частота ν_β.

Таким образом, с одной стороны, β является уровнем, по которому определяется некоторая граничная частота ν_β, а с другой стороны, величина β в силу свойств функции $\beta(x)$ является максимальной относительной методической погрешностью, которая возникает в частотном интервале $(0, \nu_\beta)$ при использовании приближения Рэлея–Джинса вместо распределения Планка. В связи с этим целесообразно назвать величину β погрешностным уровнем перехода от распределения Планка к приближению Рэлея–Джинса, а частоту ν_β — высокочастотной границей приближения Рэлея–Джинса по погрешностному уровню β.

Решение уравнения (6) с учетом (4) позволяет записать выражение для ν_β в виде

$$\nu_\beta = x(\beta)kT/h, \qquad (9)$$

чем и завершается задача аналитического описания.

Количественная картина, выполненная согласно (6), (9), ясно просматривается из таблицы.

В заключение автор выражает признательность В.А. Ильину за поддержку.

Список литературы

[1] *Кошелец В.П., Овсянников Г.А.* // Зарубежная радиоэлектроника. 1983. № 6. С. 31–50.
[2] *Гудков А.Л., Куликов В.А., Лаптев В.Н.* и др. // Письма в ЖТФ. 1986. Т. 12. Вып. 9. С. 527–530.
[3] *Гудков А.Л., Ильин В.А., Лаптев В.Н.* и др. // Письма в ЖТФ. 1988. Т. 14. Вып. 9. С. 826–829.
[4] *Ильин В.А., Мировский В.Г., Семин И.А., Эткин В.С.* // Радиотехника. 1988. № 12. С. 17–19.
[5] *Kanter H., Vernon F.L.* // J. Appl. Phys. 1972. Vol. 43. P. 3174–3183.
[6] *Завалеев В.П., Лихарев К.К.* // РиЭ. 1978. Т. 23. № 6. С. 1268–1278.
[7] *Рытов С.М., Кравцов Ю.А., Татарский В.И.* Введение в статистическую радиофизику. Случайные поля. Ч. 2. М.: Наука, 1978. 464 с.
[8] *Карлов Н.В., Чихачев Б.М.* // РиЭ. 1959. Т. 4. № 6. С. 1047–1051.