01;03

# О капиллярном движении вязкоупругой жидкости с заряженной свободной поверхностью

© С.О. Ширяева, О.А. Григорьев

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
150000 Ярославль, Россия
E-mail: rectorat@.uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 18 мая 1999 г. В окончательной редакции 14 октября 1999 г.)

Исследована структура спектра капиллярно-релаксационных движений жидкости с заряженной свободной поверхностью при учете эффекта релаксации вязкости. На основе численного анализа дисперсионного уравнения для волновых движений в вязкоупругой несжимаемой жидкости показано, что для фиксированного значения волнового числа диапазон значений характерного времени релаксации, в котором существуют волновые движения релаксационного типа, ограничен, с ростом волнового числа он расширяется; инкремент неустойчивости заряженной поверхности жидкости существенно зависит от характерного времени релаксации, увеличиваясь с его ростом; наличие у жидкости упругих свойств приводит к увеличению скорости диссипации энергии капиллярных движений жидкости. При закритическом для начала реализации неустойчивости Тонкса-Френкеля значении поверхностной плотности заряда существуют как чисто гравитационные волны, так и волны релаксационной природы.

Проблема исследования капиллярных движений жидкости, проявляющей упругие свойства, представляет интерес в связи с многочисленными приложениями академического, технического и технологического плана и в этой связи неоднократно становилась предметом внимания (см., например, [1–7] и указанную там литературу). Тем не менее многие вопросы остались невыясненными, что связано с известной громоздкостью теоретического решения, многообразием возможных способов обезразмеривания краевой задачи, большим количеством и сложной структурой безразмерных параметров, появляющихся в окончательном решении [1–7].

Суть проблемы заключается в том, что при достаточно малых временах внешнего воздействия ($t \le 10^{-5}$ s) даже ньютоновские жидкости проявляют упругие свойства: они вначале упруго деформируются, после же прекращения действия внешней силы в них остаются остаточные напряжения сдвига, релаксирующие за время $t \sim 10^{-5}$ s [8] и вызывающие при этом движение жидкости. Этот эффект сказывается и в капиллярном волновом движении, поскольку уже для волн с длиной $\sim 10\,\mu$m их период сравним с характерным временем релаксации упругих напряжений. Как показано в [1–7], учет упругих свойств жидкости приводит к заметному усложнению спектра капиллярных движений, вызывая ограничение спектра капиллярных волн и увеличение скорости диссипации энергии волнового движения за счет возникновения на высоких частотах волновых движений фононного типа.

В нижеследующем изложении весь анализ (в отличие от [3], где дисперсионное уравнение для волновых движений вязкоупругой жидкости было получено в рамках микроскопического подхода методами статистической механики) будет проведен в рамках модели сплошной среды на основе уравнений гидродинамики вязкой жидкости (как это было проделано в [1–2,4–7]) в предположении, что вязкоупругие свойства жидкости можно описать введением комплексной вязкости посредством формулы Максвелла [9]

$$\nu = \nu_0(1 - i\omega t_*)^{-1},$$

представляющей собой фурье-образ экспоненциальной зависимости от времени вязкоупругой жидкости. В этом выражении $\nu_0$ — коэффициент кинематической вязкости на нулевой частоте, $\omega$ — комплексная частота, $t_*$ — характерное время релаксации вязкости, $i$ — мнимая единица.

Проведенный в [1–7] анализ влияния эффекта релаксации вязкости на закономерности реализации капиллярного движения жидкости с заряженной свободной поверхностью носит преимущественно качественный характер, поскольку проведен либо асимптотическими методами [1–5,7], либо численными, ориентированными на выявление качественных зависимостей [5,6]. В последнем случае речь идет о способах обезразмеривания дисперсионного уравнения перед проведением численных расчетов. В численном анализе [5,6] частота, инкременты и декременты капиллярных движений жидкости обезразмеривались либо на частоту волновых движений в идеальной жидкости с заряженной свободной поверхности, либо на характерный декремент затухания капиллярных волн. В обеих ситуациях преследовалась одна цель — уменьшить количество безразмерных физических параметров, характеризующих капиллярные движения жидкости в рассматриваемой системе. В качестве же изменяющегося аргумента искомых комплексных частот использовался сложный параметр, зависящий от волнового числа, от капиллярного давления и давления электрического поля на свободную поверхность жидкости и через них от физических характеристик жидкости: плотности, капиллярной постоянной, коэффициента поверхностного натяжения, коэффициента вязкости и от поверхностной плотности электрического заряда. Это обстоятельство затруднило выявление конкретных зависимостей характеристик капиллярного движения жидкости от таких величин, как волновое число $k$ или поверхностная плотность электрического заряда $\varkappa$. Этот недостаток и должен быть устранен в настоящем рассмотрении.

**1.** Будем решать задачу о расчете спектра капиллярных волн на граничащей с вакуумом плоской заряженной поверхности идеально проводящей жидкости бесконечной глубины с плотностью $\rho$, вязкостью $\nu$, коэффициентом поверхностного натяжения $\sigma$, в поле тяжести $\mathbf{g}$ и в электростатическом поле $\mathbf{E}_0$ (поверхностная плотность заряда, индуцированного полем $E_0$, на невозмущенной свободной поверхности жидкости связана с $E_0$ известным соотношением $E_0 = 4\pi\varkappa$). Напряженность электростатического поля $\mathbf{E}_0$ у поверхности жидкости определяется разностью потенциалов между свободной поверхностью жидкости с нулевым потенциалом и плоским противоэлектродом, расположенным параллельно невозмущенной плоской поверхности жидкости на расстоянии $b$ и имеющим потенциал $\Phi = V$.

Расположим декартову систему координат так, чтобы ось $z$ была направлена вертикально вверх $\mathbf{n}_z \parallel -\mathbf{g}$ ($\mathbf{n}_z$ — орт декартовой оси координаты $z$), а ось $x$ — по направлению движения плоской капиллярной волны $\sim \exp(ikx - i\omega t)$. Примем также, что плоскость $z = 0$ совпадает со свободной невозмущенной поверхностью жидкости. Пусть функция $\zeta(x,t) = \zeta_0 \exp(ikx - i\omega t)$ описывает малое возмущение равновесной плоской поверхности жидкости, вызванное тепловым капиллярным волновым движением весьма малой ($\zeta_0 \sim (kT/\sigma)^{1/2}$) амплитуды; $k$ — постоянная Больцмана; $T$ — абсолютная температура; $\mathbf{U}(\mathbf{r},t)$ — поле скоростей движения жидкости, вызванного возмущением свободной поверхности $\zeta(x,t)$, имеющее тот же порядок малости [10].

Зададимся вопросом об отыскании спектра капиллярных волн в жидкости при заданных условиях. Математическая формулировка задачи состоит из линеаризованного уравнения Навье–Стокса для несжимаемой жидкости, условия несжимаемости, уравнения Лапласа для расчета потенциала электрического поля у поверхности жидкости и соответствующих граничных условий

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\nabla P(\mathbf{U}) + \nu\Delta\mathbf{U} + \mathbf{g}, \tag{1}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{U} = 0, \tag{2}$$

$$\Delta\Phi = 0, \quad \mathbf{E} = -\nabla\Phi, \tag{3}$$

$$z = -\infty: \qquad \mathbf{U} = 0, \tag{4}$$

$$z = 0: \quad -\frac{\partial \xi(x,t)}{\partial t} + U_z = 0, \tag{5}$$

$$\mathbf{n}(\boldsymbol{\tau}\nabla)\mathbf{U} + \boldsymbol{\tau}(\mathbf{n}\nabla)\mathbf{U} = 0, \tag{6}$$

$$-P(\mathbf{U}) + \rho g\zeta + 2\rho\nu\mathbf{n}(\mathbf{n}\nabla)\mathbf{U} - P_E(\zeta) + P_\sigma(\zeta) = 0, \tag{7}$$

$$\Phi = 0, \tag{8}$$

$$z = b: \qquad \Phi = V. \tag{9}$$

В этих выражениях $\mathbf{n}$ и $\boldsymbol{\tau}$ — единичные векторы нормали и касательной к свободной поверхности жидкости; $P(\mathbf{U})$ — давление внутри жидкости, связанное с капиллярным движением жидкости и имеющее первый порядок малости по $\zeta$; $P_E(\zeta)$ и $P_\sigma(\zeta)$ — добавки к давлению электрических сил на свободную поверхность жидкости и давлению сил поверхностного натяжения, происходящие из-за возмущения $\zeta(x,t) = A\exp(ikx - i\omega t)$ равновесной плоской поверхности жидкости, вызванного капиллярным волновым движением, имеющие первый порядок малости по $\zeta$ [11,12],

$$P_\sigma(\zeta) = -\sigma\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}, \quad P_E(\zeta) = 4\pi\varepsilon^{-1}\varkappa^2 k\zeta. \tag{10}$$

Принимая во внимание то обстоятельство, что жидкость вязкая, будем искать течения в ней, разделяя в соответствии с теоремой Гельмгольца поле скоростей $\mathbf{U} = \mathbf{U}(\mathbf{r},t)$ на две компоненты: потенциальную (с потенциалом скоростей $\psi(\mathbf{r},t)$) и вихревую (описываемую функцией тока $\varphi(\mathbf{r},t)$). Тогда выражение для поля давлений $P(\mathbf{U})$ в жидкости запишется в виде

$$P(\mathbf{U}) = -\rho\frac{\partial\psi}{\partial t} - \rho g\zeta. \tag{11}$$

**2.** Решение задачи (1)–(6) будем искать в виде [12]

$$U_x(x,z,t) = \big(ik\cdot B\cdot\exp(-kz) - l\cdot C\cdot\exp(-lz)\big) \times \exp(ikx - i\omega t),$$

$$U_z(x,z,t) = \big(-k\cdot B\cdot\exp(-kz) + ik\cdot C\cdot\exp(-lz)\big) \times \exp(ikx - i\omega t),$$

$$l^2 = k^2 - i\omega\nu^{-1}.$$

$A$, $B$ и $C$ — константы; $l$ — характерный линейный масштаб пространственного изменения вихревой компоненты поля скоростей.

Повторяя те же рассуждения, что и в [12], лишь добавив в динамическое граничное условие для нормальной компоненты тензора напряжений слагаемое для давления электрического поля и рассматривая в соответствии с формулой Максвелла вязкость как функцию частоты $\nu = \nu_0/(1 - i\omega t_*)$, получим дисперсионное соотношение, характеризующее капиллярные движения вязкоупругой жидкости с заряженной свободной поверхностью в размерном виде

$$\left(\omega + \frac{\nu_0 2ik^2}{(1 - i\omega t_*)}\right) + \frac{4\nu_0^2 k^4}{(1 - i\omega t_*)^2}\sqrt{1 - \frac{i\omega(1 - i\omega t_*)}{\nu k^2}} = \frac{k}{\rho}(g\rho + \sigma k^2 - 4\pi\varkappa^2 k).$$

Вводя безразмерные переменные

$$X = ka, \quad a = \sqrt{\sigma/\rho g}, \quad Y = \frac{\omega a^2}{\nu_0},$$

$$\tau = \frac{t_* \nu_0}{a^2}, \quad \beta = \frac{\sigma a}{\rho \nu_0^2}, \quad W = \frac{4\pi \varkappa^2 a}{\sigma},$$

получим

$$\left[Y(1 - iY\tau) + 2iX^2\right]^2 + 4X^4 \sqrt{1 - \frac{iY(1 - iY\tau)}{X^2}} = \beta X\left[1 + X^2 - WX\right](1 - iY\tau)^2, \qquad (12)$$

где $a$ — капиллярная постоянная жидкости; $W$ — параметр Тонкса–Френкеля, характеризующий устойчивость свободной поверхности жидкости по отношению к собственному заряду; капиллярно-гравитационная волна с волновым числом $k$ на поверхности жидкости претерпевает неустойчивость при $W > (k + k^{-1})$ [13,14].

**3.** Зависимости вещественной $\mathrm{Re}\, Y = \mathrm{Re}\, Y(X)$ и мнимой $\mathrm{Im}\, Y = \mathrm{Im}\, Y(X)$ компонент безразмерной частоты $Y$ от безразмерного же волнового числа $X$, рассчитанные численно по уравнению (12) при различных значениях характерного времени релаксации $\tau$ и параметра Тонкса–Френкеля $W$, представлены на рис. 1–8.

Численные расчеты показывают (рис. 1, 2), что при $W = 0$ (в отсутствии заряда на свободной поверхности жидкости) наличие эффекта релаксации вязкости приводит к появлению периодического релаксационного движения (ветвь *4*), а также двух апериодических релаксационных движений (ветвь *5* и *6*). Ветви *1–3* соответствуют капиллярно-гравитационным движениям жидкости, реализующимся и в отсутствии у жидкости упругих свойств. Увеличение параметра $\tau$ до 0.17 приводит к исчезновению апериодического движения *3* и слиянию кривых *1* и *4* с образованием единого капиллярно-релаксационного периодического движения *7*, а также апериодического движения *8*, получившегося при слиянии кривых *2* и *5*. Дальнейшее увеличение $\tau$, не меняя общей качественной картины реализующихся капиллярных движений, уменьшает частоту волновых движений, описываемых ветвью *7*, и величины декрементов затухания всех ветвей.

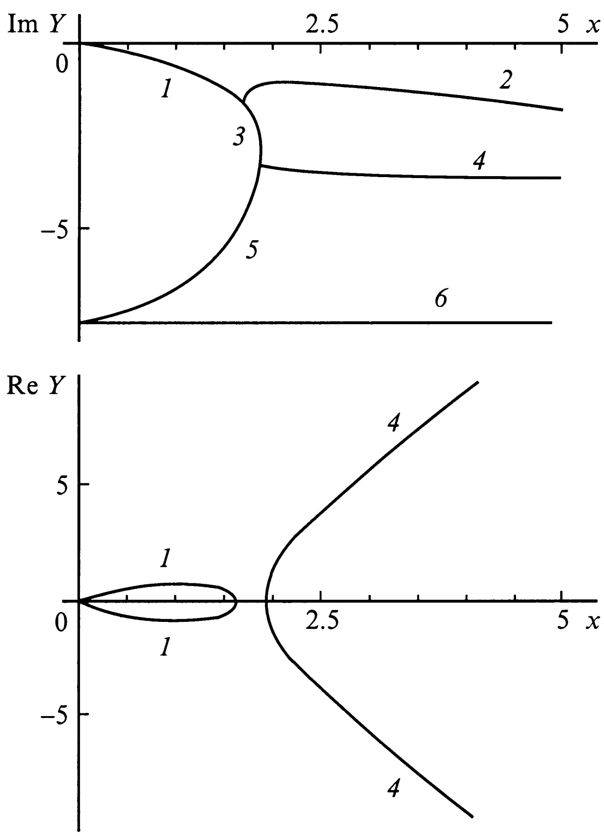


**Рис. 1.** Зависимости $\mathrm{Re}\, Y(X)$ и $\mathrm{Im}\, Y(X)$ от $X$, рассчитанные при $\beta = 1$. $W = 0$, $\tau = 0.11$.

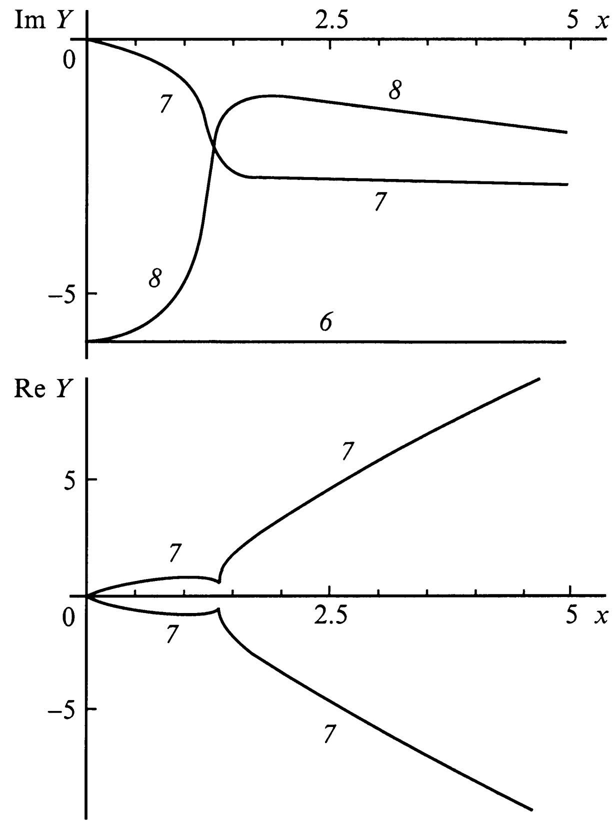


**Рис. 2.** То же, что и на рис. 1, при $\tau = 0.17$, $W = 0$.

Наличие у свободной поверхности жидкости электростатического поля (поверхностного заряда) докритической в смысле устойчивости Тонкса–Френкеля величины ($W = 1$), не изменяя частот релаксационных колебаний, уменьшает частоты капиллярных волн и приводит к слиянию ветвей *1*, *4* и *2*, *5* при большем значении $\tau$ (при $\tau = 0.3$).

При закритической величине электростатического поля ($W = 3$) (рис. 3, 4) происходит существенное сокращение геометрического места точек, соответствующего кривой *1*, описывающей капиллярно-гравитационные волны, и выход кривой *2*, соответствующей капиллярно-гравитационным апериодическим движениям, в область $\mathrm{Im}\,Y > 0$, что означает проявление апериодической неустойчивости возмущений поверхности из соответствующего диапазона значений волновых чисел $k$.

Увеличение параметра $\tau$ не приводит к изменению спектра волн, претерпевших неустойчивость в связи с наличием закритического заряда, но вызывает рост инкрементов неустойчивых движений и уменьшает величины декрементов устойчивых решений.

Для существенно закритического значения параметра Тонкса–Френкеля $W = 6$ (рис. 5) наблюдается расширение спектра волн, испытывающих неустойчивость (ветвь *2*), как в область гравитационных волн $X < 1$, так и в область капиллярных волн $X > 1$, а также исчезновение апериодически затухающих движений *3* и *5*.

Таким образом, при докритическом для начала реализации неустойчивости Тонкса–Френкеля значении параметра $W$ существуют гравитационные, капиллярные и релаксационные волны, при закритическом значении $W$ капиллярные волны претерпевают неустойчивость в ограниченном диапазоне волновых чисел. Гравитационные же волны ($k \ll 1$), равно как и волны релаксационной природы, остаются. Причем спектры значений волновых чисел, в которых реализуются эти волновые движения, соприкасаются (рис. 3–5).

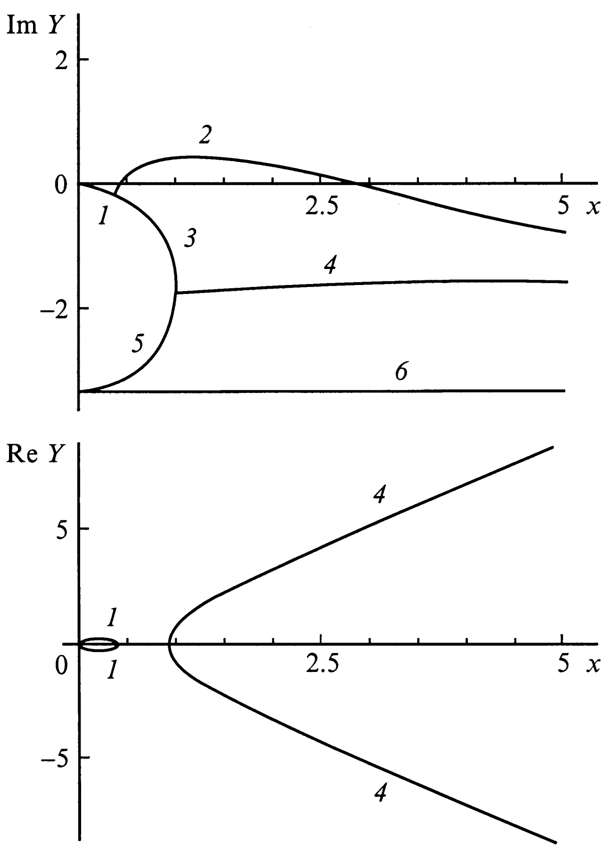


**Рис. 3.** То же, что и на рис. 1, при $\tau = 0.3$, $W = 3$.

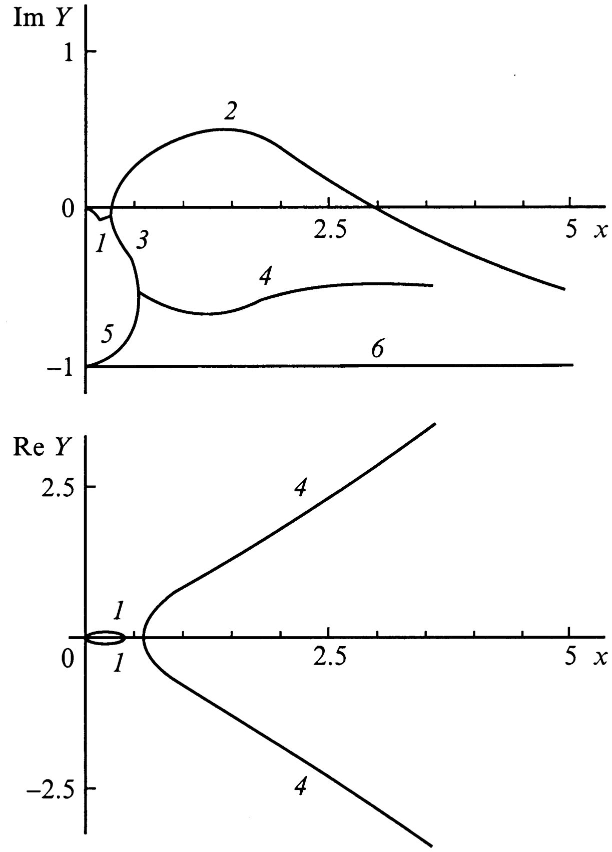


**Рис. 4.** То же, что и на рис. 1, при $\tau = 1$, $W = 3$.

Исследование зависимости инкрементов неустойчивости (часть ветви *2* при $\mathrm{Im}\,Y > 0$ на рис. 3–5) от безразмерного волнового числа $X$ при различных значениях величины характерного времени релаксации упругих напряжений в жидкости $\tau$ проведено в работе [13] с использованием таких же безразмерных переменных, что и в настоящем рассмотрении. Выяснилось, что анализируемая зависимость является весьма заметной и достигает 100%-го прироста величины инкремента для $W = 6$ при изменении $\tau$ от 0.11 до 1 в отличие от выводов качественных исследований [5,6], где даже столь заметный эффект маскировался сложным видом использованных безразмерных переменных и аргументов.

Численное исследование зависимости величины инкремента неустойчивых капиллярных движений жидкости от безразмерного характерного времени релаксации вязкости $\tau$, проведенные для различных значений волнового числа $X$ и различных $W$, показали (рис. 6), что инкременты растут с ростом $\tau$ тем быстрее, чем больше $W$ и $X$.

Зависимости $\mathrm{Re}\,Y = \mathrm{Re}\,Y(W)$ и $\mathrm{Im}\,Y = \mathrm{Im}\,Y(W)$ компонент безразмерной частоты $Y$ от величины параметра Тонкса–Френкеля $W$, рассчитанные при $X = 1$ и различных значениях $\tau$, показывают, что учет эффекта релаксации вязкости $\tau = 0.1$ по сравнению с чисто

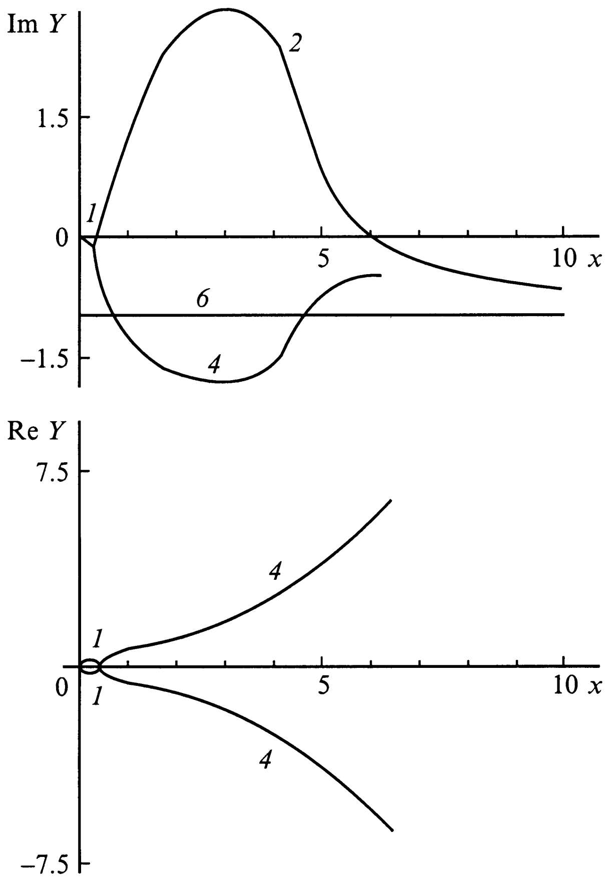


**Рис. 5.** То же, что и на рис. 1, при $\tau = 1$, $W = 6$.

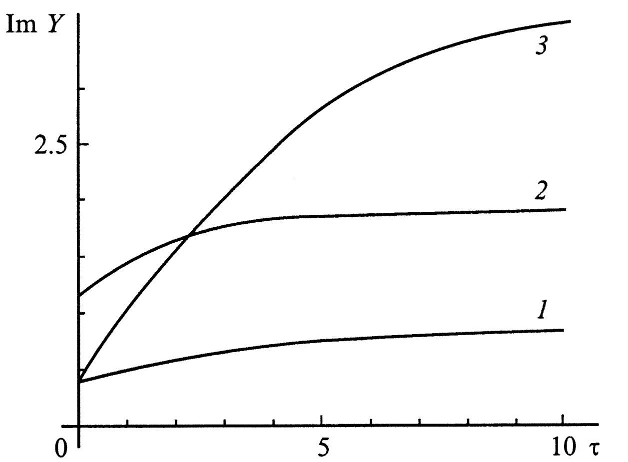


**Рис. 6.** Зависимости величины обезразмеренного инкремента неустойчивости от безразмерного характерного времени релаксации вязкости $\tau$. *1* — $X = 1$, $W = 3$; *2* — $X = 1$, $W = 6$; *3* — $X = 5$, $W = 6$.

гравитационно-капиллярными волновыми движениями, описываемыми ветвями *1–3*, приводит к появлению трех апериодических релаксационных движений *4–6*, одно из которых (4) при увеличении $\tau$ до 0.3 (рис. 7) становится

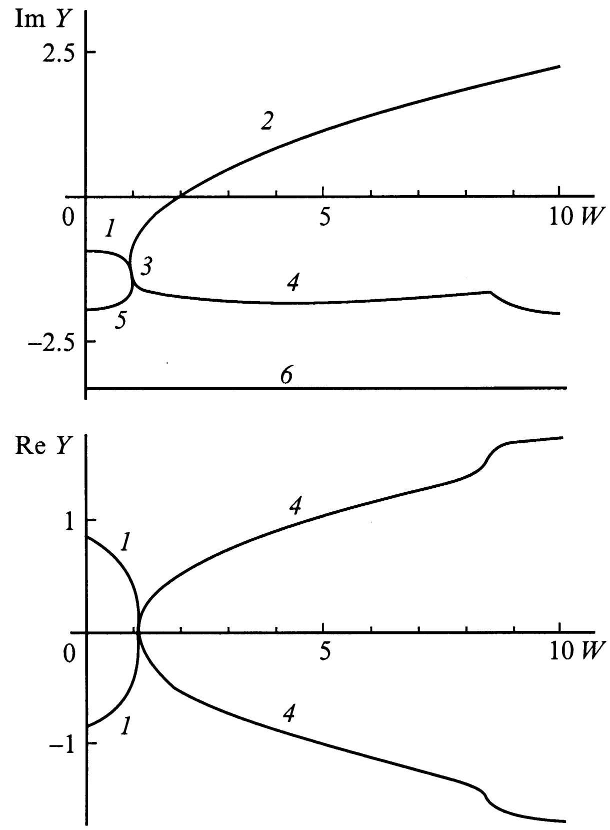


**Рис. 7.** Зависимости $\mathrm{Re}\,Y(W)$ и $\mathrm{Im}\,Y(W)$ от величины параметра Тонкса–Френкеля $W$. $X = 1$, $\tau = 0.3$.

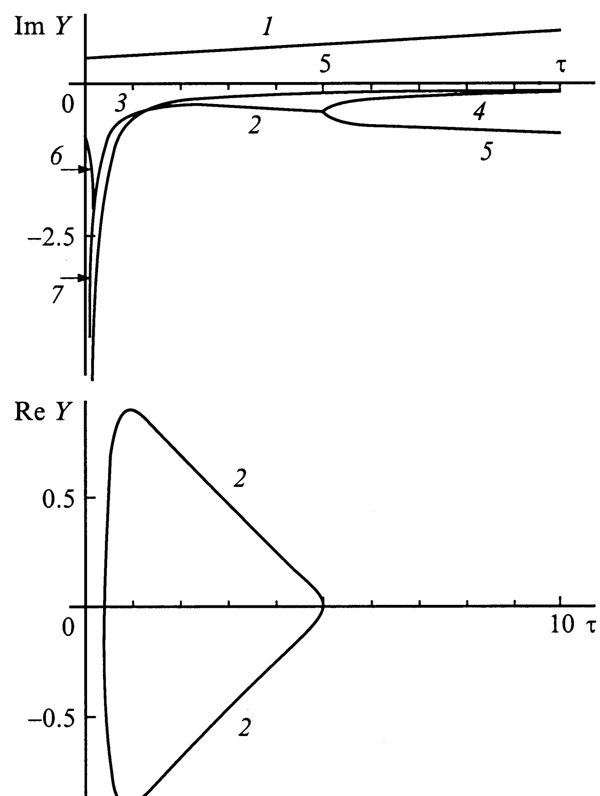


**Рис. 8.** Зависимости $\mathrm{Re}\,Y(\tau)$ и $\mathrm{Im}\,Y(\tau)$ от величины безразмерного характерного времени релаксации вязкости $\tau$. $X = 1$, $W = 3$.

периодическим. Дальнейшее увеличение характерного времени релаксации $\tau$ приводит к объединению релаксационного (ветви *4*) и капиллярно-гравитационного (ветви *1*) периодических движений, а также к слиянию апериодических движений *2* и *5* с образованием составных капиллярно-релаксационных движений.

Зависимости вещественной $\mathrm{Re}\,Y = \mathrm{Re}\,Y(\tau)$ и мнимой $\mathrm{Im}\,Y = \mathrm{Im}\,Y(\tau)$ компонент безразмерной частоты $Y$ от безразмерного характерного времени релаксации вязкости $\tau$, рассчитанные при $Y = 1$ и $W = 3$, приведены на рис. 8. Ветвь *1* описывает зависимость от $\tau$ величины инкремента неустойчивости, который медленно растет с увеличением $\tau$. Ветвь *2* описывает периодические релаксационные движения, существующие, согласно рис. 8, в ограниченном диапазоне значений $\tau$. Ветви *3–5* описывают апериодические релаксационные движения жидкости. Рис. 8 и проведенные при других значениях $W$ численные расчеты показывают, что периодические релаксационные движения существуют в ограниченном промежутке изменения $\tau$, величина которого обратно пропорциональна величине параметра Тонкса–Френкеля $W$. С увеличением длины волны диапазон значений $\tau$, в пределах которого существуют релаксационные колебания расширяется, а инкремент неустойчивости капиллярных волн увеличивается.

## Заключение

Резюмируя сказанное выше о влиянии эффекта релаксации вязкости на закономерности реализации капиллярного движения жидкости с заряженной свободной поверхностью, отметим следующее.

Величина инкремента неустойчивой по отношению к поверхностному заряду ветви капиллярных движений существенно зависит от характерного времени релаксации вязкости и величины поверхностной плотности заряда. При достаточно больших значениях поверхностной плотности заряда (параметра $W$) инкремент неустойчивости с увеличением безразмерного характерного времени релаксации $\tau$ растет весьма заметно.

Диапазон значений волновых чисел, в пределах которого наблюдается неустойчивость поверхности по отношению к поверхностному заряду, определяется только величиной безразмерного параметра Тонкса–Френкеля $W$ и не зависит от характерного времени релаксации вязкости, хотя значение волнового числа наиболее неустойчивой при $W = \mathrm{const}$ волны с ростом $\tau$ слабо увеличивается.

Для фиксированного значения волнового числа $k = \mathrm{const}$ диапазон значений характерного времени релаксации $\tau$, в котором существуют периодические решения, ограничен, но расширяется с ростом волнового числа $k$.

При достаточно большом значении характерного времени релаксации $\tau$ ветви капиллярно-гравитационных и релаксационных волн объединяются в единое составное движение, существующее при всех значениях волновых чисел $k$, в том числе соответствующих и чисто гравитационным волнам $(k \to 0)$.

При уменьшении характерного времени релаксации $\tau$ декременты затухания капиллярных движений жидкости релаксационной природы быстро растут.

## Список литературы


[1] *Быковский Ю.А., Маныкин Э.А., Полуэктов П.П.* и др. // ЖТФ. 1976. Т. 46. Вып. 11. С. 2211–2213.
[2] *Левачова Г.А., Маныкин Э.А., Полуэктов П.П.* // Изв. АН СССР. МЖГ. 1985. № 2. С. 17–22.
[3] *Tejero C.F., Baus M.* // Molecular Physics. 1985. Vol. 54. N 6. P. 1307–1324.
[4] *Алиев И.Н.* // Магнитная гидродинамика. 1987. № 2. С. 78–82.
[5] *Григорьев О.А., Ширяева С.О.* // Изв. РАН. Механика, жидкости и газы. 1996. № 1. С. 98–105.
[6] *Ширяева С.О., Григорьев О.А., Муничев М.И., Григорьев А.И.* // ЖТФ. 1996. Т. 66. Вып. 10. С. 47–62.
[7] *Баструков С.И., Молодцова И.В.* // ДАН. 1996. Т. 350. № 3. С. 321–323.
[8] *Бадмаев Б.Б., Лайдабон Ч.С., Дерягин Б.В., Базарон У.В.* // ДАН СССР. 1992. Т. 322. № 2. С. 307–311.
[9] *Френкель Я.И.* Кинетическая теория жидкостей. Л.: Наука, 1975. 592 с.
[10] *Френкель Я.И.* // ЖЭТФ. 1936. Т. 6. Вып. 4. С. 348–350.
[11] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 623 с.
[12] *Левич В.Г.* Физико-химическая гидродинамика. М.: Физматгиз, 1959. 699 с.
[13] *Ширяева С.О., Григорьев О.А.* // Письма в ЖТФ. 1999. Т. 25. Вып. 2. С. 1–4.
[14] *Григорьев А.И., Ширяева С.О., Коромыслов В.А., Белоножко Д.Ф.* // ЖТФ. 1997. Т. 67. Вып. 8. С. 27–33.