

01;03

Капиллярные колебания вязкоупругой среды под влиянием постоянного внешнего воздействия

© Д.Ф. Белоножко, А.И. Григорьев

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
150000 Ярославль, Россия
E-mail: grig@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 15 ноября 1999 г.)

Обнаружены два типа неустойчивости (аперiodическая и колебательная) слоя вязко упругой жидкости, свободная поверхность которого подвержена внешнему силовому воздействию. Для аперiodической неустойчивости найдены аналитические выражения для критического условия ее реализации и величины инкремента. Если угол между направлением силового воздействия и внешней нормалью к свободной поверхности жидкости меньше сорока пяти градусов, то в системе реализуется лишь колебательная неустойчивость, при больших углах — лишь аперiodическая.

В технике и технологии известно и используется явление формирования волнообразного рельефа на изначально плоской поверхности весьма вязкого материала при силовом воздействии на нее, при котором на поверхности возникают как нормальные, так и касательные напряжения. Речь может идти об ударной сварке (сварке взрывом) или об образовании волнового рельефа на твердой поверхности кремния при воздействии на нее высокоэнергетичным пучком атомов (см., например, [1,2] и указанную там литературу). Экспериментальные данные, лежащие в основе этих феноменов, не нашли пока адекватного теоретического истолкования, и в этой связи представляет интерес нижерешаемая задача.

1. Примем, что плоская пленка жидкости с плотностью ρ , кинематической вязкостью ν_0 , временем релаксации вязкости τ , толщиной d на твердой подложке в поле тяжести \mathbf{g} подвержена непрерывному силовому воздействию в результате падения на ее свободную поверхность косо по отношению к нормали потока импульса, передаваемого, например, неким материальным пучком. Требуется определить спектр капиллярных движений в жидком слое.

Пусть $\Pi_{jk} = \delta V_j V_k$ — тензор плотности потока импульса внешнего силового воздействия в области над поверхностью жидкости (V_j — компоненты скорости пучка, δ — его объемная плотность) [3]. Для простоты будем решать двумерную задачу в декартовой системе координат XOZ с осью OZ , направленной вертикально вверх ($\mathbf{n}_z \parallel -\mathbf{g}$), когда уравнение возмущенной свободной границы жидкости имеет вид $z = \xi(x, t)$, а невозмущенной — $z = 0$, твердое же дно расположено при $z = -d$. Явлениями, связанными с притоком вещества в жидкость, будем пренебрегать. В приближении волн малой амплитуды полная математическая формулировка задачи имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + [\nabla \times \mathbf{U}] \times \mathbf{U} = -\frac{1}{\rho} \nabla \left(P + \frac{U^2}{2} \right) + \nu \Delta \mathbf{U} + \mathbf{g}, \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{U} = 0, \quad (2)$$

$$z = \xi : \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} = U_z - U_x \frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad (3)$$

$$\sigma_{jk} n_k^* + \Pi_{jk} n_k = P_\gamma n_j, \quad (4)$$

$$P_\gamma = -\gamma \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}, \quad n_j = \begin{bmatrix} -\frac{\partial \xi}{\partial x} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad n_j^* = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$\Pi_{jk} = \begin{bmatrix} \delta V_x^2 & \delta V_x V_z \\ \delta V_x V_z & \delta V_z^2 \end{bmatrix},$$

$\sigma_{jk} =$

$$\begin{bmatrix} \rho U_x^2 + P - 2\rho\nu \frac{\partial U_x}{\partial x} & \rho U_x U_z - \rho\nu \left(\frac{\partial U_x}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial x} \right) \\ \rho U_x U_z - \rho\nu \left(\frac{\partial U_x}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial x} \right) & \rho U_z^2 + P - 2\rho\nu \frac{\partial U_z}{\partial z} \end{bmatrix},$$

$$z = -d : \quad \mathbf{U} = 0, \quad (5)$$

$$\xi = \xi_0 \exp(st - ikx), \quad (6)$$

$$\nu = \frac{\nu_0}{1 + s\tau}. \quad (7)$$

Здесь

$$P_\gamma = -\gamma \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

— лапласовское давление под возмущенной свободной поверхностью жидкости [3,4]; γ — коэффициент поверхностного натяжения; n_j — столбец координат вектора внешней к поверхности жидкости нормали; n_j^* — вектор-столбец внутренней нормали; квадратные матрицы Π_{jk} и σ_{jk} составлены из компонент тензора плотности потока импульса над возмущенной поверхностью и под ней [3]. Пусть возмущение изначально плоской поверхности имеет вид бегущей волны (6) с волновым числом $k = 2\pi/\lambda$ и комплексной частотой s . Следуя [5], примем, что вязкость ν зависит от частоты в соответствии с формулой Максвелла (7).

2. Задачу (1)–(7) будем решать путем разложения по малой амплитуде волнового возмущения ξ_0 . Считая,

что поле скоростей в жидкости при заданном силовом воздействии в нулевом приближении имеет лишь горизонтальную составляющую, а во всех последующих приближениях и горизонтальную, и вертикальную, применим к (1)–(5) стандартную процедуру линеаризации и получим задачи нулевого и первого порядка приближений по ξ_0 .

Математическая формулировка задачи определения в нулевом приближении стационарной составляющей давления в жидкости $p = p_0(z)$ и горизонтальной компоненты скорости $u_0 = u_0(z)$ имеет вид

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{p_0}{\rho} + gz \right) = 0, \quad \frac{d^2 u_0}{dz^2} = 0,$$

$$z = 0: \quad -\delta V_x V_z - \rho \nu \frac{du_0}{dz} = 0,$$

$$-\delta V_z^2 + p_0 = 0,$$

$$z = -d: \quad u_0 = 0.$$

Решение такой задачи легко выписывается

$$u_0 = U_0 \left(1 + \frac{z}{d} \right), \quad U_0 = -\frac{\delta V_x V_z}{\rho \nu} d, \quad (8)$$

$$P = -\rho g z + \delta V_z^2. \quad (9)$$

Математическая формулировка задачи определения добавок первого порядка малости к давлению $p = p(x, z, t)$ и добавки первого порядка малости к полю скоростей $\mathbf{u} = u_x \mathbf{n}_x + u_z \mathbf{n}_z$ (где $u_x = u_x(x, z, t)$; $u_z = u_z(x, z, t)$), имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + [\nabla \times u_0 \mathbf{n}_x] \times \mathbf{u} + [\nabla \times \mathbf{u}] \times u_0 \mathbf{n}_x \\ = -\nabla \left(\frac{p}{\rho} + u_0 u_x \right) + \nu \Delta \mathbf{u}, \end{aligned}$$

$$\text{div}(\mathbf{u}) = 0,$$

$$z = 0: \quad u_z = \frac{\partial \xi}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \xi}{\partial x},$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} (\delta V_x^2 - \delta V_z^2) + \rho u_0 \frac{\partial \xi}{\partial t} = \rho \nu \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right),$$

$$p + \rho g \xi - 2\rho \nu \frac{\partial u_z}{\partial z} = -\gamma \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2},$$

$$z = -d: \quad \mathbf{u} = 0.$$

На основе теоремы Гельмгольца о разделении произвольного векторного поля на потенциальную и вихревую составляющие задачу первого порядка малости можно сформулировать в скаляризованном виде

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{N}}_1 \equiv \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{n}_x + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{n}_z, \quad \hat{\mathbf{N}}_2 \equiv -\frac{\partial}{\partial z} \mathbf{n}_x + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{n}_z, \\ \Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{N}}_1 \varphi + \hat{\mathbf{N}}_2 \psi, \quad (11)$$

$$\Delta \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} - \nu \Delta \psi \right) + u_0 \Delta \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = 0, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{N}}_2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} - \nu \Delta \psi - \frac{du_0}{dz} \varphi \right) + u_0 \Delta \psi \mathbf{n}_z \\ = \hat{\mathbf{N}}_1 \left(\frac{p}{\rho} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} + u_0 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) - \psi \frac{du_0}{dz} \right) = 0, \end{aligned}$$

$$\Delta \varphi = 0, \quad (14)$$

$$z = 0: \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad (15)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} W + \rho u_0 \frac{\partial \xi}{\partial t} = \rho \nu \left(2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right),$$

$$W = \delta (V_x^2 - V_z^2), \quad (16)$$

$$p - \rho g \xi - 2\rho \nu \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \right) = -\gamma \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}, \quad (17)$$

$$z = -d: \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0, \quad (18)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0. \quad (19)$$

Будем искать решение задачи (10)–(19) в виде

$$\varphi = Z(z) \exp(st - ikx), \quad (20)$$

$$\psi = \Lambda(z) \exp(st - ikx). \quad (21)$$

Из уравнения Лапласа (14) сразу можно найти

$$\begin{aligned} \varphi = (A \text{ch}(kz) + B \text{sh}(kz)) \exp(st - ikx); \\ A, B — \text{const}. \end{aligned} \quad (22)$$

В приближении А показано, что уравнение (15) может быть преобразовано к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений для определения неизвестной функции $\Lambda(z)$

$$\begin{aligned} \left(D^2 - q^2 - i \frac{U_0}{\nu} \left(1 + \frac{z}{d} \right) \right) F(z) = 0, \quad q^2 = k^2 + \frac{s}{\nu}, \\ (D^2 - k^2) \Lambda(z) = F(z), \quad D^2 = \frac{d^2}{dz^2}. \end{aligned} \quad (23)$$

3. Решаемая задача несколько упрощается, если скорость стационарного течения u_0 вдоль горизонтальной оси мала по сравнению со скоростью волновых движений жидкости или сравнима с ней. Исходя из (8), соответствующее условие можно записать в виде

$$U_0 = \frac{\delta |V_x V_z|}{\rho \nu} d = \frac{\delta}{\rho} \frac{V^2 |\sin(2\beta)|}{2\nu |s|} kd \lesssim |u_k|$$

или

$$\frac{\delta}{\rho} \frac{V^2 |\sin(2\beta)|}{2\nu|s|} kd = \frac{\delta}{\rho} \frac{V^2}{|u_k u_\nu|} \frac{|\sin(2\beta)|}{2}$$

$$= \frac{\delta}{\rho} \frac{V^2 |\sin(2\beta)|}{2|u_k|^2} kd |\alpha| \lesssim 1,$$

$$u_k = \frac{s}{k}, \quad u_\nu = \frac{\nu}{d}, \quad \alpha = \frac{s}{\nu k^2}. \quad (24)$$

Здесь β — угол между направлением внешней силы и нормалью к свободной поверхности. Будем искать решения задачи (10)–(19), которые удовлетворяют условию (24). Тогда во всех уравнениях и граничных условиях слагаемыми, содержащими φ , ψ , ξ , p , u , пропорциональными u_0 и du_0/dz , можно пренебречь как величинами более высокого порядка малости, чем первый. Тогда условие (13) приобретает интегрируемый вид

$$\nabla \left(\frac{p}{\rho} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = 0, \quad \nabla \equiv \mathbf{N}_1 \equiv \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{n}_x + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{n}_z,$$

Из второго уравнения системы (23) следует, что функция $F(z)$ имеет первый порядок малости по ξ_0 . Поэтому результат действия пропорциональной U_0 части оператора первого уравнения (23) на $F(z)$ имеет второй порядок малости. Система (23) при этом становится системой дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами

$$(D^2 - q^2)F = 0,$$

$$q^2 = k^2 + \frac{s}{\nu}, \quad D^2 = \frac{d^2}{dz^2}. \quad (25)$$

$$(D^2 - k^2)\Lambda = F,$$

Общее решение этой системы, рассмотренное вместе с (22) и (11), как показано в Приложении В, допускает такое переобозначение констант интегрирования в общих выражениях для φ и ψ , что формулировка скаляризованной задачи для величин первого порядка малости принимает вид

$$\varphi = (A \operatorname{ch}(kz) + B \operatorname{sh}(kz)) \exp(st - ikx),$$

$$\psi = (a \operatorname{ch}(qz) + b \operatorname{sh}(qz)) \exp(st - ikx), \quad (26)$$

$$p = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad (27)$$

$$z = 0: \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial t}, \quad (28)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} W = \rho \nu \left(2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right),$$

$$W \equiv \delta (V_x^2 - V_z^2), \quad (29)$$

$$p - \rho g \xi - 2\rho \nu \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \right) = -\gamma \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}, \quad (30)$$

$$z = -d: \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0, \quad (31)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0. \quad (32)$$

4. От соотношений (26)–(32) несложно перейти к системе четырех однородных линейных уравнений относительно констант a, b, A, B

$$s\nu(k^2 + q^2)A + \omega_0^2 B - i\omega_0^2 a - i2\nu k q b = 0,$$

$$ik^2(2\rho\nu s - W)B + (\rho\nu s(k^2 + q^2) - k^2 W)a = 0,$$

$$-ik \operatorname{ch}(kd)A + ik \operatorname{sh}(kd)B + q \operatorname{sh}(qd)a - q \operatorname{ch}(qd)b = 0,$$

$$-\operatorname{sh}(kd)A + \operatorname{ch}(kd)B - i \operatorname{ch}(qd)a + i \operatorname{sh}(qd)b = 0,$$

которая имеет однозначное решение, только если определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных, равен нулю. Это условие определит дисперсионное уравнение (ДУ) для решаемой задачи в приближении (24). В безразмерных переменных, в которых $\rho = \gamma = g = 1$, а характерными масштабами для k, s, ν и d являются

$$k_* \equiv \sqrt{\rho g / \gamma}, \quad s_* \equiv \sqrt[4]{\rho g^3 / \gamma}, \quad \nu_{0*} = \sqrt[4]{\gamma^3 / (g \rho^3)},$$

$$d_* = \sqrt{\gamma / \rho g}, \quad \tau = \sqrt[4]{\gamma / \rho g^3},$$

ДУ имеет вид

$$k^2 q \left(4s(k^2 + q^2) - (3k + q) \frac{W}{\nu} \right) + \frac{s\omega_0^2}{\nu^2} \left(k \operatorname{ch}(kd) \operatorname{sh}(qd) \right.$$

$$\left. - q \operatorname{sh}(kd) \operatorname{ch}(qd) \right) - 2k^3 q \left(2s - \frac{W}{\nu} \right) \left(k \operatorname{ch}(kd) \operatorname{ch}(qd) \right.$$

$$\left. - q \operatorname{sh}(kd) \operatorname{sh}(qd) \right) + (k^2 + q^2) \left(s(k^2 + q^2) - k^2 \frac{W}{\nu} \right)$$

$$\times \left(k \operatorname{sh}(kd) \operatorname{sh}(qd) - q \operatorname{ch}(kd) \operatorname{ch}(qd) \right) = 0,$$

$$\omega_0^2 \equiv k(1 + k^2), \quad \nu \equiv \frac{\nu_0}{1 + s\tau},$$

$$W \equiv (\delta / \rho) \sqrt{\rho / (g\gamma)} (V_x^2 - V_z^2)$$

$$\equiv -(\delta / \rho) \sqrt{\rho / (g\gamma)} V^2 \cos(2\beta). \quad (33)$$

Функция ω_0 имеет смысл частоты гравитационно-капиллярных волн для неограниченно глубокой идеальной жидкости. Величина безразмерного параметра W зависит от абсолютного значения безразмерной плотности потока импульса в пучке и от угла падения β .

5. Рассмотрим случай неупругой среды: $\tau = 0$. Общий вид решений ДУ приведен на рис. 1, на котором действительные и мнимые части частоты s построены как функции от безразмерного параметра W при $k = 1, kd = 1, \nu = 0.5$.

Наиболее интересные с позиций проводимого анализа ветви уравнения (33) имеют общую точку ветвления (1–2–3). Координаты этой точки: $s \approx -1.2; W \approx -0.8$. Влево от нее, в область отрицательных

значений W , уходит ветвь капиллярных волновых движений 2. Частота волн увеличивается с уменьшением W . Вправо уходят две ветви аperiodических движений: возрастающая с ростом W ветвь 1 и убывающая 3. Ветвь 3 описывает экспоненциально затухающие движения, так же как часть ветви 1 при $\text{Re } s < 0$. При $W \approx 1.6$ ветвь 1 выходит в область $\text{Re } s > 0$, т.е. соответствующее ей движение становится неустойчивым.

Кроме перечисленных, на рис. 1 приведены ветви волновых движений 4 и ветви аperiodически затухающих движений 5–8. Расширение вычислительной области по абсолютной величине s показало, что существуют и другие действительные ветви, аналогичные кривым 5–8, расположенные ниже их, а уравнение (33) имеет бесконечное семейство аperiodически затухающих решений, связанных с отражением движущейся жидкости от дна (подробнее об этом см. в [6]). Ветвь волновых движе-

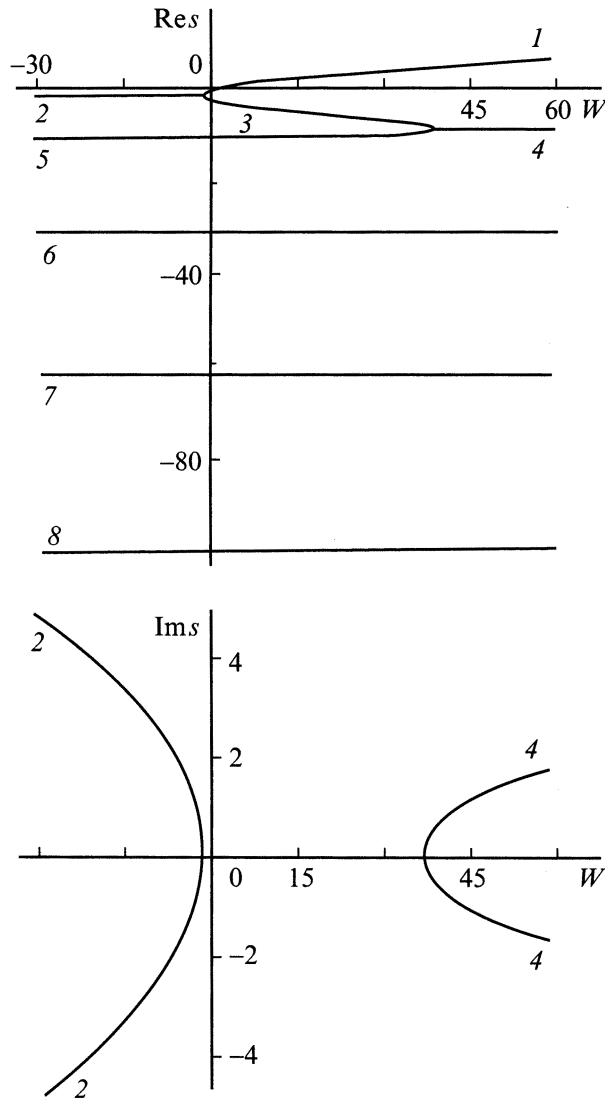


Рис. 1. Зависимости вещественной и мнимой компонент комплексной частоты s от величины параметра W , построенные при $k = 1$, $\nu = 0.5$, $kd = 1$, $\tau = 0$.

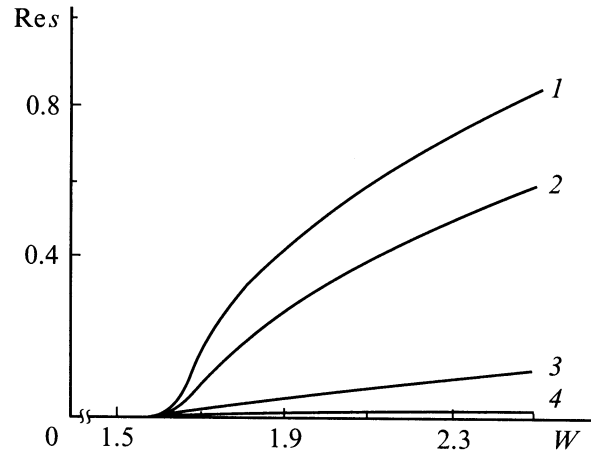


Рис. 2. Зависимости вещественной части комплексной частоты (инкремента аperiodической неустойчивости) от величины параметра W в области $\text{Re } s > 0$. $k = 1$, $kd = 1$, $\tau = 0$; ν : 1 — 0.01, 2 — 0.1, 3 — 1, 4 — 10.

ний 4 образуется в результате взаимодействия ветвей 3 и 5. Интересно, что частоты волнового движения 4 растут с при увеличении значения W .

В нижеследующем анализе сосредоточимся на первых трех ветвях дисперсионного уравнения, связанных точкой ветвления (1–2–3), являющейся началом неустойчивой ветви. Ветви с номерами, большими 3, будем опускать, как не представляющие интереса (при $\tau = 0$) в смысле исследования устойчивости свободной поверхности. Рис. 2 иллюстрирует зависимость величины инкремента обнаруженной аperiodической неустойчивости, связанной с ветвью 1, от вязкости.

Качественно сходная картина получается и для более высоких волновых чисел, только точка ветвления (1–2–3) и критическое для реализации неустойчивости значение параметра $W \equiv W_c$ смещаются вправо. Так, для $k = 10$ координаты точки ветвления: $s \approx -1.4$, $W \approx -0.7$, а критическое значение параметра W увеличивается до $W_c \approx 8.2$. Зависимости величин инкрементов неустойчивости от W для $k = 10$ при различных вязкостях приведены на рис. 3.

а) Приближение сильно вязкой жидкости, согласно [4], можно выделить условием

$$|\alpha| \ll 1, \quad \alpha \equiv \frac{s}{\nu k^2}. \quad (34)$$

Ясно, что и условие (24) при этом будет выполняться. Если же учесть, что в приближении сильной вязкости должно, согласно [4], выполняться неравенство $|s|^2 > \omega_0^2$, то условие (24) можно сделать более сильным

$$\frac{\delta V^2 |\sin(2\beta)|}{\rho} \frac{kd |\alpha|}{2U_k^2} < 1, \quad U_k = \frac{\omega_0^2}{k^2}, \quad \omega_0^2 = k(1 + k^2). \quad (35)$$

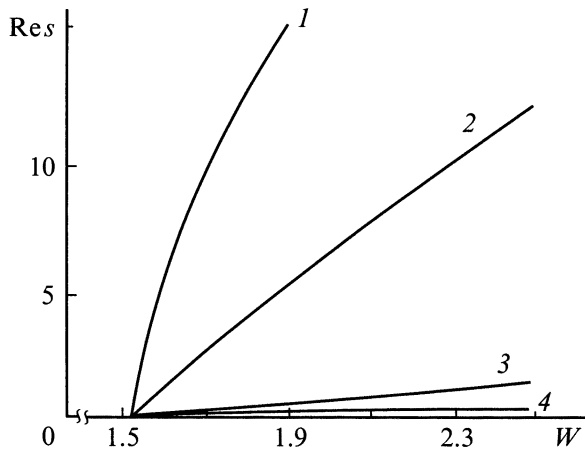


Рис. 3. Зависимости, аналогичные приведенным на рис. 2, рассчитанные при $k = 10$.

Здесь U_k — фазовая скорость гравитационно-капиллярной волны. Расчеты показывают, что нетривиальная асимптотическая аппроксимация ДУ при $\alpha \rightarrow 0$ может быть получена, если функции, входящие в (33), разложить в ряд по целым степеням α , пренебрегая слагаемыми порядка $O(\alpha^4)$ и выше. В результате получается ДУ в приближении сильно вязкой жидкости, достоверное лишь при малых значениях переменной kd ,

$$\begin{aligned} \eta s^2 + \varkappa s + (\mu - k^2(kd)^2W) &= 0, \\ \eta &\equiv (kd)^2 + \text{sh}(kd) \text{ch}(kd)kd + \text{ch}^2(kd), \\ \varkappa &\equiv 2\nu k^2(\text{ch}^2(kd) + (kd)^2), \\ \mu &\equiv \omega_0^2(\text{sh}(kd) \text{ch}(kd) - kd). \end{aligned} \quad (36)$$

Полученное квадратное уравнение имеет корень с положительной действительной частью (соответствующий неустойчивости) только при

$$W > \left(k + \frac{1}{k}\right) \left(\frac{\text{sh}(kd) \text{ch}(kd)}{(kd)^2} - \frac{1}{kd}\right), \quad (37)$$

что и дает критическое условие реализации неустойчивости. В этом случае положительный корень уравнения (36), определяющий инкремент неустойчивости, удовлетворяет условию (34) и имеет вид

$$s = \frac{1}{2\eta} \left(\sqrt{\varkappa^2 - 4\eta(\mu - k^2(kd)^2W)} - \varkappa \right). \quad (38)$$

При выполнении условия

$$\begin{aligned} \frac{4\mu\eta - \varkappa^2}{4\eta} < k(kd)^2W < \mu + \nu k^2(\varkappa + \eta\nu k^2), \\ kd < 10 \end{aligned} \quad (39)$$

$|\alpha| < 1$ и (38) удовлетворительно описывает по крайней мере одно из решений уравнения (33), которое при выполнении условия (37) является инкрементом

апериодической неустойчивости, а в противном случае декрементом апериодического затухания.

Сказанное иллюстрирует рис. 4, на котором кроме части ветви I , имеющей прежний смысл, приведена ветвь Ia , рассчитанная по формуле (38). Вертикальные штриховые линии отсекают на горизонтальной оси отрезок значений W , удовлетворяющих условию (39). Видно, что на этом отрезке кривая Ia удовлетворительно аппроксимирует ветвь I ДУ (33). При стягивании этого отрезка к пороговому значению $W = W_c$ точность аппроксимации увеличивается, а само пороговое значение является точкой касания линий I и Ia . Видно, что величина W_c от вязкости не зависит.

Отметим, что приведенные рассуждения правомерны лишь для жидкости малой толщины, поскольку построение разложения уравнения (33) по степеням малого параметра подразумевает разложение в степенной ряд гиперболических функций, у которых аргумент $kd \cdot O(\alpha)$ имеет первый порядок малости по α .

Из (37) видно, что наиболее неустойчивым является волна с $k = 1$, а критическое значение W для нее есть

$$W_c = 2 \left(\frac{\text{sh}(kd) \text{ch}(kd)}{(kd)^2} - \frac{1}{kd} \right) \quad (k = 1). \quad (40)$$

Поскольку $kd > 0$, то критические значения W положительны, что имеет место только для углов падения, больших, чем $\pi/4$.

б) Рассмотрим приближение очень тонкого сильно вязкого слоя без учета расклинивающего давления [7]. Пренебрегая возможным влиянием флуктуационных сил,

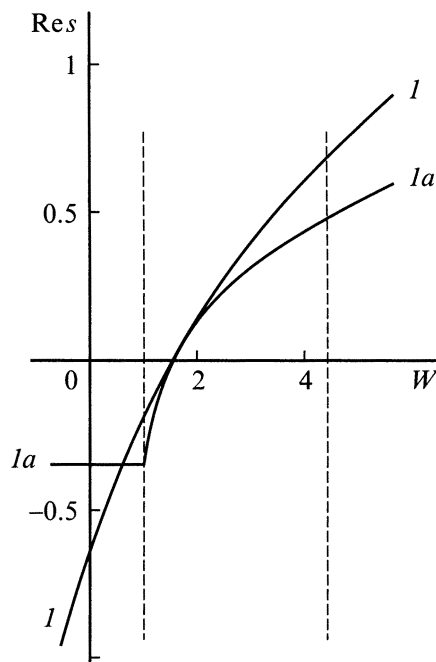


Рис. 4. Зависимости вещественной части решений, связанных с апериодической неустойчивостью: I — для полного дисперсионного уравнения (33) и Ia — для асимптотического дисперсионного уравнения (36) при $k = 1, kd = 1, \nu = 0.5$.

найдем предельные при малых kd формы выражений (37) и (40)

$$W > (2/3)kd(k + 1/k), \quad (kd \ll 1), \quad (41)$$

$$W_c = (4/3)kd \quad (kd \ll 1, \quad k = 1). \quad (42)$$

В пределе $kd \rightarrow 0$ критическое значение W_c стремится к нулю со стороны положительных значений, а критическое значение угла падения стремится к $\pi/4$ со стороны больших углов.

В заключение этого раздела отметим, что физической причиной проанализированной аperiodической неустойчивости, по-видимому, является "перекачка" энергии касательных напряжений на свободной поверхности слоя в энергию нормальных напряжений.

6. Но вернемся к вязкоупругой жидкости. На рис. 5 и 6 приведены зависимости, аналогичные представленным на рис. 1, но рассчитанные при отличном от нуля

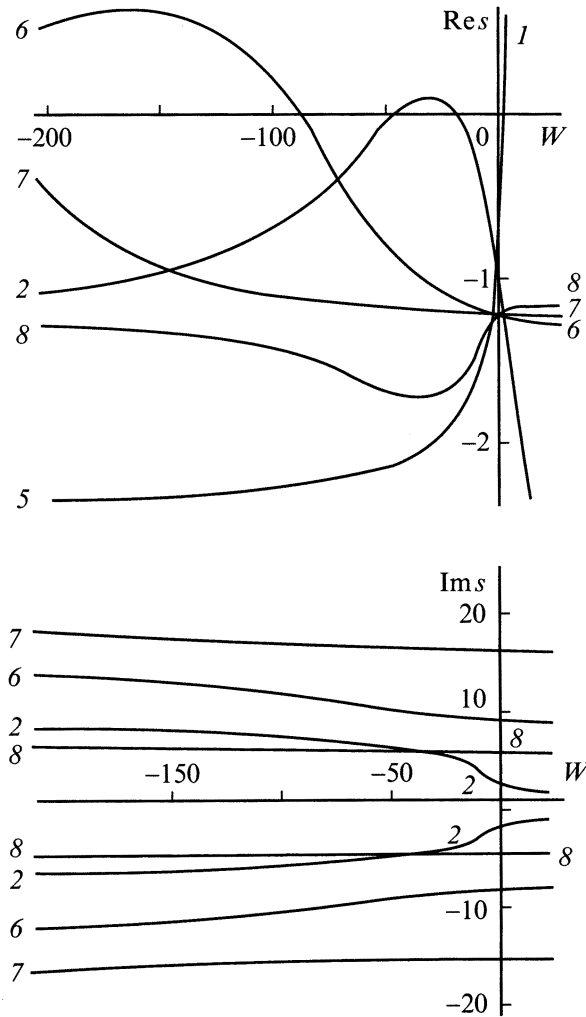


Рис. 6. Зависимости, аналогичные приведенным на рис. 5 при $\tau = 0.4$.

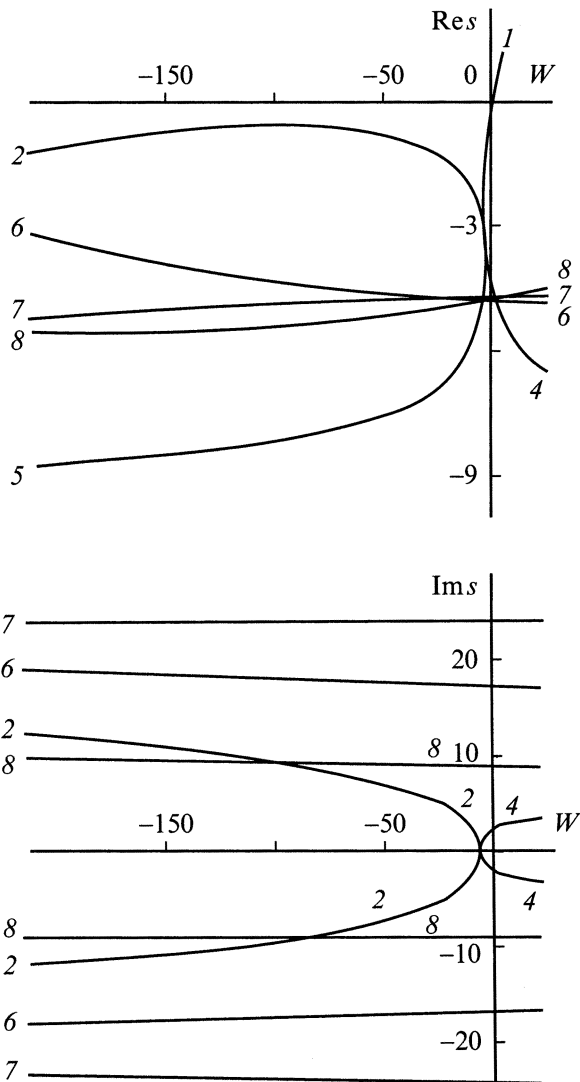


Рис. 5. Зависимости вещественной и мнимой компонент комплексной частоты от величины параметра W при $k = 1$, $\nu = 0.5$, $kd = 1$, $\tau = 0.1$.

времени релаксации вязкости. Как показывают расчеты, форма ветвей, не связанных с точками ветвления (1-2-3) и (3-4-5) (рис. 1) изменяется слабо. Поэтому на рис. 5 и 6 эти кривые не показаны, а масштаб выбран так, чтоб понятнее было поведение ветвей 1-5 и новых ветвей 6-8, связанных с учетом упругости жидкости и не имеющих ничего общего с одноименными ветвями с рис. 1.

Сравнивая рис. 1 и 5, 6, можно заметить, что наличие у жидкости упругих свойств приводит к слиянию точек ветвления (1-2-3) и (3-4-5), исчезновению ветви 3 и формированию одной точки ветвления (1-2-4-5). Форма кривых 1 и 2 при этом изменяется весьма незначительно. В частности, появление у жидкости упругих свойств ($\tau \neq 0$) никак не изменило условия начала развития аperiodической неустойчивости, исследованной в предыдущем разделе.

При увеличении параметра τ кривые, образующие точку ветвления (1-2-4-5), перезамыкаются так, что линии 1 и 5, соответствующие аperiodическим движениям,

объединяются. Неустойчивая часть образованной таким образом ветви, находящаяся в области $\text{Re } s > 0$, на рис. 6 обозначена номером 1, а устойчивая ее часть расположенная в области $\text{Re } s < 0$, обозначена номером 5, чтобы сохранить единообразие в обозначениях.

На рис. 5 и 6 представлены те же зависимости, что и на рис. 1, но в области $W < 0$, при $\tau = 0.1$ и $\tau = 0.4$ соответственно. Как показывают расчеты, положение максимума действительной части ветви 2 (рис. 5) при увеличении безразмерного времени релаксации до $\tau = 0.3$ смещается вправо вверх до касания горизонтальной координатной оси на зависимости $\text{Re } s = \text{Re } s(W)$. Дальнейшее увеличение τ до $\tau = 0.4$ приводит к выходу этой выпуклости в область $\text{Re } s > 0$ и еще большему смещению вправо (рис. 6). При $\tau > 0.3$ в области $W < 0$ имеется множество значений W , при которых реализуется колебательная неустойчивость довольно высокой частоты. Это множество — отрезок. Примерно в его середине инкремент неустойчивости проходит через максимум. Сам отрезок появляется при $\tau > 0.3$, плотно охватывая значение $W \approx -40$. При увеличении τ его середина смещается вправо, а сам отрезок существенно расширяется: при $\tau = 0.4$ его ширина $\Delta W \approx 20$, а положение середины $W \approx -30$. Можно предположить, что обнаруженная неустойчивость — следствие раскочки капиллярных волн упругими волнами. При увеличении τ и волнового числа k правая граница области реализации колебательной неустойчивости имеет тенденцию приближаться к значению $W = 0$.

Подобный анализ можно провести и для эволюции ветвей 6 и 7 (рис. 5 и 6). Все свойства этих ветвей такие же, как у ветви 2. Однако соответствующие неустойчивости существуют при гораздо больших по абсолютной величине отрицательных значениях W , но в то же время наблюдаемы при меньших временах релаксации τ . Кроме того, это ветви не капиллярных, а вязкоупругих волновых движений.

По-видимому, при больших временах релаксации вязкости смещение диапазона изменения W , в котором реализуется колебательная неустойчивость, от нуля в область отрицательных значений связано с последовательным прохождением перемежающихся областей устойчивости и колебательной неустойчивости. В ближайшей к точке $W = 0$ области неустойчивости неустойчивы капиллярные волны, а во всех остальных областях — вязкоупругие волны. При малых временах релаксации неустойчивы только вязкоупругие волны.

Отметим, что в численных расчетах при $W > 0$ обнаруживалась лишь неустойчивость, исследованная в предыдущем пункте. Критические условия ее реализации никак не изменялись при отличных от нуля значениях τ , а инкремент увеличивался с ростом τ (более подробно см. [8]).

Интересно отметить, что обе обнаруженные неустойчивости в отличие от других капиллярных неустойчивостей свободной поверхности жидкости — Тонкса–Френкеля, Кельвина–Гельмгольца, Рэля–Тей-

лора (см., например, [9–12]) порождаются касательной, а не нормальной компонентой динамического граничного условия.

Вероятная физическая природа колебательной неустойчивости — взаимная раскочка капиллярных и релаксационных волн при наличии внешнего притока энергии.

Заключение

Непрерывное силовое воздействие на свободную поверхность вязкоупругой жидкости может вызвать как колебательную, так и апериодическую неустойчивость. Колебательная неустойчивость реализуется, только если жидкость обладает упругими свойствами, а удвоенный угол, который составляет направление силового воздействия с внешней к свободной поверхности нормалью, меньше прямого. Условия реализации апериодической неустойчивости не зависят от упругих свойств жидкости. Апериодическая неустойчивость имеет место, только если касательная к свободной поверхности компонента плотности потока импульса превосходит нормальную составляющую.

Приложение А

Вывод уравнения для определения функции тока

Для решения уравнения (13) в виде бегущей волны (21) верны соотношения

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -ik\psi, \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = s\psi,$$

$$\Delta \psi = ((D^2 - k^2)\Lambda(z)) \exp(st - ikx),$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} - \nu \Delta \psi = -\nu \left((D^2 - (k^2 + s/\nu))\Lambda(z) \right) \exp(st - ikx),$$

$$D^2 \equiv \frac{d^2}{dz^2}.$$

Отсюда следует справедливость выражений

$$\Delta \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} - \nu \Delta \psi \right) = -\nu \left((D^2 - k^2)(D^2 - (k^2 + s/\nu))\Lambda(z) \right) \times \exp(st - ikx),$$

$$u_0 \Delta \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = -iku_0 \left((D^2 - k^2)\Lambda(z) \right) \exp(st - ikx).$$

Здесь $\Lambda(z)$ — амплитудное значение функции тока. Подставляя последние два выражения в уравнение (16) и опуская экспоненциальный множитель, несложно получить обыкновенное дифференциальное уравнение для $\Lambda(z)$

$$-\nu(D^2 - k^2)(D^2 - (k^2 + s/\nu))\Lambda -iku_0((D^2 - k^2)\Lambda) = 0,$$

$$u_0 = \frac{U_0}{\nu} \left(1 + \frac{z}{d}\right).$$

В связи с перестановочностью дифференциальных операторов $(D^2 - k^2)$ и $(D^2 - (k^2 + s/\nu))$ это уравнение равносильно следующему:

$$(D^2 - (k^2 + s/\nu))(D^2 - k^2)\Lambda(z) - ik\frac{u_0}{\nu}(D^2 - k^2)\Lambda(z) = 0,$$

которое, обозначая $(D^2 - k^2)\Lambda(z)$ за новую функцию и используя определение u_0 , можно переписать в виде системы

$$(D^2 - q^2)F(z) - i\frac{U_0}{\nu} \left(1 + \frac{z}{d}\right)F(z) = 0, \quad q^2 = k^2 + \frac{s}{\nu},$$

$$(D^2 - k^2)\Lambda(z) = F(z).$$

Из левой части первого уравнения этой системы легко выделить дифференциальный оператор, действующий на $F(z)$, и получить систему (23).

Приложение В

Вывод выражения для потенциала поля скоростей и функции тока

1) Общее выражение для функции тока в приближении (24). В приближении (24) амплитудное значение $\Lambda(z)$ функции тока, искомой в виде (21), удовлетворяет системе (25) с решением первого уравнения

$$F = C \exp(qz) + G \exp(-qz); \quad C, G — \text{const},$$

благодаря чему второе уравнение превращается в неоднородную задачу

$$(D^2 - k^2)\Lambda = C \exp(qz) + G \exp(-qz). \quad (\text{B.1})$$

Исключая из рассмотрения ситуацию $s = 0$ (т.е. $k = q$), несложно получить частное решение этого уравнения

$$\tilde{\Lambda} = \frac{C \exp(qz)}{q^2 - k^2} + \frac{G \exp(-qz)}{q^2 - k^2} = L \exp(qz) + M \exp(-qz).$$

Принимая L и M за новые постоянные, легко выписать общее решение уравнения (B.1) как сумму найденного частного решения и общего решения соответствующего однородного уравнения

$$\Lambda = L \exp(qz) + M \exp(-qz) + \eta \exp(kz) + \chi \exp(-kz).$$

Переопределяя константы и используя (21), общее решение для ψ можно представить с помощью гиперболических функций

$$\psi = \psi_1 + \psi_2; \quad \psi_1 = (a \operatorname{ch}(qz) + b \operatorname{sh}(qz)) \exp(st - ikx);$$

$$a, b, c, r — \text{const}; \quad \psi_2 = (c \operatorname{ch}(kz) + r \operatorname{sh}(kz)) \exp(st - ikx). \quad (\text{B.2})$$

Заметим, что ψ_2 обладает следующими свойствами:

$$\hat{N}_2 \psi_2 = -\frac{\partial \psi_2}{\partial z} \mathbf{n}_x + \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \mathbf{n}_z = -k \psi_2 \mathbf{n}_x - ik \psi_2 \mathbf{n}_z$$

$$= -\operatorname{grad}(i \psi_2), \quad (\text{B.3})$$

$$\Delta \psi_2 = \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z^2} = -k^2 \psi_2 + k^2 \psi_2 \equiv 0. \quad (\text{B.4})$$

2) Переопределение потенциала и функции тока. В связи с (B.2) и (B.3) соотношение (11) можно переписать в виде

$$\mathbf{u} = \hat{N}_1 \nabla \Phi + \hat{N}_2 \psi_1, \quad \Phi = \varphi - i \psi_2,$$

$$\Delta \Phi = 0. \quad (\text{B.5})$$

Для нововведенной функции Φ выполняется свойство (B.5), присущее исходному потенциалу φ , на основе которого скаляризовались уравнения и граничные условия задачи. Нет необходимости проводить процедуру скаляризации задачи, используя новую переменную Φ . В отличие от уже проведенной скаляризации будет лишь по-другому обозначен потенциал. Удобнее сохранить за потенциалом прежнее обозначение φ и, учитывая (22), (B.2), (B.4), понимать под общим решением уравнений гидродинамики соотношения

$$\varphi = \left((A - ic) \operatorname{sh}(kz) + (B - ir) \operatorname{ch}(kz) \right) \exp(st - ikx);$$

$$A, B, c, r — \text{const};$$

$$\psi = \left(a \operatorname{ch}(qz) + b \operatorname{sh}(qz) \right) \exp(st - ikx); \quad a, b — \text{const}.$$

Постоянные $(A - ic)$ и $(B - ir)$ следовало бы обозначить новыми буквами. Но чтобы не задействовать новые константы, обозначим их через A и B соответственно

$$\varphi = \left(A \operatorname{sh}(kz) + B \operatorname{ch}(kz) \right) \exp(st - ikx);$$

$$A, B — \text{const}; \quad (\text{B.6})$$

$$\psi = \left(a \operatorname{ch}(qz) + b \operatorname{sh}(qz) \right) \exp(st - ikx);$$

$$a, b — \text{const}. \quad (\text{B.7})$$

Список литературы

- [1] Асланов С.К. // Тез. докл. XVIII конференции стран СНГ "Дисперсные системы". Одесса, 1998. С. 16–17.
- [2] Smirnov V.K., Kibalov D.S., Krivelevich S.A. et al. // Nucl. Instrum. and Meth. in Phys. Res. 1999. Vol. B147. P. 310–315.
- [3] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 733 с.
- [4] Левич В.Г. Физико-химическая гидродинамика. М.: Физматгиз, 1959. 699 с.
- [5] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория упругости. М.: Наука, 1987. 248 с.
- [6] Григорьев А.И., Ширяева С.О., Корамыслов В.А., Белоножко Д.Ф. // ЖТФ. 1997. Т. 67. Вып. 8. С. 27–33.

- [7] Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И., Муничев М.И. // ПЖТФ. 1997. Т. 23. Вып. 19. С. 66–70.
- [8] Ширяева С.О., Григорьев О.А. // ПЖТФ. 1999. Т. 25. Вып. 2. С. 1–4.
- [9] Григорьев А.И., Григорьев О.А., Ширяева С.О. // ЖТФ. 1992. Т. 62. Вып. 9. С. 12–21.
- [10] Григорьев О.А., Ширяева С.О. // ЖТФ. 1996. Т. 66. Вып. 2. С. 23–34.
- [11] Ширяева С.О. // ПЖТФ. 1996. Т. 22. Вып. 13. С. 48–52.
- [12] Григорьев А.И., Коромыслов В.А., Ширяева С.О. // ЖТФ. 1999. Т. 69. Вып. 5. С. 7–14.