01

Аналитическое решение задачи о скин-эффекте при произвольном коэффициенте аккомодации тангенциального импульса электронов

© А.В. Латышев, А.А. Юшканов

Московский педагогический университет,
107005 Москва, Россия
E-mail: gslobod@arc.ru

(Поступило в Редакцию 23 февраля 1999 г.)

Получено аналитическое решение граничной задачи о поведении электрического поля и электронов в полупространстве, заполненном металлом, и с учетом коэффициента аккомодации тангенциального импульса электронов. Рассматриваются комплексные частоты внешнего электромагнитного поля, тангенциального к поверхности металла. Выделяются случаи нормального и аномального скин-эффектов, а в последнем — низко- и высокочастотные пределы.

Введение

В настоящее время имеется аналитическое решение задачи о скин-эффекте как при зеркальном, так и при диффузном отражении электронов от поверхности металла. Зеркальное отражение электронов от поверхности соответствует отсутствию аккомодации тангенциального импульса электронов (коэффициент аккомодации $q = 0$). Диффузное отражение электронов соответствует полной аккомодации их тангенциального импульса (коэффициент аккомодации $q = 1$). До настоящего времени отсутствует теория аналитического решения задачи о скин-эффекте при промежуточных значениях коэффициента аккомодации. Цель настоящей работы — устранить этот пробел.

Аналитическое решение граничных задач при произвольных значениях коэффициента зеркальности не удается получить ни для описания поведения газов, ни электронов в металле вблизи поверхности. Однако в кинетической теории газов разработаны [1] модифицированные граничные условия, учитывающие возможность введения произвольных значений коэффициента аккомодации тангенциального импульса при отражении молекул от поверхности (коэффициент аккомодации тангенциального импульса для случая зеркально-диффузных граничных условий совпадает с величиной $1 - \alpha$, где α — коэффициент зеркальности). Для таких граничных условий удается построить аналитическое решение граничных задач (изотермическое скольжение газа, тепловое и др.). Нашей целью является развитие аналитического подхода для решения граничных задач о поведении электронов в металле при произвольных значениях коэффициента аккомодации тангенциального импульса электронов. Коэффициент аккомодации q тангенциального импульса электронов равен отношению потока тангенциального импульса отраженных от поверхности электронов к потоку тангенциального импульса падающих на поверхность раздела электронов

$$q = \int\limits_{(+)} v_n v_\tau f d^3v \left[\int\limits_{(-)} v_n v_\tau f d^3v \right]^{-1}.$$

Здесь v_n — проекция скорости электронов, направленная по нормали к поверхности металла; v_τ — проекция скорости электронов на (плоскую в данной задаче) поверхность раздела; знаку "$+$" соответствует $v_n > 0$, знаку "$-$" соответствует $v_n < 0$. Аналитическое решение задачи об аномальном скин-эффекте в полупространстве было впервые получено в [2–4] методом Винера–Хопфа. Ее обобщения рассматривались в [5,6]. В [7,8] показано, что при изучении высокочастотных процессов в металлах чрезвычайно эффективен метод разложения решения по сингулярным обобщенным собственным функциям соответствующего характеристического уравнения (метод Кейза [9]). Диффузные граничные условия рассматривались в [10,11] для задачи о поведении электронной плазмы в электромагнитном поле, перпендикулярном поверхности. В тех работах [3–6], где применялся метод Винера–Хопфа, дискретные моды не выделялись. Одно из преимуществ метода Кейза состоит в том, что он позволяет найти явное выражение дискретных мод решения. Последние в ряде случаев вносят основной вклад в определение характеристик как электромагнитного поля, так и электронов проводимости. В ряде работ (см., например, [12]) подчеркивалась необходимость выделения дискретных мод. Кроме того, именно применяемый в работе метод Кейза позволяет провести наиболее полный и естественный анализ различных режимов скин-эффекта.

В настоящей работе установлено разложение исходной граничной задачи по собственным функциям соответствующего характеристического уравнения. Это разложение применяется для нахождения импеданса в случае произвольного коэффициента аккомодации тангенциального импульса электронов ($0 \le q \le 1$). Выделяется случай диффузных граничных условий, а также случай $q = 0$. Рассмотрены различные режимы скин-эффекта: нормальный и аномальный, причем в последнем случае изучены низко- и высокочастотные пределы. Удалось выявить связь между макрохарактеристиками отклика металла на внешнее поле (импеданс) и параметрами дискретного спектра в области аномального скин-эффекта. Применяемый метод позволяет не использовать интуитивные соображения типа концепции неэффективности [1,13].

Постановка задачи

Ограничимся случаем сферической поверхности Ферми и малыми частотами колебаний, пренебрегая токами смещения. Считаем внешнее поле малым, так что задача может быть рассмотрена в линейной постановке. Рассмотрим полупространство металла с декартовой системой координат с центром на поверхности и осью x, перпендикулярной поверхности и направленной в глубь металла. Ось y проведем вдоль направления электрического поля $E(x)\exp(\alpha t)$, а ось z — перпендикулярно направлению магнитного поля $H(x)\exp(\alpha t)$.

После отделения временно́й переменной система уравнений, описывающая поведение электрического поля и электронов в металле, имеет вид [2]

$$v_x\frac{\partial f_1}{\partial x}+(\nu+\alpha)f_1(x,v)=ev_yE(x)\frac{\partial f_0}{\partial\varepsilon},\quad E''(x)=Aj(x).$$

Здесь f_1 — поправка к фермиевской функции распределения электронов f_0, $f=f_0+f_1\exp(\alpha t)$, ε — энергия электронов, e — заряд, m — масса, v — скорость, j — ток, ν — частота столкновений электронов, $A=4\pi\alpha c^{-2}$,

$$j(x)=-2e\left(\frac{m}{2\pi\hbar}\right)^3\int v_yf_1(x,v)d^3v.$$

Введем обозначения

$$e(x)=E(x)/E_0,\qquad w_0=1+\alpha/\nu,$$

$$x'=x/(\tau v_F),\qquad \mu=v_x/v_F,$$

$$f_1=v_y\delta(v-v_F)\psi,\quad k=-\frac{eE_0}{2m\nu v_F},\quad \beta=\frac{ev_F^6\alpha}{\nu^2\pi\hbar^3c^2E_0}.$$

Здесь v_F — скорость электронов на поверхности Ферми, E_0 — амплитуда электрического поля на поверхности металла, $\delta(x)$ — дельта-функция. Переменную x' снова обозначим через x. Теперь система уравнений запишется в виде

$$\mu\frac{\partial\psi}{\partial x}+w_0\psi(x,\mu)=ke(x),$$

$$e''(x)=\beta\int\limits_{-1}^{1}(1-\mu'^2)\psi(x,\mu')d\mu'. \qquad (1)$$

Согласно задаче условия на поверхности металла и вдали от него имеют вид

$$\psi(0,\mu)=d,\quad 0<\mu<1;$$

$$\psi(\infty,\mu)=0,\quad -1<\mu<0;$$

$$e(0)=1,\qquad e(\infty)=0, \qquad (2)$$

где d — параметр, характеризующий среднюю скорость электронов, отраженных от поверхности металла.

Будем считать, что поток импульса электронов, отраженных от стенки, равен произведению $1-q$ на поток импульса электронов, падающих на стенку, т.е.

$$(1-q)\int\limits_{-1}^{0}(1-\mu'^2)\psi(0,\mu')\mu'd\mu'$$

$$=-\int\limits_{0}^{1}(1-\mu'^2)\psi(0,\mu')\mu'd\mu'.$$

Здесь q — коэффициент аккомодации тангенциального импульса электронов, т.е. вероятность, с которой электроны отражаются от поверхности. Из последних двух условий получаем

$$d=-4\frac{1-q}{q}\int\limits_{-1}^{1}(1-\mu'^2)\psi(0,\mu')\mu'd\mu'. \qquad (3)$$

Собственные функции

Разделение переменных

$$\psi_\eta(x,\mu)=\exp(-x/\eta),\qquad e_\eta(x)=\exp(-x/\eta)E(\eta),$$

где η — спектральный параметр, приводит к характеристической системе

$$(\eta-\mu)\Phi(\eta,\mu)=kw_0^{-1}\eta E(\eta),$$

$$E(\eta)=\beta w_0^{-2}\eta n(\eta),\qquad b=\beta w_0^{-2},$$

где

$$n(\eta)=\int\limits_{-1}^{1}(1-\mu^2)\Phi(\eta,\mu)d\mu.$$

Исключая $E(\eta)$ из двух последних уравнений, приходим к характеристическому уравнению

$$(\eta-\mu)\Phi(\eta,\mu)=\frac{1}{2}a\eta^3n(\eta),$$

где

$$a=-a_0\frac{\alpha}{(\nu+\alpha)^3},\qquad a_0=\frac{e^2v_F^5}{\pi m\hbar^3c^2},\qquad \nu=\frac{1}{\tau}.$$

При $\eta\in(-1,1)$ и $n(\eta)\equiv 1$ из характеристического уравнения сразу находим его собственные функции непрерывного спектра [14]

$$\Phi(\eta,\mu)=\frac{1}{2}a\eta^3P\frac{1}{\eta-\mu}+\frac{\lambda(\eta)}{1-\eta^2}\delta(\eta-\mu).$$

Здесь символ Px^{-1} означает распределение — главное значение интеграла от x^{-1}, $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака, $\lambda(z)$ — дисперсионная функция задачи,

$$\lambda(z)=1-az^2+az^2(1-z^2)\lambda_c(z),\quad \lambda_c(z)=1+\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}\frac{d\tau}{\tau-z}$$

есть дисперсионная функция Кейза (см. [9]).

Методом, развитым в [15], выясним структуру дискретного спектра характеристического уравнения, который по определению состоит из нулей дисперсионной функции, лежащих вне разреза $[-1, 1]$. Сначала рассмотрим однородную краевую задачу Римана

$$X^+(\mu) = G(\mu)X^-(\mu), \qquad 0 < \mu < 1, \tag{4}$$

где

$$G(\mu) = \lambda^+(\mu)/\lambda^-(\mu) = \omega^+(\mu)/\omega^-(\mu).$$

Здесь

$$\omega^\pm(\mu) = \lambda^\pm/a = \delta_1 - p(\mu) + i(\delta_2 \pm q(\mu)),$$

$$\delta = 1/a = \delta_1 + \delta_2,$$

причем

$$p(\mu) = \mu^2\left[1 - (1-\mu^2)\lambda_c(\mu)\right], \quad q(\mu) = \frac{\pi}{2}\mu^3(1-\mu^2).$$

Пусть $\Theta(\mu) = \arg G(\mu)$ — регулярная ветвь аргумента функции $G(\mu)$, фиксированная условием $\Theta(0) = 0$. Найдем индекс [16] задачи (4). Имеем

$$\varkappa = \frac{1}{2\pi}[\Theta(\mu)]_{(0.1)} = \frac{1}{4\pi}[\Theta(\mu)]_{(-1.1)} = \frac{1}{4\pi}[\arg\omega(z)]_\gamma,$$

где γ — контур, охватывающий по часовой стрелке разрез $[-1, 1]$ и не содержащий внутри себя нулей дисперсионной функции.

Пусть N и P — число нулей и полюсов функции $\omega(z)$ в плоскости вне разреза $[-1, 1]$. Согласно предыдущему равенству и принципу аргумента [16], индекс однородной задачи (4) равен $\varkappa = (N-P)/2$. Введем в рассмотрение область на δ-плоскости

$$\Delta^+ = \{\delta = \delta_1 + i\delta_2 : \quad 0 < \delta_1 < 1, \quad |\delta_2| < q(\delta_1)\};$$

через Δ^- обозначим ее внешность, через γ_0 обозначим ее границу. Как и в [15], можно показать, что если $\delta \in \Delta^+$, то $\varkappa = 1$ и, следовательно, $N = 4$, ибо $P = 2$ при всех $\delta \in \Delta^\pm$, если $\delta \in \Delta^-$, то $\varkappa = 0$ и, следовательно, $N = 2$. Тот факт, что $P = 2$, вытекает из разложения

$$\omega(z) = -\frac{2}{3}z^2 + \delta - \frac{2}{15} + o(1), \qquad |z| \to \infty. \tag{5}$$

Учитывая поведение индекса $\varkappa = \varkappa(\delta)$ при $\delta \in \Delta^+(\Delta^-)$, возьмем в качестве (неисчезающего и ограниченного в концевых точках промежутка интегрирования) решение задачи (4) функцию

$$X(z) = z^{-\varkappa}\exp V(z),$$

$$V(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^1 [\ln G(\tau) - 2\pi i\varkappa]\frac{d\tau}{\tau - z}.$$

Нули дисперсионной функции в явном виде находятся из формул для ее факторизации (которые приводятся без вывода)

$$\omega(z) = \frac{2}{3}\left(\eta_0^2 - z^2\right)\left(\eta_1^2 - z^2\right)X(z)X(-z), \quad z \in \Delta^+,$$

$$\omega(z) = \frac{2}{3}\left(\eta_0^2 - z^2\right)X(z)X(-z), \quad z \in \Delta^-.$$

Выпишем собственные (дискретные) функции, отвечающие найденному спектру,

$$\Phi(\pm\eta_k, \mu) = \pm\frac{1}{2}a\eta_k^3\frac{1}{\pm\eta_k - \mu},$$

$$E(\pm\eta_k) = b\eta_k^2 \qquad (k = 0,\ 1).$$

На изучении граничного режима мы не останавливаемся, ибо в работе [17] этот режим подробно изучается на примере задачи Рэлея. Там же показана непрерывность функции распределения и ее интегральных характеристик в плоскости комплексных частот для ситуации, когда индекс задачи Рэлея меняется скачком.

Найдем нули дисперсионной функции в явном виде в двух предельных случаях $|\delta| \ll 1$ и $|\delta| \gg 1$.

Первый случай $|\delta| \ll 1$ соответствует аномальному скин-эффекту. В этом случае $\omega^\pm = \delta \pm i\pi\mu^3/2$. Если δ лежит во 2-й четверти, то дискретный спектр состоит из двух нулей, один из которых $\eta_1 = r\exp(i\arg\delta/3) + i\pi/6$, $r = \sqrt[3]{2|\delta|/\pi}$ лежит в 1-й четверти, $\Re\eta_1 > 0$, ибо $\pi < \arg\delta < \pi/2$, а второй $\eta_2 = -\eta_1$ лежит в 3-й четверти. Если δ лежит в 3-й четверти, то $\eta_1 = r\exp(i\arg\delta/3 + i\pi/6 + i2\pi/3)$ лежит во 2-й четверти, ибо $-\pi < \arg\delta < -\pi/2$, а $\eta_2 = -\eta_1$. Отметим, что если $\delta < 0$ ($\arg\delta = \pi$), то дисперсионная функция имеет два чисто мнимых нуля $\eta_0 = ri$ и $-\eta_0$. Если же δ — чисто мнимое число, то при $\arg\delta = \pi/2$ $\eta_0 = r\exp(i\pi/3)$, $\eta_1 = -\eta_0$; при $\arg\delta = -\pi/2$ $\eta_0 = r\exp(-i\pi/3)$, $\eta_1 = -\eta_0$.

Пусть δ лежит в правой полуплоскости. В этом случае дисперсионная функция имеет четыре нуля, два из которых

$$\eta_k = r\exp[i(\arg\delta/3 + \pi/6 + 2\pi k/3)] \qquad (k = 0,\ 1)$$

лежат в верхней полуплоскости, причем $\Re\eta_0 > 0$, $\Re\eta_1 < 0$, а два других $\eta_2 = -\eta_1$, $\eta_3 = -\eta_0$.

В рамках аномального скин-эффекта выделим два важных случая: низкочастотный и высокочастотный. В низкочастотном случае частота колебаний электромагнитного поля много меньше частоты столкновений электронов $|\alpha| \ll \nu$, кроме того, $\nu|\alpha| \ll a_0$. В этом случае $w_0 = 1 + \alpha/\nu = 1$, $\delta = -(\nu+\alpha)^3/\alpha a_0 = -\nu^3/\alpha a_0 = -\nu^3 i/\omega a_0$. В этом случае имеются два нуля $\pm\eta_0$, где $\eta_0 = r\exp(-i\pi/3)$. В высокочастотном случае (близком к осцилляционному режиму) частота колебаний электромагнитного поля много больше частоты столкновений электронов $|\alpha| \gg \nu$. Этот случай соответствует низким температурам и металлам повышенной чистоты. В этом случае $w_0 = \alpha\tau = -i\omega\tau$, $\delta = -\alpha^2/a_0$, а так как $\alpha = -i\omega$, то $\delta = \omega^2/a_0 > 0$, поэтому дисперсионная функция имеет четыре нуля, выписанные ранее.

Второй случай $|\delta| \gg 1$ соответствует нормальному скин-эффекту. В этом случае дисперсионная функция имеет два нуля, которые, как видно из (5), вычисляются по формуле

$$\eta_k = r\exp[i(\arg\delta/2 + \pi k)], \quad r = \sqrt{3|\delta|/2} \quad (k = 0,\ 1);$$

при этом всегда $\Re\eta_0 > 0$, если δ лежит на отрицательной части действительной оси; если же $\delta < 0$, то $\eta_0 = ri$; если же $\delta > 0$, то нули действительные $\pm\eta_0$.

Разложение решения по собственным функциям

Составим общее решение системы (1) в виде разложения по собственным решениям дискретного и непрерывного спектров, удовлетворяющее граничным условиям (2) (условиям на бесконечности)

$$\psi(x,\mu) = \sum_{k=0}^{1}\frac{1}{2}a\eta_k^3\frac{1}{\eta_k-\mu}\exp\left(-w_0\frac{x}{\eta_k}\right) + \int\limits_0^1 \exp\left(-w_0\frac{x}{\eta}\right)\Phi(\eta,\mu)A(\eta)d\eta, \qquad (6)$$

$$e(x) = \sum_{k=0}^{1}A_k b\eta_k^2\exp\left(-w_0\frac{x}{\eta_k}\right) + b\int\limits_0^1 \exp\left(-w_0\frac{x}{\eta}\right)\eta^2 A(\eta)d\eta. \qquad (7)$$

Здесь A_k $(k = 0,\ 1)$ — неизвестные коэффициенты, отвечающие дискретному спектру, причем $A_1 = 0$, если $\delta \in \Delta^-$; $A(\eta)$ — неизвестная функция, называемая коэффициентом непрерывного спектра; $\Re w_0/\eta_k > 0$ $(k = 0,\ 1)$, $\Re w_0 > 0$.

Коэффициенты разложения (6) и (7) найдем из граничных условий. Пусть $\delta \in \Delta^+$. Из этих разложений при $x = 0$ имеем

$$\sum_{k=0}^{1}A_k\frac{1}{2}\frac{\eta_k^3}{\eta_k-\mu} + a\frac{1}{2}\int\limits_0^1\frac{\eta^3A(\eta)}{\eta-\mu}d\eta + \frac{\lambda(\mu)}{1-\mu^2}A(\mu) = d, \quad 0 < \mu < 1, \qquad (8)$$

$$A_0\eta^2 + A_1\eta^2 + \int\limits_0^1 \eta^2A(\eta)d\eta = 1/b. \qquad (9)$$

Отметим, что уравнение (8) является *полным* сингулярным интегральным уравнением с ядром Коши. В этом легко убедиться, если подставить разложение (6) в граничное условие (3) для определения постоянной d. Для решения такого уравнения воспользуемся [15] одним из способов регуляции — способом Карлемана–Векуа, заключающимся в использовании явного решения характеристического уравнения.

Введем вспомогательную функцию

$$N(z) = \frac{1}{2}\int\limits_0^1\frac{\eta^3A(\eta)}{\eta-z}d\eta.$$

С помощью граничных значений $N(z)$ и $\lambda(z)$ сведем уравнение (8) к неоднородной краевой задаче Римана

$$\lambda^+(\mu)\left[N^+(\mu) - d - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{1}\frac{A_k\eta_k^3}{\mu-\eta_k}\right] = \lambda^-(\mu)\left[N^-(\mu) - d - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{1}\frac{A_k\eta_k^3}{\mu-\eta_k}\right], \quad 0 < \mu < 1.$$

Теперь воспользуемся задачей (4) и сведем последнее уравнение к задаче нахождения аналитической функции по ее нулевому скачку на разрезе

$$X^+(\mu)\left[N^+(\mu) - d - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{1}\frac{A_k\eta_k^3}{\mu-\eta_k}\right] = X^-(\mu)\left[N^-(\mu) - d - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{1}\frac{A_k\eta_k^3}{\mu-\eta_k}\right], \quad 0 < \mu < 1.$$

Найдем ее общее решение

$$N(z) = d + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{1}\frac{\eta^3A(\eta)}{z-\eta_k} + X(z)^{-1}\sum_{k=0}^{1}\frac{c_k}{z-\eta_k}, \qquad (10)$$

где c_0 и c_1 — произвольные постоянные.

Устраняя полюсы у общего решения (10), получаем

$$c_k = -\frac{1}{2}A_k\eta_k^3X(\eta_k) \qquad (k = 0,\ 1).$$

Из условия $N(\infty) = 0$ находим

$$d + c_0 + c_1 = 0. \qquad (11)$$

Подставляя общее решение (10) в формулу Сохоцкого для вспомогательной функции $N(z)$, найдем коэффициент непрерывного спектра

$$\pi i\mu^3A(\mu) = \left(\frac{1}{X^+(\mu)} - \frac{1}{X^-(\mu)}\right)\sum_{k=0}^{1}\frac{c_k}{\mu-\eta_k}. \qquad (12)$$

С помощью (12) вычислим интеграл из (9)

$$\int\limits_0^1\eta^2A(\eta)d\eta = \sum_{k=0}^{1}\frac{2c_k}{\eta_k}[J(\eta_k) - J(0)],$$

где

$$J(\eta_k) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^1\left[\frac{1}{X^+(\mu)} - \frac{1}{X^-(\mu)}\right]\frac{d\mu}{\mu-\eta_k} \quad (k = 0,\ 1).$$

Для вычисления этого интеграла воспользуемся интегральным представлением, которое приведем без вывода

$$\frac{1}{X(z)} = z - V_1 + \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \left[\frac{1}{X^+(\mu)} - \frac{1}{X^-(\mu)}\right]\frac{d\mu}{\mu - z},$$

где

$$V_1 = -\frac{1}{2\pi i}\int_0^1 [\ln G(\tau) - 2\pi i]d\tau.$$

Теперь ясно, что $J(\eta_k) = X(\eta_k)^{-1} - \eta_k + V_1$, откуда

$$J(\eta_k) - J(0) = \frac{1}{X(\eta_k)} - \eta_k - \frac{1}{X(0)},$$

кроме того, нам понадобится производная $J'(0) = -X'(0)/X^2(0) - 1$. Следовательно, интеграл из (9) равен

$$\int_0^1 \eta^2 A(\eta)d\eta = \sum_{k=0}^{1}\frac{2c_k}{\eta_k}\left[\frac{1}{X(\eta_k)} - \eta_k - \frac{1}{X(0)}\right],$$

откуда

$$R_2 = -\sum_{k=0}^{1}\frac{2c_k}{\eta_k}\left(\eta_k + \frac{1}{X(0)}\right), \qquad (13)$$

где

$$R_l = \int_0^1 \eta^l A(\eta)d\eta + \sum_{k=0}^{1} A_k\eta_k^l \qquad (l = 1,\ 2,\ 3).$$

Подставляя (13) в (9) и учитывая (11), имеем

$$-\frac{2c_0 b}{X(0)}\left(\frac{1}{\eta_0} - \frac{1}{\eta_1}\right) + 2bd\left(1 + \frac{1}{\eta_1 X(0)}\right) = 1.$$

Возьмем теперь граничное условие (3). Подставим в это условие разложение (6). Учитывая, что первые моменты собственных функций непрерывного и дискретного спектров соответственно равны

$$\int_{-1}^{1}(1-\mu^2)F(\eta,\mu)\mu d\mu = \eta - \frac{2}{3}a\eta^3,$$

$$\int_{-1}^{1}(1-\mu^2)F(\eta_k,\mu)\mu d\mu = \eta_k - \frac{2}{3}a\eta_k^3 \qquad (k = 0,\ 1),$$

получаем уравнение

$$d\frac{q}{4(1-q)} + R_1 - \frac{2}{3}aR_3 = 0.$$

Теперь, согласно (13) и (11),

$$R_1 = \frac{2c_0}{X(0)}\left(\frac{1}{\eta_0} - \frac{1}{\eta_1}\right)\left(\frac{X'(0)}{X(0)} - \frac{1}{\eta_0} - \frac{1}{\eta_1}\right) - \frac{2d}{\eta_1 X(0)}\left(\frac{X'(0)}{X(0)} - \frac{1}{\eta_1}\right),$$

$$R_3 = 2c_0(\eta_1 - \eta_0) + 2d(\eta_1 - V_1).$$

Из системы полученных уравнений находятся однозначно оставшиеся свободные параметры d и c_0 общего решения (10). Справедливость разложений (6) и (7) для случая $\delta \in \Delta^+$ установлена.

Точные формулы для вычисления импеданса

Пусть сначала $\delta \in \Delta^+$. Возьмем разложение (7) для электрического поля и продифференцируем его; находим

$$e'(0) = -bw_0\left[\sum_{k=0}^{1} A_k\eta_k + \int_0^1 \eta A(\eta)d\eta\right]$$

или, согласно введенным ранее обозначениям, $e'(0) = -bw_0 R_1$, где R_1 определяется согласно (13). Импеданс вычисляется по формуле $Z = Ae(0)/e'(0)$. Согласно граничному условию, $e(0) = 1$, поэтому $Z = A/e'(0)$. Обозначим далее

$$g(\eta_0, \eta_1) = \frac{X'(0)}{X(0)} - \frac{1}{\eta_0} - \frac{1}{\eta_1}.$$

Тогда находим точное выражение для импеданса

$$Z = \frac{A}{w_0} \times \frac{g - 1/\eta_0\eta_1 X(0) + q/8(1-q) - 2a(\eta_0\eta_1 X(0) + \eta_0 + \eta_1 - V_1)/3}{g[q/8(1-q) - 2a(\eta_0 + \eta_1 - V_1)/3] - 2a/3}. \qquad (14)$$

Полагая в (14) $q = 0$, получаем значение импеданса для случая, когда коэффициент тангенциального импульса электронов равен нулю

$$Z = -\frac{3A}{2aw_0} \times \frac{g - 1/\eta_0\eta_1 X(0) - 2a(\eta_0\eta_1 X(0) + \eta_0 + \eta_1 - V_1)/3}{g(\eta_0 + \eta_1 - V_1) + 1}. \qquad (15)$$

При $q \to 1$ на основании (14) получаем значение импеданса при диффузных граничных условиях

$$Z = \frac{A}{w_0}g(\eta_0, \eta_1)^{-1}.$$

Пусть теперь $\delta \in \Delta^-$. Рассуждая точно так же, получим точное выражение для импеданса

$$Z = \frac{A}{w_0} \times \frac{g(\eta_0) + 1/\eta_0 X(0) + q/8(1-q) + 2a(\eta_0 X(0) - \eta_0 + V_1)/3}{g(\eta_0)[q/8(1-q) - 2a(\eta_0 - V_1)/3] - 2a/3}, \qquad (16)$$

где $g(\eta_0) = X'(0)/X(0) - 1/\eta_0$.

Рассмотрим предельные случаи этой формулы при $q=0$ и $q\to 1$. В первом случае получаем выражение импеданса при отсутствии аккомодации тангенциального импульса электронов

$$Z=-\frac{3A}{2aw_0}\times\frac{g(\eta_0)+1/\eta_0X(0)+2a(\eta_0X(0)+\eta_0-V_1)/3}{g(\eta_0)(\eta_0-V_1)+1}, \quad (17)$$

а во втором — значение импеданса при диффузных граничных условиях

$$Z=\frac{A}{w_0}g(\eta_0)^{-1}. \quad (18)$$

Исследование предельных случаев

Исследование предельных случаев начнем со случая нормального скин-эффекта. При $\delta\in\Delta^-$ $(\delta<0)$ имеем

$$\frac{X'(0)}{X(0)}=V'(0)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^1\operatorname{arctg}\frac{\pi\mu^3(1-\mu^2)}{2(\delta-p(\mu))}\,\frac{d\mu}{\mu^2}.$$

Отсюда при больших $|\delta|$ получаем

$$V'(0)=\frac{1}{2\delta}\int\limits_0^1\mu(1-\mu^2)d\mu=\frac{1}{8\delta},$$

а так как в рассматриваемом случае $\delta<0$, $\eta_0=-ri$, $r=\sqrt{3|\delta|/2}$, то $V'(0)-1/\eta_0\approx -1/\eta_0$, следовательно, согласно (18), для диффузных граничных условий $Z=-A\eta_0/w_0$. Найдем $V(0)$ и V_1

$$V(0)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^1\operatorname{arctg}\frac{\pi\mu^3(1-\mu^2)}{2(\delta-p(\mu))}\frac{d\mu}{\mu},$$

$$V_1=-\frac{1}{\pi}\int\limits_0^1\operatorname{arctg}\frac{\pi\mu^3(1-\mu^2)}{2(\delta-p(\mu))}d\mu.$$

При больших $|\delta|$ на основании этих формул имеем

$$V(0)=\frac{1}{2\delta}\int\limits_0^1\mu^2(1-\mu^2)d\mu=\frac{1}{15\delta},$$

$$V_1=-\frac{1}{2\delta}\int\limits_0^1\mu^3(1-\mu^2)d\mu=-\frac{1}{24\delta}.$$

Теперь, согласно (17), для случая $q=0$ получаем ту же формулу $Z=-A\eta_0/w_0$, а при произвольных значениях коэффициента аккомодации на основании (16) получаем

$$Z=-\frac{A\eta_0}{w_0}\left[1-\frac{2(1-q)}{9\delta(q\delta+1-q)}\right].$$

Перейдем к рассмотрению аномального скин-эффекта. Начнем со случая низкочастотного предела $w_0=1+\alpha/\nu\approx 1$, $\delta=-i\delta_0$ $(\delta_0>0)$, $\eta_0=r\exp(-i\pi/3)$, $r=\sqrt[3]{2|\delta|/\pi}$. Воспользуемся асимптотикой функции $\omega(z):\omega^{\pm}(\mu)=\delta\pm i\pi\mu^3/2$. Следовательно,

$$V'(0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^1\ln\frac{\delta+i\pi\tau^3/2}{\delta-i\pi\tau^3/2}\,\frac{d\tau}{\tau^2}.$$

После очевидной замены переменной отсюда получаем, что $V'(0)=V'/(3r)$, где

$$V'=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^\infty x^{-4/3}\ln\frac{1-x}{1+x}dx=i\frac{\sqrt{3}}{2}(1+i\sqrt{3}).$$

Следовательно, $V'(0)=V'\exp(-i\pi/3)/(3\eta_0)=i/(\sqrt{3}\eta_0)=V_0'/\eta_0$, где $V_0'=i/\sqrt{3}$. Находя асимптотику при $\delta\to 0$ выражений $V(0)$, V_1 и воспользовавшись (16), получаем

$$Z=\frac{A}{w_0}\,\frac{\eta_0}{V_0'-1},$$

или $Z=-Ar/(2w_0)$.

Рассмотрим случай высокочастотного предела. Здесь $w_0=-i\omega/\nu$, $\delta>0$; при этом существуют четыре дискретные моды, у которых $\eta_0=r\exp(-i\pi/6)$, $\eta_1=r\exp(-i5\pi/6)$, $r=\sqrt[3]{2\delta/\pi}$.

Функцию $X(z)$ представим в виде $X(z)=(z-1)^{-1}\times\exp V_0(z)$, где

$$V_0(0)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^1\operatorname{arctg}\frac{\pi\tau^3(1-\tau^2)}{2(\delta-p(\tau))}\,\frac{d\tau}{\tau-z}.$$

Заметим, что величина V_1 является ограниченной при $\delta\to 0$; кроме того, находим, что

$$\eta_0\eta_1X(0)=\sqrt{3\delta/2},$$

$$X'(0)/X(0)=V_0'(0)+1, \qquad \eta_0\eta_1=-r^2.$$

Воспользуемся асимптотикой функции $\omega(z)$ и найдем, что

$$V_0'(0)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^1\operatorname{arctg}\frac{\pi\tau^3}{2\delta}\,\frac{d\tau}{\tau^3},$$

откуда имеем $V_0'(0)=V_0'/r$, где

$$V_0'=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^1 x^{-4/3}\operatorname{arctg}x\,dx=\frac{3}{2}\left[\frac{1}{\pi}\ln 2-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}\right].$$

Теперь, согласно (14) (или (15)), получаем выражение для импеданса

$$Z=\frac{A}{w_0}\,\frac{r}{V_0'-1}.$$

Эта же формула справедлива и для диффузных граничных условий. Требуется найти $V(0)$, $V'(0)$ и V_1. Воспользуемся формулой факторизации дисперсионной функции, из которой находим

$$\delta = \frac{2}{3}\eta_0^2\eta_1^2 \exp(2V(0)),$$

следовательно, $X(0) = i(\pi/4)^{2/3}\sqrt{3}\delta^{-1/6}$. Покажем, что величина V_1 является ограниченной при $\delta \to 0$. В самом деле, из равенства

$$V_1 = -\frac{1}{\pi}\int\limits_0^1 \operatorname{arctg}\frac{\pi\mu^3(1-\mu^2)}{2(\delta - p(\mu))}d\mu,$$

замечая, что $p(\mu) \approx \mu^3$, имеем

$$V_1 \approx \frac{1}{2}\int\limits_0^1 (1-x^2)dx = \frac{1}{3}.$$

Для вычисления $V'(0)$ воспользуемся асимптотическим представлением функции ω: $\omega^{\pm}(\mu) = \delta \pm i\pi\mu^3/2$. Тогда

$$V_0'(0) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^1 \operatorname{arctg}\frac{\pi\mu^3}{2\delta}\,\frac{d\mu}{\mu^2}.$$

Сделаем замену переменной $\pi\mu^2/(2\delta) = x$ или $\mu = \sqrt[3]{2\delta/\pi}$. Следовательно,

$$V_0'(0) = \frac{1}{r}\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \operatorname{arctg} x \frac{dx}{x^{4/3}} = \frac{3}{\pi r}\left[\ln\sqrt{2} + \frac{\pi}{2}\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right],$$

или $V_0'(0) = V_0'/r$, где $V_0' = 3\left[\ln\sqrt{2} + \pi\left(-1/2 + \sqrt{3}/3\right)/2\right]/\pi$. Для диффузных граничных условий теперь находим, что

$$Z = \frac{A}{w_0}\frac{\sqrt{2\delta/\pi}}{V_0' - i}.$$

Нетрудно проверить, что и в общем случае, согласно (15), импеданс вычисляется по этой же формуле.

Заключение

В настоящей работе развивается новый метод аналитического решения классической задачи о скин-эффекте в обобщенной постановке, когда частота колебаний внешнего электрического поля может принимать не только действительные, но и комплексные значения, а коэффициент аккомодации тангенциального импульса электронов q является произвольным $(0 \le q \le 1)$. Предлагаемый метод состоит в разложении решения исходной граничной задачи по сингулярным обобщенным собственным функциям соответствующего характеристического уравнения. Именно этот метод позволил всесторонне исследовать задачу. Так, в работе в явном виде найдены дискретные моды решения, построена область D^+ значений частот, такая что, если частота лежит в этой области, существует четыре дискретных решения исходной системы, а если частота лежит вне этой области, существует два дискретных решения. Граница области D^+ является линией критических частот: при переходе частоты из этой области в ее внешность изменяется структура решения.

Особенность данной граничной задачи заключается в том, что здесь впервые для теории переноса разложения решения граничной задачи по собственным функциям соответствующего характеристического уравнения сводится к полному сингулярному интегральному уравнению с ядром Коши, а не характеристическому, как обычно. Для его решения совершенно естественно применяется метод регуляризации Карлемана–Векуа, состоящий в использовании явного решения характеристического уравнения.

Список литературы

[1] *Черчиньяни К.* Теория и приложения уравнения Больцмана. М.: Мир, 1978. 495 с.

[2] *Абрикосов А.А.* Введение в теорию нормальных металлов. М.: Наука, 1972. 288 с.

[3] *Reuter G.E.H., Sondheimer E.H.* // Proc. Roy. Soc. 1948. Vol. A 195. P. 336–350.

[4] *Dingle R.B.* // Physica. 1953. Vol. 19. P. 311–329.

[5] *Платцман Ф., Вольф П.* Волны и взаимодействия в плазме твердого тела. М.: Мир, 1975. 436 с.

[6] *Волошин И.Ф., Скобов В.Г., Фишер Л.М., Чернов А.С.* // ЖЭТФ. 1981. Т. 80. Вып. 1. С. 183–198.

[7] *Латышев А.В., Лесскис А.Г., Юшканов А.А.* // ТМФ. 1992. Т. 90. Вып. 2. С. 179–189.

[8] *Латышев А.В., Юшканов А.А.* // ЖВММФ. 1993. Т. 33. № 2. С. 259–270.

[9] *Кейз К., Цвайфель П.* Линейная теория переноса. М.: Мир, 1972. 384 с.

[10] *Латышев А.В., Юшканов А.А.* // ЖВММФ. 1993. Т. 33. № 3. С. 600–610.

[11] *Латышев А.В., Юшканов А.А.* // Поверхность. 1993. № 2. С. 25–32.

[12] *Гохфельд В.М., Гулянский М.А., Каганов М.И., Плявенек А.Г.* // ЖЭТФ. 1985. Т. 89. С. 985–1001.

[13] *Займан Дж.* Электроны и фононы. М.: ИЛ, 1962. 488 с.

[14] *Владимиров В.С.* Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1976. 280 с.

[15] *Латышев А.В., Юшканов А.А.* // ТМФ. 1992. Т. 92. № 1. С. 127–138.

[16] *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.

[17] *Латышев А.В., Юшканов А.А.* // ТМФ. 1998. Т. 116. № 2. С. 305–320.