02;10

Локализация и излучение частиц магнитной ловушкой

© Ю.Г. Павленко

Специализированный учебно-научный центр Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова,
121357 Москва, Россия

(Поступило в Редакцию 11 мая 1999 г.)

Рассмотрены три конфигурации магнитного поля, порождающие трехмерные потенциальные ямы для нейтральных атомов и ферромагнитных частиц. Обсуждается возможность формирования направленного пучка частиц.

Введение

Ионы, охлажденные до сверхнизких температур и локализованные в электромагнитных ловушках, представляют широкие возможности для исследования квантовых переходов, квантового характера статистики фотонов, оптической бистабильности, проблем создания стандартов частоты. Эксперименты с ансамблем частиц позволили наблюдать формирование упорядоченных структур и возникновение явлений типа фазовых переходов [1,2]. Поэтому большое значение приобретает анализ проблем локализации, накопления и удержания нейтральных частиц в магнитной ловушке [1,3–5]. Другой аспект этой задачи связан с возможностью излучения частиц из ловушки и реализации устройства, получившего название атомный лазер [6]. Излучение частиц может быть стимулировано каким-либо триггерным механизмом [7,8].

Движение частицы, обладающей магнитным моментом, описывается системой шести нелинейных уравнений относительно координат центра масс и компонент магнитного момента. В настоящей работе предложен новый подход к динамике магнитного момента в магнитном поле. Уравнения движения магнитного момента представлены в гамильтоновой форме с фундаментальной скобкой Пуассона комплексных "координат" и "импульсов". Решение представляет собой каноническое преобразование, обращающее новый гамильтониан в нуль. Рассмотрено несколько конфигураций постоянного аксиально-симметричного неоднородного магнитного поля, порождающих трехмерные потенциальные ямы, удерживающие охлажденные частицы в ограниченной области. Резонансный радиочастотный импульс возбуждает спин–флип переход в состояние инфинитного движения. Здесь возникает проблема перехода к полуограниченному режиму движения частиц. Показано, что асимметричная конфигурация поля позволяет получить направленный пучок частиц, вылетающих из ловушки. Для реализации этого эффекта в случае симметричной ловушки, образованной полем трех кольцевых токов, необходим дополнительный виток.

Уравнения движения частиц и магнитного момента

Энергия взаимодействия частицы с магнитным полем $U(t,x) = -\boldsymbol{\mu}\mathbf{B}$, где $\boldsymbol{\mu} = g\mu_B\mathbf{S}$ — среднее значение оператора магнитного момента, $\mathbf{S}$ — эффективный средний спин, g — фактор Ланде, $\mu_B = e\hbar/2m_e$, $\mu_B = 5.787 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{eV/T}$ — магнетон Бора [9]. Для нейтрона и протона $g\mu_B \to g_{n,p}\mu_N$, где $g_n = -3.826$, $g_p = 5.586$, $\mu_N = 3.15 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{eV/T}$ — ядерный магнетон. Магнитный момент ферромагнитной частицы $\mu = MV$, где M — объемная плотность магнитного момента, V — объем частицы; $M_{\max} \sim 10^7$ $(\mathrm{J/T\cdot cm^3})$.

Уравнение движения центра масс атома в квазиоднородном поле следует из уравнения Эренфеста

$$md^2\mathbf{x}/dt^2 = g\mu_B S_n \partial B_n/\partial\mathbf{x} + m\mathbf{g}_0, \qquad (1)$$

где $\mathbf{g}_0$ — ускорение свободного падения.

Уравнение (1) справедливо также для ферромагнитной частицы [10]. Вектор $\mathbf{S}$ удовлетворяет уравнению

$$d\mathbf{S}/dt = \boldsymbol{\Omega}\cdot\mathbf{S}, \qquad (2)$$

где $\boldsymbol{\Omega} = -\gamma\mathbf{B}$, $\gamma = g\mu_B/\hbar$.

Очевидно, $\mathbf{S}^2(t) = S_0^2$ — первый интеграл. Отметим, что в электронных системах циклотронная частота $\nu\,[\mathrm{GHz}] = eB/(2\pi m_e) = 27.9922\,B\,[\mathrm{T}]$.

Рассмотрим движение частицы в магнитном поле, представляющем собой суперпозицию постоянного аксиально-симметричного поля индукцией $\mathbf{B}_s(x)$, постоянного однородного поля индукцией $\mathbf{B}_0 = (0,0,b_0)$ и высокочастотного магнитного поля индукцией

$$\mathbf{B}_\sim(t) = (b_p\cos\omega t, -b_p\sin\omega t, 0)f(t). \qquad (3)$$

Функция $f(t) = 0$ при $t < t_0$, $t > t_0 + \tau$; $f(t) = 1$ в интервале $t_0 \le t \le t_0 + \tau$.

Вектор-потенциал магнитного поля $A_s(\rho,\varphi,z) = (0, A_\varphi, 0)$, удовлетворяющий условиям $\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$, $\operatorname{rot}\mathbf{B} = 0$, может быть вычислен в цилиндрической системе координат в виде ряда $A_\varphi = A(\rho, z)$ [11]

$$A(\rho, z) = \rho b_s(z)/2 - \rho^3 b_s''(z)/16 + \ldots (-1)^{n+1} 1/[(n-1)!\, n!](\rho/2)^{2n-1} b_s^{(2n-2)}(z), \quad (4)$$

где $\rho = (x^2 + y^2)^{1/2}$, $b_s(z)$ — произвольная функция.

Из (4) найдем вектор индукции постоянного неоднородного магнитного поля

$$\mathbf{B}_s(\mathbf{x}) \approx \big[-(x/2)(b_s' - b_s'''\rho^2/8), - (y/2)(b_s' - b_s'''\rho^2/8), b_s - (\rho^2/4) b_s''\big]. \quad (5)$$

Уравнение силовой линии постоянного поля индукцией $\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_s(\mathbf{x})$ имеет вид $\rho[A(\rho, z) + \rho b_0/2] = \mathrm{const}$. Рассмотрим несколько конфигураций неоднородного магнитного поля.

a) Ловушка гиперболического типа. Характерный признак этой системы — индукция поля равна нулю на оси z и возрастает при удалении от оси. Пусть

$$b_s(z) = a_1 z + a_2 z^2/2 + a_3 z^3/6. \quad (6)$$

Первое слагаемое определяет квадрупольное поле, второе — поле магнитной бутылки.

b) Квазипериодическое магнитное поле можно задать функцией $b_s(z) = b \cos kz$, где $k = 2\pi/\lambda$, λ — период пространственной структуры. В этом случае

$$\mathbf{B}_s(x) \approx \big[(bkx/2)\sin kz, (bky/2)\sin kz, b(1 + k^2\rho^2/4)\cos kz\big]. \quad (7)$$

c) В случае витка с током радиусом a, расположенного в плоскости $z = h$ с центром на оси z, функция $b_s(z) = \mu_0 I a/(2R^3)$, где $R^2 = a^2 + (z-h)^2$, I — сила тока, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Н/А^2 — магнитная постоянная.

Уравнение движения частицы в магнитной ловушке

Из (1), (2) следует закон изменения полной энергии

$$dE/dt = -g\mu_B \mathbf{S}\partial\mathbf{B}_t/dt, \quad (8)$$

где $E = mv^2/2 - g\mu_B \mathbf{S}(t)\mathbf{B}_t(t, \mathbf{x}) - m\mathbf{g}_0\mathbf{x}$, $\mathbf{B}_t(t, \mathbf{x}) = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_s(x) + \mathbf{B}_\sim(t)$ — полная индукция.

Найдем вначале решение уравнений (1), (2) в интервале времени $0 \le t \le t_0$, полагая $\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_s(\mathbf{x})$. Пространственные и спиновые переменные изменяются с характерными частотами $\omega_a = (\mu B''/m)^{1/2}$ и $\Omega = \gamma B$; $B'' \sim 200$ T/m^2, $B \sim 1$ T. Поскольку $\omega_a \ll \Omega$, то в уравнении (1) можно пренебречь вкладом быстроосциллирующих компонент вектора $\mathbf{S}$ и перейти к медленным пространственным переменным. Эта процедура эквивалентна замене S средним значением. В Приложении получено решение уравнения (2) и показано, что среднее значение спина $\langle \mathbf{S}\rangle = C\mathbf{B}/B$, где $C = \mathbf{S}(0)\mathbf{B}/B$. В состоянии теплового равновесия $C > 0$. При понижении температуры $C \to S_0$. Более того, если $C = S_0$, то $\mathbf{S}(t) = S_0\mathbf{B}/B$. Следовательно, в этом случае полную энергию частицы можно представить в виде $E = mv^2/2 - \mu B(\mathbf{x}) - m\mathbf{g}_0\mathbf{x}$, где $\mu = g\mu_B S_0$.

Подставляя $\mathbf{S} = C\mathbf{B}/B$ в (1), получим уравнение

$$md^2\mathbf{x}/dt^2 = g\mu_B C\partial B/\partial\mathbf{x} + m\mathbf{g}_0. \quad (9)$$

Выберем начало координат на оси магнитной системы, совмещая ее с осью z, направленной вертикально вверх. Найдем условия, при которых частицы движутся в ограниченной области пространства $|z| < L/2$, $\rho < L$. Предположим, что $|b_z| \gg |B_{s1}|, |B_{s2}|$, $b_z = b_0 + b_s(z)$. Тогда $B(x) \approx b_z + (\rho^2/8)\big[(b_z')^2/b_z - 2b_z''\big]$. Из (9) получим систему уравнений

$$md^2z/dt^2 = g\mu_B C\big[b_z' + (\rho^2/4)(b_z' b_z''/b_z - b_z''')\big] - mg_0, \quad (10)$$

$$md^2x/dt^2 = (g\mu_B C/4)\big[(b_z')^2/b_z - 2b_z''\big]x, \quad (11)$$

$$md^2y/dt^2 = (g\mu_B C/4)\big[(b_z')^2/b_z - 2b_z''\big]y. \quad (12)$$

В параксиальном приближении $\rho \ll L$ в области значений ρ, удовлетворяющих условию $\rho^2|b_z' b_z''/b_z - b_z'''| \ll 4|b_z'|$, уравнение (10) можно представить в виде

$$md^2z/dt^2 = -\partial W(z)/\partial z, \quad (13)$$

где функция $W(z) = -g\mu_B C b_z(z) + mg_0 z$ играет роль потенциальной энергии.

Очевидно, первый интеграл уравнения (13)

$$(dz/dt)^2 = G(z), \quad G(z) = (2/m)[E_3 - W(z)], \quad (14)$$

где E_3 — "полная энергия" продольного движения.

Если выполняется неравенство $b_z'' > (b_z')^2/2b_z$, то уравнения (11), (12) относятся к типу уравнений гармонического осциллятора с переменной частотой.

Излучение частиц, захваченных ловушкой

При движении в ловушке охлажденных частиц $C \to S_0$. Энергия взаимодействия момента с магнитным полем $U(t, \mathbf{x}) \to -\mu B$, $\mu = g\mu_B S_0$. Поместим теперь ловушку в высокочастотное магнитное поле индукцией (3), вращающееся вокруг оси z. Полная индукция магнитного поля $\mathbf{B}_t(t, \mathbf{x}) = B_s(\mathbf{x}) + \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_\sim(t)$. Предположим, что выполняется неравенство $b_0 \gg |b_s|$. Резонансный импульс переменного поля длительностью $\tau = \pi/\Omega_p$, $\Omega_p = \gamma b_p$ на частоте $\omega = \gamma b_0$ возбуждает спин-флип переход $S_0 \to -S_0$ [12]. Действительно, согласно (П14), решение уравнений движения момента в области $t > t_0 + \tau$ имеет вид $\mathbf{S}(t) = -S_0\mathbf{B}/B$, где $S_0 = \mathbf{S}(t_0)\mathbf{B}/B$. При движении частицы в переменном поле закон изменения полной энергии (8) приобретает вид $dE/dt = -g\mu_B \mathbf{S} d\mathbf{B}_\sim(t)/dt$. Отсюда найдем приращение полной энергии $\Delta E = 2\mu b_0$ за интервал времени τ. Энергия взаимодействия частицы с постоянным полем в интервале $t \geq t_0 + \tau$ становится равной $U_f(t, \mathbf{x}) = \mu B$. В результате воздействия импульса нарушаются условия финитности движения и частицы вылетают из ловушки.

Частица в асимметричной магнитной ловушке

Локализация частицы. Положим в (6) $a_3 = -a_{30} < 0$, $a_1 > 0$. Потенциальная энергия частицы $W(z) = -g\mu_B C(b_0 + a_1 z + a_2 z^2/2 - a_{30} z^3/6) + mg_0 z$. Тогда из уравнения $dW/dz = 0$ следует, что потенциальная энергия имеет два локальных экстремума — максимум и минимум, координаты которых $e_{2,1} = [a_2 \pm (a_2^2 + 2a_{30}[a_1 - mg_0/g\mu_B C])^{1/2}]/a_{30}$, $W(e_1) > W(e_2)$. Если значение E_3 лежит в области $W(e_2) < E_3 < W(e_1)$, то частица движется в потенциальной яме между точками поворота z_2 и z_1: $e_1 < z_1 < e_2 < z_3$. В этой области $G(z) \geqslant 0$. Нули функции $G(z)$ образуют последовательность $z_3 > z_2 > z_1$. Представляя функцию $G(z)$ в виде $G(z) = -\sigma^2(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)$, $\sigma^2 = g\mu_B C a_{30}/3m$, получим из (14) решение уравнения (10)

$$z(t) = z_3 - (z_3 - z_2)\mathrm{sn}^2[\omega_z(t + T)/2, \xi].$$

Здесь $\mathrm{sn}[\omega_z(t + T)/2, \xi]$ — эллиптический синус, $\omega_z = \sigma(z_3 - z_1)^{1/2}$, $\xi^2 = (z_3 - z_2)/(z_3 - z_1)$, $z_3 - z(0) = (z_3 - z_2)\mathrm{sn}^2[\omega_z T/2, \xi]$, $z(t)$ — периодическая функция с периодом $4K/\omega_z$, $K(\xi)$ — полный эллиптический интеграл.

Исследуем теперь движение частицы по x- и y-координатам. Рассмотрим наиболее простую ситуацию, предполагая, что в области движения по z-координате выполняются неравенства $b_0 \gg |b_s|$, $(b_z')^2/b_z - 2b_z'' \approx a_1^2/b_0 - 2a_2 < 0$. Тогда уравнения (11), (12) приобретают вид

$$d^2x/dt^2 + \omega_{12}^2 x = 0, \quad d^2y/dt^2 + \omega_{12}^2 y = 0, \qquad (15)$$

где $\omega_{12}^2 = (g\mu_B C/4m)[2a_2 - a_1^2/b_0]$.

Проекция траектории на плоскость xy представляет собой эллипс. Частица движется в ограниченной области пространства. Отметим, что при горизонтальном расположении оси магнитной системы величина равновесного смещения по вертикали равна g_0/ω_{12}^2.

Излучение частиц из ловушки. После взаимодействия с резонансным импульсом потенциальная энергия частицы $W(z) \to W_f(z) = \mu b_z(z) + mg_0 z$, полная энергия $E_{3f} = E_3 + 2\mu b_0$. Уравнение (14) в интервале $t \geqslant t_0 + \tau$ приобретает вид

$$(dz/dt)^2 = G_f(z), \quad G_f(z) = (2/m)[E_{3f} - W_f(z)]. \qquad (16)$$

Уравнение $G_f(z) = 0$ имеет один действительный корень $z = z_0$, поэтому остается только одна точка поворота и z_0-частицы покидают ловушку в положительном направлении оси z. Из (16) следует оценка времени вылета частиц из ловушки

$$t_{ax} \sim 2/\sigma_f D^{1/4}, \quad \sigma_t^2 = \mu a_{30}/3m,$$

$$D^4 = 3\big[z_0^2 - 2a_2 z_0/a_{30} - (2/a_{30})(a_1 + mg_0/\mu)\big].$$

Характерное время радиальной расходимости t_r можно оценить из уравнений (15) после замены $-g\mu_B C \to \mu$: $t_r \sim 2[(\mu/m)(a_1^2/b_0 - 2a_2)]^{-1/2}$. Если $t_{ax} \ll t_r$, то область, занятая частицами, вытягивается вдоль оси z: возникает направленный пучок частиц в положительном направлении оси z.

Частица в квазипериодической магнитной ловушке

Подставляя $b_z(z) = b_0 + b\cos kz$ в (10)–(12), получим в параксиальном приближении уравнения

$$d^2kz/dt^2 + \omega_z^2 \sin kz = -kg_0, \qquad (17)$$

$$d^2x/dt^2 - (\omega_z^2/2)\big[(b/2b_0)\sin^2 kz + \cos kz)\big]x = 0, \quad (18)$$

$$d^2y/dt^2 - (\omega_z^2/2)[(b/2b_0)\sin^2 kz + \cos kz)]y = 0, \quad (19)$$

где $\omega_z^2 = g\mu_B C k^2 b/m$.

Можно отметить аналогию между (17) и уравнением маятника, к которому приложен постоянный момент сил. Если $kg_0 < \omega_z^2$, то равновесные значения z_{eq} следуют из уравнения $\omega_z^2 \sin kz_{eq} = -kg_0$; $\cos kz_{eq} > 0$. Потенциальная энергия $W(z) = -g\mu_B C(b_0 + b\cos kz) + mg_0 z$. В окрестности положения равновесия $z = z_{eq} + A\cos(\omega_0 t + \alpha)$: частица колеблется с частотой ω_0; $\omega_0^2 = \omega_z^2 \cos kz_{eq}$. В этом случае уравнения (18), (19) относятся к классу уравнений Хилла. Если $kA \ll 1$, то уравнения (18), (19) можно представить в виде уравнения Матье $d^2u/ds^2 + (p + 2q\cos 2s)u = 0$, где $s = 2(\omega_0 t + \alpha)$,

$$p = -(1/8)[1 + b\sin^2 kz_{eq}/(2b_0 \cos kz_{eq})],$$

$$q = -(A/8)(-\mathrm{tg}\, kz_{eq} + b\sin kz_{eq}/b_0).$$

Из теории функций Матье известно, что плоскость параметров (p, q) содержит области, соответствующие ограниченным и неограниченным решениям [13,14]. Ограниченные решения уравнений (18), (19) реализуются в первой области устойчивости в плоскости (p, q), которая лежит справа от кривой $p_{c0}(q) = -q^2/2 + 7q^4/128 + \ldots$, ограничена кривой $p_{s1}(q) = 1 + q - q^2/8 + \ldots$ при $q < 0$ и кривой $p_{c1}(q) = 1 - q - q^2/8 + \ldots$ при $q > 0$ [13].

Частица в сферической секступольной магнитной ловушке

Локализация частицы. В экспериментах Паули и сотрудников была реализована ловушка для нейтронов, создаваемая магнитным полем кольцевых токов трех проводников, расположенных на поверхности сферы в плоскостях $z = \pm h$ и $z = 0$ [3]. Направление экваториального тока выбрано противоположно направлению двух полюсных токов. В этом случае равновесные состояния находятся в двух симметрично расположенных точках $z \neq 0$. Это обстоятельство усложняет процесс излучения частиц из ловушки.

Мы рассмотрим движение частиц в магнитном поле, создаваемом тремя параллельными кольцевыми токами, полагая в (4)

$$b_s(z) = -(\mu_0 I a/2)[1/R_1^3 + 1/R_2^3] - \mu_0 I_0 a_0/2R_0^3. \quad (20)$$

Здесь $R_1^2 = a^2 + (z+h)^2$, $R_2^2 = a^2 + (z-h)^2$, $h > a/2$; $R_0^2 = a_0^2 + z^2$. Расположим ось z по горизонтали, ось x направим по вертикали вниз. Из (10)–(12) получим в параксиальном приближении уравнения

$$md^2z/dt^2 = -dW/dz, \quad (21)$$

$$md^2x/dt^2 = (g\mu_B C/4)[(b_s')^2/b_0 - 2b_s'']x + mg_0, \quad (22)$$

$$md^2y/dt^2 = (g\mu_B C/4)[(b_s')^2/b_0 - 2b_s'']y, \quad (23)$$

где $W(z) = -g\mu_B C[b_0 + b_s(z)]$, $b_0 \gg b_s$.

Из (21)–(23) находим координаты положения равновесия $z_{eq} = 0$, $x_{eq} = 2mg_0/[g\mu_B C b_s''(0)]$, $y_{eq} = 0$, $b_s''(0) = 3g\mu_B C[Ia(a^2 - 4h^2)(a^2+h^2)^{7/2} + I_0/2a_0^4]$.

В случае достаточно глубокой потенциальной ямы параметры магнитной системы должны удовлетворять неравенству $|b_s(h)| \gg |b_s(0)|$

$$(I/a^2)\big[1 + (1 + 4h^2/a^2)^{-3/2} - 2(1 + h^2/a^2)^{-3/2}\big] \gg I_0/a_0^2\big[1 - (1 + h^2/a_0^2)^{-3/2}\big].$$

С другой стороны, поскольку $b_s'(0) = 0$, то движение по x- и y-координатам в окрестности плоскости $z = 0$ ограничено при условии $b_s''(0) > 0$. Следовательно, в общем случае частицы могут быть локализованы, если функция $b_s(z)$ удовлетворяет неравенствам $2b_s'' - (b_s')^2/b_0 > 0$, $|b_s(h)| > |b_s(0)|$.

Излучение частиц из ловушки. Для реализации направленного движения частиц после воздействия резонансного импульса достаточно включить виток с током силой I_c, радиусом r в плоскости $z = -H$, $H > h$. Потенциальная энергия частицы после переворота спина приобретает вид $W^{(c)}(z) = \mu(b_0 + b_s + b_c)$, где $b_c(z) = \mu_0 I_c r/(2R^3)$, $R^2 = r^2 + (z+H)^2$, $b_s(z)$ — функция (20). Магнитное поле дополнительного витка играет роль магнитной стенки, отражающей частицы в положительном направлении оси z. Для устранения радиальной расходимости пучка параметры витка должны удовлетворять условию $2(b_s'' + b_c'') - (b_s' + b_c')^2/b_0 < 0$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 97-01-00957).

Приложение

Уравнение (2) — результат усреднения гейзенберговских уравнений движения оператора спина по суперпозиции состояний квазиклассического волнового пакета. Поэтому оно не принадлежит к лагранжевым или гамильтоновым уравнениям и не следует из какого-либо вариационного принципа. Однако уравнение (2) можно представить в гамильтоновой форме, используя подход Швингера, установившего связь между оператором момента импульса и спаренными операторами "рождения" и "уничтожения", которые можно ввести при рассмотрении двух гармонических осцилляторов [15].

Пусть Ψ — двумерный спинор-столбец с компонентами a_1, a_2; $\Psi^+ = (a_1^*, a_2^*)$, σ_k — матрицы Паули ($k = 1, 2, 3$). Определим компоненты вектора $\mathbf{S}$ соотношениями $S_k = (1/2)\Psi^+\sigma_k\Psi$:

$$S_1 = (a_1^* a_2 + a_2^* a_1)/2, \quad S_2 = (a_1^* a_2 - a_2^* a_1)/2i,$$

$$S_3 = (a_1^* a_1 - a_2^* a_2)/2. \quad (\text{П}1)$$

Введем теперь "координаты" и "импульсы" $q_k = a_k$, $p_k = ia_k^*$ ($k = 1, 2$) с фундаментальной скобкой Пуассона (СП) $[q_i, p_k] = \delta_{ik}$. Поскольку СП $[S_1, S_2] = \varepsilon_{ijk}S_k$, то уравнение (2) приобретает гамильтонову форму $dS/dt = [S, H]$ с гамильтонианом $H = \mathbf{\Omega S}$.

Рассмотрим движение момента в постоянном неоднородном поле индукцией $\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_s(x)$. На траекториях системы $\mathbf{\Omega}(t) = -\gamma\mathbf{B}(t)$, $\mathbf{B}(t) = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_s(\mathbf{x}(t))$. В терминах канонических переменных гамильтониан

$$H = (1/2)[a_1^* a_2 \Omega_- + a_2^* a_1 \Omega_+ + (a_1^* a_1 - a_2^* a_2)\Omega_3], \quad (\text{П}2)$$

где $\Omega_\pm = \Omega_1 \pm i\Omega_2$.

Уравнения движения $da_k/dt = [a_k, H]$ ($k = 1, 2$) имеют вид

$$da_k/dt = -iH_{kn}a_n, \quad (\text{П}3)$$

где $H_{11} = \Omega_3/2$, $H_{12} = \Omega_-/2$, $H_{21} = \Omega_+/2$, $H_{22} = -\Omega_3/2$.

Найдем вначале решение задачи на собственные значения $\lambda v_n = -H_{nk}v_k$. Из уравнения $\det(H + \lambda I) = 0$ получим собственные значения $\lambda_{1,2} = \pm\lambda_0$, $\lambda_0 = \Omega/2$, где $\Omega = (\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2)^{1/2}$. Подставляя $\lambda = \lambda_{1,2}$, найдем ортонормированные собственные векторы $v_{n(1)}$ и $v_{n(2)}$

$$v_{1(1)} = [(\Omega - \Omega_3)/2\Omega]^{1/2}, \quad v_{1(2)} = \Omega_-/[2\Omega(\Omega - \Omega_3)]^{1/2},$$

$$v_{2(1)} = -\Omega_+/[2\Omega(\Omega - \Omega_3)]^{1/2}, \quad v_{2(2)} = [(\Omega - \Omega_3)/2\Omega]^{1/2}. \quad (\text{П}4)$$

Можно параметризовать собственные векторы, вводя сферические углы Θ и φ вектора B соотношениями $B_1 = B_{12}\cos\varphi$, $B_2 = B_{12}\sin\varphi$, $B_{12} = B\sin\Theta$, $B_3 = B\cos\Theta$, $B_{12} = (B_1^2 + B_2^2)^{1/2}$.

Представим гамильтониан (П2) в терминах координат и импульсов $H = -iH_{mn}p_m q_n$ и произведем КП $q_k = a_k$, $p_k = ia_k^* \to q'_k = c_k$, $p'_k = ic_k^*$, порождаемое производящей функцией $F_2(q, p', t) = (\Lambda^+)_{\mu k} p'_\mu q_k$, зависящей от старых координат и новых импульсов. Здесь $\Lambda_{m\mu} = [u_{m(\mu)}]$ — унитарная матрица, столбцами которой являются собственные векторы матрицы $\mathbf{B}\boldsymbol{\sigma}/2B$, совпадающие с (П4) с точностью до фазового множителя [16]

$$u_{1(1)} = \cos(\Theta/2)\exp(-i\varphi/2),$$

$$u_{1(2)} = -\sin(\Theta/2)\exp(-i\varphi/2),$$

$$u_{2(1)} = \sin(\Theta/2)\exp(i\varphi/2),$$

$$u_{2(2)} = \cos(\Theta/2)\exp(i\varphi/2). \qquad (П5)$$

КП $q'_\alpha = \partial F_2/\partial p'_\alpha$, $p_m = \partial F_2/\partial q_m$, порождаемое производящей функцией F_2, имеет вид $q_n = \Lambda_{n\alpha} q'_\alpha$, $p_m = (\Lambda)^+_{\mu m} p'_\mu$. Поскольку $(\Lambda)^+_{\alpha k} = [u_{k(\alpha)}]^*$, то

$$q_n = u_{n(\alpha)} q'_\alpha, \quad p_m = [u_{m(\mu)}]^* p'_\mu. \qquad (П6)$$

Следовательно, после замены переменных новый гамильтониан $H'(q', p', t) = (H + \partial F_2/\partial t)$ равен $H' = H'_0 + h'$

$$H'_0(q', p', t) = -iH'_{\mu\alpha} p'_\mu q''_\alpha, \quad h'(q', p', t) = \omega_{\mu\alpha} p'_\mu q'_\alpha, \qquad (П7)$$

где $H'_{\mu\alpha} = (\Lambda)^+_{\mu m} H_{mn} \Lambda_{n\alpha} = -\lambda_\mu \delta_{\mu\alpha}$, $\omega_{\mu\alpha}(t) = \Lambda^+_{\mu k}\Lambda_{k\alpha}$. КП приводит гамильтониан $H'_0(q', p', t)$ к диагональной форме $H'_0(q', p', t) = -\lambda_n c_n^* c_n$, или

$$H'_0 = -\Omega(|c_1|^2 - |c_2|^2)/2. \qquad (П8)$$

Предположим, что индукция магнитного поля на траекториях системы удовлетворяет условию $|\omega_{\mu\alpha}| \ll \Omega$, $\mu, \alpha = 1, 2$. Тогда $H'(q', p', t) \approx -\lambda_n c_n^* c_n$. Решение уравнений, порождаемых гамильтонианом H', представляет собой КП $c_k \to b_k$: $c_1 = b_1 \exp(i\eta/2)$, $c_2 = b_2 \exp(-i\eta/2)$, $\eta(t) = \int \Omega(t)dt$, где $b_1 = (S_0 + C)^{1/2} \exp(i\phi/2)$, $b_2 = (S_0 - C)^{1/2} \exp(-i\phi/2)$, C и ϕ — постоянные интегрирования. Общее решение уравнений (П3) имеет вид $a_n = \Lambda_{n\alpha} c_\alpha$. В результате подстановки $a_n = \Lambda_{n\alpha} c_\alpha$ в (П1) получим $S_n = R_{n(\alpha)} S'_\alpha$, где $R_{n(\alpha)}$ — действительные векторы ($\alpha = 1, 2, 3$)

$$R_{1(1)} = B_1 B_3/BB_{12}, \quad R_{1(2)} = -B_2/B_{12}, \quad R_{1(3)} = B_1/B,$$

$$R_{2(1)} = B_2 B_3/BB_{12}, \quad R_{2(2)} = B_1/B_{12}, \quad R_{2(3)} = B_2/B,$$

$$R_{3(1)} = -B_{12}/B, \quad R_{3(2)} = 0, \quad R_{3(3)} = B_3/B. \qquad (П9)$$

Компоненты вектора S'_α определяются соотношениями (П1) после замены $a_n \to c_n$

$$S'_1 = (S_0^2 - C^2)^{1/2} \cos(\eta + \phi),$$

$$S'_2 = -(S_0^2 - C^2)^{1/2} \sin(\eta + \phi), \quad S'_3 = C. \qquad (П10)$$

Поскольку $\mathbf{BS} = BC$, то в квазиоднородном магнитном поле величина $C = \mathbf{BS}/B$ — проекция вектора $\mathbf{S}$ на касательную к силовой линии, является адиабатическим инвариантом. Среднее значение $\langle \mathbf{S} \rangle = \mathbf{R}_3 C = \mathbf{B}C/B$.

Отметим, что КП $a_k \to c_k$ задает переход к новому базису $\mathbf{n}_k \to \mathbf{n}'_k$ ($k = 1, 2, 3$), в котором вектор $\mathbf{B}$ направлен по орту $\mathbf{n}'_3$. Действительно, $E_{ik} = (R^{-1})_{ik}$ — матрица поворота вокруг осей 323 на эйлеровы углы $\varphi_1 = \varphi$, $\varphi_2 = \Theta$, $\varphi_3 = 0$ [17]. Учитывая (П9), представим решение уравнения (2) в виде

$$S_1 = (S'_1 \cos\Theta + S'_3 \sin\Theta)\cos\varphi - S'_2 \sin\varphi,$$

$$S_2 = (S'_1 \cos\Theta + S'_3 \sin\Theta)\sin\varphi + S'_2 \cos\varphi,$$

$$S_3 = -S'_1 \sin\Theta + S'_3 \cos\Theta. \qquad (П11)$$

Рассмотрим теперь движение момента в магнитном поле индукцией $\mathbf{B}_t = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_s(\mathbf{x}) + \mathbf{B}_\sim(t)$. Полный гамильтониан движения момента $H_t = H + h$; H — гамильтониан (П2),

$$h = -(1/2)[a_1^* a_2 \Omega_p \exp(i\omega t)$$

$$+ a_2^* a_1 \Omega_p \exp(-i\omega t)], \quad t \geq t_0, \qquad (П12)$$

где $\Omega_p = \gamma b_p$.

Пусть $b_0 \gg |b_s|$, $\Omega \approx \Omega_0 = \gamma b_0$. Если выполняется условие резонанса $\omega = \Omega_0$, то в результате КП $a_k \to c_k \to b_k$ новый гамильтониан

$$H'_t = -(\Omega_p/2)(b_1^* b_2 + b_2^* b_1). \qquad (П13)$$

Учитывая (П9) или (П11), получим компоненты вектора $S(t)$

$$S_1 = \mathrm{Re}\, b_1^* b_2 \exp(-i\omega t), \quad S_2 = \mathrm{Im}\, b_1^* b_2 \exp(-i\omega t),$$

$$S_3 = (b_1^* b_1 - b_2^* b_2)/2. \qquad (П1а)$$

Начальные условия имеют вид $S_1(t_0) = 0$, $S_2(t_0) = 0$, $S_3(t_0) = S_0$. Тогда решение уравнений, порождаемых гамильтонианом (П13),

$$b_1 = i(2S_0)^{1/2} \cos\Omega_p(t - t_0)/2,$$

$$b_2 = -(2S_0)^{1/2} \sin\Omega_p(t - t_0)/2.$$

Следовательно, компоненты вектора $\mathbf{S}(t)$ соответственно равны

$$S_1(t) = S_0 \sin[\Omega_p(t - t_0)]\sin\omega t,$$

$$S_2(t) = S_0 \sin[\Omega_p(t - t_0)]\cos\omega t,$$

$$S_3(t) = S_0 \cos\Omega_p(t - t_0). \qquad (П14)$$

Если переменное поле включено в интервал времени $t - t_0 = \tau$, удовлетворяющий условию $\Omega_p \tau = \pi$, то в области $t \geqslant t_0 + \tau$ имеем $S_1(t) = 0$, $S_2(t) = 0$, $S_3(t) = -S_0$. Резонансный "π-импульс" переворачивает магнитный момент. Сделаем два замечания.

1) Представим уравнение (2) в тензорной форме $dS_i/dt = A_{ik}S_k$, где $A_{ik} = \varepsilon_{ijk}\Omega_j(t)$ — антисимметричный тензор; $A_{21} = \Omega_3$, $A_{32} = \Omega_1$, $A_{13} = \Omega_2$. Тогда векторы

$\mathbf{V}_{(1)} = (\mathbf{R}_{(1)} + i\mathbf{R}_{(2)})/\sqrt{2}$, $\mathbf{V}_{(2)} = [\mathbf{V}_{(1)}]^*$, $\mathbf{V}_{(3)} = \mathbf{R}_{(3)}$ представляют собой собственные векторы уравнения $\sigma V_i = A_{ij}V_j$, соответствующие собственным значениям $\sigma_1 = -i\Omega$, $\sigma_2 = i\Omega$, $\sigma_3 = 0$. Векторы $V_{(\alpha)}$ образуют ортогональный базис $[V_{(\alpha)}]^* V_{(\beta)} = \delta_{\alpha\beta}$ [8].

2) Уравнения Лагранжа–Эйлера для функционала

$$I = \int dt L(a_k^*, a_k, t),$$

$$L(a_k^*, a_k,) = (i/2)[a_n da_n^*/dt - a_n^* da_n/dt] + H(a_k^*, a_k, t)$$

имеют форму уравнений Гамильтона [18]. Существенным достоинством гамильтонова формализма является возможность применения новых методов интегрирования канонических уравнений движения [18–20]. Введение функционала позволяет использовать прямые вариационные методы типа Бубнова–Галеркина.

Список литературы

[1] *Тошек П.Э.* // УФН. 1989. Т. 158. № 3. С. 450–497.
[2] *Драбович К.Н.* // УФН. 1989. Т. 158. № 3. С. 499–509.
[3] *Пауль В.* // УФН. 1990. Т. 160. № 12. С. 109.
[4] *Pritchard D.E.* // Phys. Rev. Lett. 1983. Vol. 51. P. 1336.
[5] *Petrich W., Anderson M.E., Ensher J.R.* et al. // Phys. Rev. 1955. Vol. 74. P. 3352.
[6] *Holland M., Burnett K., Gardiner C.* et al. // Phys. Rev. A. 1996. Vol. 54. P. 1757.
[7] *Gazman A.M., Moore M., Meyste P.* // Phys. Rev. A. 1996. Vol. 54. P. 977.
[8] *Yukalov V.I.* // Laser Phys. Vol. 7. N 4. 1997. P. 998.
[9] *Shore B.W.* The Theory of Coherent Atomic Excitation. New York: Wiley, 1990.
[10] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982.
[11] *Глазер В.* Основы электронной оптики. М.: Гостехиздат, 1957.
[12] *Сликтер Ч.* Основы теории магнитного резонанса. М.: Мир, 1967. 65 с.
[13] *Мак-Лахлан Н.В.* Теория и приложения функций Матье. М.: ИЛ, 1953.
[14] *Морс Ф.М., Фешбах Г.* Методы теоретической физики. Т. 1. М.: ИЛ, 1958.
[15] *Маттис Д.* Теория магнетизма. М.: Мир, 1967. 101 с.
[16] *Берестецкий В.Б., Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П.* Квантовая электродинамика. М.: Наука, 1989.
[17] *Мэтьюз Дж., Уокер Р.* Математические методы физики. М.: Атомиздат, 1972. С. 324.
[18] *Павленко Ю.Г.* Гамильтоновы методы в электродинамике и квантовой механике. М.: Изд-во Московского ун-та, 1988.
[19] *Переломов А.М.* Обобщенные когерентные состояния и их применения. М.: Наука, 1987.
[20] *Переломов А.М.* Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли. М.: Наука, 1990.