01

Классическая физика и спин электрона

© А.Г. Чирков, И.В. Казинец

Санкт-Петербургский государственный технический университет,
195251 Санкт-Петербург, Россия

(Поступило в Редакцию 27 декабря 1999 г.)

Описан механизм образования собственного магнитного момента электрона и получено правильное значение гиромагнитного отношения в рамках классической физики. Применение квазиклассического квантования Маслова–Лере приводит к точным значениям уровней Ландау, получаемым из уравнения Паули.

Гаудсмит и Уленбек [1], выдвинувшие гипотезу спина электрона, представляли себе электрон как некое твердое тело, вращающееся вокруг своей оси. Впоследствии эта модель была отброшена, так как скорость вращения оказалась больше скорости света. Постепенно физики стали рассматривать спин как глубинное квантовое свойство электрона, которое пока недоступно физическому объяснению. Однако гиромагнитное отношение для электрона не содержит постоянной Планка, а это означает, что последовательное применение методов классической физики должно приводить к правильному результату. Выяснение механизма образования спина электрона в классической физике и есть задача этой работы.

Словом "электрон" в этой работе будем называть точечную частицу, имеющую только заряд и не имеющую высших моментов (дипольных электрического и магнитного, квадрупольных и т.д.). Далее показано, что применение квазиклассических правил квантования Маслова–Лере [2,3] позволяет получить точный спектр Ландау, найденный из уравнения Паули.

1. Наблюдаемые как генераторы преобразований

Рассмотрим каноническое преобразование, порождаемое производящей функцией S, близкой к тождественной [4]

$$S(q,P) = q^i P_i + \varepsilon f(q,P), \quad 0 < \varepsilon \ll 1. \qquad (1)$$

Здесь и далее под повторяющимся индексом i подразумевается суммирование от 1 до n. Произвольная наблюдаемая $g(P,q)$ под действием преобразования (1) переходит в $g'(P,Q)$, так что

$$\delta g = \varepsilon \{f, g\}, \qquad (2)$$

где $\{f,g\}$ — скобка Пуассона функций f и g, определенная как

$$\{f,g\} = \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q^i} - \frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial g}{\partial p_i}. \qquad (3)$$

Формулы (1)–(3) показывают, что наблюдаемые играют двоякую роль. Во-первых, они являются гладкими вещественно значимыми функциями состояния системы, а во-вторых — генераторами канонических преобразований.

Действительно, полагая $f(p,q)=P_i$, найдем $Q^i = q^i + \varepsilon$, т.е. i-я компонента импульса генерирует сдвиг по i-й координате и т.д. Указанное соответствие между наблюдаемыми и каноническими преобразованиями позволяет определить наблюдаемые классической механики через канонические преобразования, которые они генерируют. Кроме этого, следует учесть результаты теоремы Нетер, связывающей классические интегралы движения (энергию, импульс и момент импульса) механической системы с фундаментальными свойствами пространства и времени [4].

Таким образом, мы определим импульс как сохраняющуюся величину, являющуюся генератором сдвига в пространстве; момент импульса как сохраняющуюся величину, являющуюся генератором поворота, и энергию как сохраняющуюся величину, являющуюся генератором сдвига по времени. Заметим, что это совершенно общие определения, справедливые не только в механике дискретных систем, но и в случае любых полевых теорий (классических и квантовых).

2. Импульс электрона в магнитном поле

Рассмотрим нерелятивисткую точечную частицу массой m и зарядом e, движущуюся в однородном и постоянном магнитном поле $\mathbf{B}$. Векторный потенциал можно выбрать в виде $\mathbf{A} = \mathbf{B} \times \mathbf{r}/2$. Направляя третью ось декартовой системы координат по $\mathbf{B}$, находим функции Лагранжа

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) + \frac{eB}{2c}(x_1\dot{x}_2 - \dot{x}_1 x_2) \qquad (4)$$

и Гамильтона

$$H = \frac{1}{2m}\left(\pi_1 + \frac{eB}{2c}x_2\right)^2 + \frac{1}{2m}\left(\pi_2 - \frac{eB}{2c}x_1\right)^2 + \frac{1}{2m}\pi_3^2, \quad (5)$$

где $\pi_1 = m\dot{x}_1 - (eB/2c)x_2$, $\pi_2 = m\dot{x}_2 + (eB/2c)x_1$, $\pi_3 = m\dot{x}_3$ — компоненты обобщенного импульса.

Величины $m\dot{\mathbf{r}}$, $\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{r}}$, $\boldsymbol{\pi}$, которые совпадали для свободной частицы, при наличии поля оказываются разными, и возникает вопрос определения для заряженной частицы величины, играющей ту же роль, что и импульс для незаряженной.

В соответствии с определением в разделе 1 ни $m\dot{\mathbf{r}}$, ни $\boldsymbol{\pi}$ не могут являться импульсом электрона. Однако, используя вторую теорему Нетер [4], нетрудно найти интеграл движения, соответствующий преобразованию пространственного сдвига,

$$\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{r}} + \frac{e}{c}\mathbf{B} \times \mathbf{r}. \qquad (6)$$

Заметим, что (6) является очевидным интегралом уравнений движений с силой Лоренца. При этом скобка Пуассона $\{H, \mathbf{p}\} = 0$, что соответствует закону сохранения импульса. Величина (6) калибровочно инвариантна, что, однако, не относится к $\boldsymbol{\pi}$.

Таким образом, величина $\mathbf{p}$ удовлетворяет всем требованиям раздела 1 и должна считаться импульсом заряженной частицы в статическом и однородном магнитном поле. Однако переход от $\boldsymbol{\pi}$ к $\mathbf{p}$ не канонический и выражать функцию Гамильтона через $\mathbf{p}$ нельзя. Сложности лагранжева и гамильтонова описания магнитного момента (спина) отмечались еще Френкелем [5] и до сих пор не были разрешены.

Широко распространенные рассуждения о взаимодействии заряженной частицы с магнитным полем на основе функции Гамильтона, выраженной через обобщенный импульс $\boldsymbol{\pi}$, неверны. Действительно, при движении заряженной частицы в магнитном поле энергии (функция Гамильтона), выраженная через физическую величину — скорость, совпадает с энергией свободной частицы (магнитное поле не меняет энергии частицы) [5].

Некорректная трактовка связана с неточным определением динамических систем в физической литературе. Гамильтонова механическая система задается четномерным многообразием (фазовым пространством), замкнутой невырожденной 2-формой Ω на нем, принимающей в симплектических координатах x, p канонический вид $\Omega = \sum_i dp_i \Lambda dx_i$, и гладкой функцией на нем (функцией Гамильтона) [6]. Из трех необходимых элементов определения гамильтоновых систем физики обычно обращают внимание только на последний, т. е. вид функции Гамильтона. Тем не менее, в соответствии с определением, гамильтонова система меняется при изменении фазового пространства M и (или) дифференциальной формы Ω на нем при неизменной функции Гамильтона.

Рассмотрим дополнительно некоторую замкнутую 2-форму F на конфигурационном многообразии N: $F = \sum_{i,j} F_{ij} dx_i \Lambda dx_j$ $(dF = 0)$. Эта форма называется формой гироскопических сил. Сумма двух форм $\Omega + F$ определяет новую симплектическую структуру на пространстве кокасательного расслоения конфигурационного многообразия N. Если $H(q, p)$ — некоторая функция Гамильтона на M, то пара $(\Omega + F, H)$ определяет новую гамильтонову систему (с той же функцией Гамильтона) на M. К форме $\Omega + F$ можно применить теорему Дарбу [4] и представить ее в канонической форме. Для этого, пользуясь замкнутостью формы F, запишем локально $F = dA$, $A = \sum_k A_k(x) dx_k$. Тогда в переменных x, p имеем $\Omega + F = \sum dp_i \Lambda dx_i + \sum_i dA_i \Lambda dx_i = \sum d(p_i + A_i) \Lambda dx_i$. Следовательно, новыми каноническими координатами на M будут переменные $x'_k = x_k$, $\pi_k = p_k + A_k(x)$. В новых переменных уравнения Гамильтона имеют канонический вид с функцией Гамильтона $H(x', \pi' - A) = H(x, p)$.

Лагранжево же описание точечной частицы с магнитным моментом не существует, потому что пространство состояний такой системы $R^6 \times S^2$ не является кокасательным расслоением какого-либо конфигурационного пространства.

В электродинамике F–2-форма Фарадея, F_{ik} — тензор электромагнитного поля, A_k — компоненты векторного потенциала. Замкнутость F $(dF = 0)$ есть следствие однородных уравнений Максвелла.

3. Угловой момент электрона в магнитном поле

Применяя теорему Нетер к системе с функцией Лагранжа (4) для нахождения интегралов движения, соответствующих поворотам вокруг осей координат, получаем следующий результат. При поворотах вокруг первой и второй оси функция Лагранжа не инвариантна и добавка к ней не сводится к полной производной по времени, т. е. не существует интегралов движения, соответствующих этим преобразованиям.

Интеграл движения, соответствующий повороту вокруг третьей оси, определен и имеет вид

$$J_3 = m(x_1\dot{x}_2 - x_2\dot{x}_1) + \frac{eB}{2c}(x_1^2 + x_2^2). \qquad (7)$$

Таким образом, ситуация полностью аналогична квантово-механической. Компоненты вектора момента не могут быть каноническими импульсами одновременно. Сохраняется (определена) только проекция момента на выделенное направление (ось квантования). С другой стороны, легко проверить, что $\{J^2, H\} = 0$ и $\{J^2, J_i\} = 0$, так что абсолютная величина полного момента определена и может быть каноническим импульсом одновременно с одной из своих компонент.

Первое слагаемое в (7) не является орбитальным моментом, так как $\mathbf{p} \neq m\dot{\mathbf{r}}$. Выражая полный момент J_3 через орбитальный $L_3 = x_1 p_2 - x_2 p_1$, получаем

$$J_3 = L_3 - \frac{eB}{2c}(x_1^2 + x_2^2) = L_3 + S_3, \qquad (8)$$

т. е., так же как и в теории Дирака, сохраняется только полный момент. Добавочное слагаемое S_3 в (8) следует отождествить с проекцией собственного момента (спина) на третью ось. В векторной форме соответствующая величина имеет вид

$$\mathbf{S} = \frac{e}{2c}\mathbf{r} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{r}), \qquad (9)$$

но определена (сохраняется) только величина $\mathbf{Sn}$ $(\mathbf{n} = \mathbf{B}/B)$.

4. Гиромагнитное отношение для электрона

С учетом соотношений, полученных в разделах 1–3, найдем гиромагнитное отношение для электрона. Для этого вычислим третью проекцию магнитного момента электрона

$$(\mathbf{M})_3 = \frac{e}{2mc}(\mathbf{r}\times m\dot{\mathbf{r}})_3 = \frac{e}{2mc}J_3 - \frac{e^2B}{4mc^2}(x_1^2 + x_2^2). \quad (10)$$

Выражая M_3 через проекцию орбитального момента L_3, находим

$$M_3 = \frac{e}{2mc}L_3 - \frac{e^2B}{2mc^2}(x_1^2 + x_2^2)$$
$$= \frac{e}{2mc}L_3 + \frac{e}{mc}S_3 = M_{\mathrm{orb}} + M_{\mathrm{spin}}. \quad (11)$$

Таким образом, орбитальное гиромагнитное отношение оказывается равным $e/2mc$, а спиновое — e/mc.

Следует отметить, что, как и в теории Дирака, полученные результаты справедливы только для элементарных (не составных) частиц, не имеющих внутренней заряженной структуры. Добавку к импульсу незаряженной частицы $m\mathbf{v}$ следует считать атрибутом заряженной частицы, так же как и спиновую добавку к орбитальному моменту. Сами же добавки имеют весьма прозрачное происхождение. В нерелятивистком приближении и в пренебрежении радиационными процессами поле вблизи электрона можно считать кулоновским. Тогда вокруг частицы будет возникать циркулирующий поток энергии в плоскости, ортогональной направлению $\mathbf{B}$, который будет создавать полевые добавки к наблюдаемым "голой" (без учета собственного поля) частицы.

Полевая добавка к импульсу "голой" частицы $m\mathbf{v}$ вычисляется по формуле

$$\mathbf{p}_f = \frac{1}{4\pi c}\int_V \mathbf{E}_0\times\mathbf{B}\,dV$$
$$= \frac{1}{2\pi c}\int_V \mathbf{A}\operatorname{div}\mathbf{E}\,dV = \frac{2e}{c}\mathbf{A}\big(\mathbf{r}_0(t)\big), \quad (12)$$

где $\mathbf{E}_0 = e\big(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0(t)\big)/|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0(t)|^2$ — собственное поле частицы, $\mathbf{r}_0(t)$ — радиус-вектор электрона, $\mathbf{B}$ — однородное внешнее поле, V — объем сферы с центром в точке нахождения электрона.

В свою очередь полевая добавка к импульсу дает полевой вклад в орбитальный момент

$$\mathbf{L}_f = \mathbf{r}_0\times\mathbf{p}_f = \frac{e}{c}\mathbf{r}_0\times(\mathbf{B}\times\mathbf{r}_0),$$

что в точности совпадает с полевой добавкой (9).

5. Квазиклассическое квантование энергии электрона

Уравнение Гамильтона–Якоби для характеристической функции действия S, записанное в цилиндрических координатах ρ, α, z с осью z, направленной по $\mathbf{B}$, имеет вид

$$\left(\frac{\partial S}{\partial\rho}\right)^2 + \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial S}{\partial\rho} - \frac{1}{2}m\omega\rho\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 = 2mE,$$
$$\omega = \frac{eB}{mc}. \quad (13)$$

Координаты α и z являются циклическими и решение уравнения (13) представимо в виде

$$S = R(\rho) + b_\alpha\alpha + b_z z, \quad (14)$$

где b_α, b_z — произвольные постоянные.

Подставляя (14) в (13), находим

$$R(\rho) = \pm\int\left[2mE - b_z^2 - (b_\alpha/\rho - m\omega\rho/2)^2\right]^{1/2}d\rho. \quad (15)$$

Главная функция Гамильтона $V(\rho,\alpha,z;E,\pi_\alpha,\pi_z;t) = -Et + S$ является функцией канонического преобразования от переменных $\rho,\alpha,z;\pi_\rho,\pi_\alpha,\pi_z$ к переменным $t_0, a_\alpha, a_z, E, b_\alpha, b_z$, являющимися константами, причем связь между старыми и новыми переменными задается соотношениями

$$t - t_0 = \partial S/\partial E = \pm m\int\left[2mE - b_z^2 - (b_\alpha/\rho - m\omega\rho/2)^2\right]^{-1/2}d\rho,$$
$$a_\alpha = \partial S/\partial b_k = \pm\int(m\omega/2 - b_\alpha/\rho^2)$$
$$\times\left[2mE - b_z^2 - (b_\alpha/\rho - m\omega\rho/2)^2\right]^{-1/2}d\rho + \alpha,$$
$$a_z = \partial S/\partial z = \mp\int\left[2mE - b_z^2 - (b_\alpha/\rho - m\omega\rho/2)^2\right]^{-1/2}d\rho + z,$$
$$\pi_\rho = \partial S/\partial\rho = \pm\left[2mE - b_z^2 - (b_\alpha/\rho - m\omega\rho/2)^2\right]^{1/2},$$
$$\pi_\alpha = \partial S/\partial\alpha = b_\alpha,$$
$$\pi_z = \partial S/\partial z = b_z. \quad (16)$$

Введем, согласно [4], вместо обобщенных импульсов π_ρ, π_α новые постоянные импульсы I_ρ, I_α соотношениями

$$I_\rho = \frac{1}{2\pi}\oint \pi_\rho d\rho, \quad (17)$$
$$I_\alpha = \frac{1}{2\pi}\oint \pi_\alpha d\alpha, \quad (18)$$

где интегралы берутся за период изменения соответствующей координаты.

Выражение для (17) примет вид

$$I_\rho = \frac{1}{\pi}\int_{\rho_1^*}^{\rho_2^*}\left[2mE - b_z^2 - (b_\alpha/\rho - m\omega\rho/2)^2\right]^{1/2}d\rho,$$

где $\rho_{1,2}^*$ — нули подынтегрального выражения.

Вычисляя интеграл с помощью теории вычетов, получим

$$I_\rho = \frac{E}{\omega} - \frac{b_z^2}{2m\omega} + \frac{b_\alpha}{2} - \frac{|b_\alpha|}{2}. \quad (19)$$

Заметим, что это выражение отличается от ранее используемых в электродинамике [7].

Если спроектировать траекторию частицы на плоскость (ρ, α), то получим окружность, которая в зависимости от начальных условий может либо охватывать начало координат, либо нет, причем движение положительно заряженной частицы происходит в данной проекции по часовой стрелке. Формулу для b_α, запишем в следующем виде:

$$b_\alpha = \pi_\alpha = m\rho^2\dot{\alpha} + m\omega\rho^2/2 = m\rho^2(\dot{\alpha} + \omega/2). \qquad (20)$$

Если окружность не охватывает начало координат, то на ней существуют точки A, B, в которых $\dot{\alpha} = 0$. Тогда из (20) следует, что при этом $b_\alpha > 0$.

Во втором случае на окружности существуют точки C и D, в которых $v_\rho = \dot{\rho} = 0$. В точке D $v_\alpha = -\omega R_L$, где R_L — радиус окружности, и $v_\alpha = \dot{\alpha}|OD|$, где $|OD| < 2R_L$ — расстояние от начала координат до точки D. Тогда $\dot{\alpha} < -\omega/2$ и при этом $b_\alpha < 0$.

Рассмотрим случай, когда окружность охватывает начало координат. В этом случае $I_\alpha = -b_\alpha$, поскольку $b_\alpha = \pi_\alpha = \mathrm{const}$, а координата α изменяется за период на 2π. Тогда гамильтониан имеет вид

$$H = E = \omega(I_\rho + I_\alpha) + \frac{b_z^2}{2m}. \qquad (21)$$

Так как I_ρ, I_α входит только в виде суммы, то частоты изменения координат ρ и α совпадают (вырождение). В этом случае вместо новых несуществующих импульсов I_ρ, I_α принято вводить новые импульсы $I = I_\rho + I_\alpha$, $P = I_\rho$. Тогда гамильтониан будет зависеть только от I и b_z

$$H = \omega I + \frac{b_z^2}{2m}. \qquad (22)$$

Отвечающая действию I канонически сопряженная переменная ψ является линейной функцией времени $\psi = \omega t + \psi_0$. Отвечающая новому импульсу P канонически сопряженная переменная $Q = \alpha_L$ является константой и имеет смысл угловой координаты центра ларморовской окружности. Сам же импульс $P = m\omega\rho_L^2/2$, где ρ_L — координата центра ларморовской окружности.

В случае, когда окружность, являющаяся проекцией траектории частицы на плоскость (ρ, α) не охватывает начало координат, получаем вместо (21) следующее выражение:

$$H = \omega I_\rho + \frac{b_z^2}{2m}. \qquad (23)$$

Если теперь новыми импульсами считать $I = I_\rho$, $P = I + b_\alpha$ и b_z, то будем иметь то же выражение для гамильтониана (22). Однако необходимо помнить, что используются другие переменные. Используя правила квантования Маслова–Лере [2,3], находим

$$I_\rho = \hbar\left(n_\rho + \frac{1}{2}\right), \quad n_\rho = 0, 1, \dots,$$

$$I_\alpha = n_\alpha\hbar, \quad n_\alpha = 0, \pm1, \pm2, \dots \qquad (24)$$

и из соотношения (19) находим выражение

$$E = \frac{eB\hbar}{mc}\left(n_\rho + \frac{1}{2} + \frac{|n_\alpha| - n_\alpha}{2}\right) + \frac{b_z^2}{2m}, \qquad (25)$$

которое в точности совпадает со спектром Ландау [8], полученным из гамильтониана Паули.

Впервые факт совпадения квазиклассических правил квантования Маслова [3] с точными квантовыми результатами был отмечен Ж. Лере [2]. Сам же И.П. Маслов не указал явно на такое применение своего метода квантования. Он изучил только случай бесконечно больших квантовых чисел, т. е. "принцип соответствия" квантовой механики.

Список литературы

[1] *Goudsmit S.A., Uhlenbeck G.E.* // Phys. Today. 1976. Vol. 29. P. 40.
[2] *Leray J.* Analyse Lagrangienne et Mecanique Quantique, Strasbourg, 1978.
[3] *Карасев М.В., Маслов В.П.* Нелинейные скобки Пуассона. М.: Наука, 1991. 251 с.
[4] *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1979. 439 с.
[5] *Френкель Я.И.* Электродинамика. М.: ОНТИ, 1934.
[6] *Козлов В.В.* Симметрия, топология и резонансы в гамильтоновой механике. Ижевск, 1995. 429 с.
[7] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория поля. М.: Наука, 1967.
[8] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Квантовая механика. М.: Наука, 1967.