

01;03

Нелинейные эффекты в ловушечных модах колебаний стоячих волн на поверхности мелкой воды

© Д.А. Индейцев, Е.В. Осипова

Институт проблем машиноведения РАН,
199178 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: oav@phase.ipme.ru

(Поступило в Редакцию 25 января 1999 г.)

Показано, что в плоском канале безграничной протяженности, заполненном идеальной жидкостью со свободной поверхностью, наряду с бегущими могут существовать стоячие волны, локализованные в области динамического включения — массивного штампа на упругом основании. Амплитуду бегущих волн можно обратить в нуль выбором частоты колебаний штампа. Возникновение стоячих волн обусловлено наличием смешанного спектра собственных частот колебаний, т.е. дискретного спектра на оси непрерывного. Впервые исследованы нелинейные эффекты, сопровождающие процесс образования стоячих волн на мелкой воде. В частности, найдена зависимость массы штампа, необходимой для возникновения ловушечных мод, от его геометрических параметров и амплитуды колебаний. Показано, что нелинейные эффекты приводят к возникновению бегущих волн с двойной частотой в следующем порядке малости по амплитуде колебаний. Амплитуда этих бегущих волн, так же как и в нулевом приближении, может быть обращена в нуль выбором геометрии штампа.

Введение

Резонансные свойства систем, имеющих хотя бы одну границу бесконечной протяженности, вызывают в последнее время большой интерес [1–6]. Это связано как с практической значимостью данной тематики (например, резонансное поведение подвижных нагрузок, динамика которых определяется сейсмическим воздействием), так и с теоретической проблемой определения дискретных значений сингулярных операторов, имеющих смешанный спектр. Анализ резонансных свойств подобных систем проводился до настоящего времени только в линейном приближении [1,2,5,6], что, безусловно, связано со сложностью соответствующих уравнений. В частности, осталось невыясненным, влияет ли нелинейность на сам факт существования ловушечных мод колебаний и их свойства, каков характер зависимости резонансных характеристик от амплитуды колебаний, возникают ли нелинейные волны и т.д. Для того чтобы ответить на эти и другие вопросы в настоящей работе исследуются нелинейные резонансные свойства самой простой, но реальной системы со смешанным спектром, а именно плоского канала с идеальной несжимаемой жидкостью, имеющего в качестве включения на дне подвижный массивный штамп. Нелинейность порождается свободной поверхностью жидкости.

Гравитационные волны на мелкой воде в плоском канале с включением

Пусть штамп массы M и шириной $2a$ совершает малые вертикальные колебания с частотой ω_a , находясь в безотрывном контакте с несжимаемой потенциальной жидкостью, заполняющей плоский канал безграничной длины и

глубины H (штамп соединен с неподвижным основанием идеальной пружиной с жесткостью κ) (рис. 1). Тогда координата верхнего края штампа равна

$$\xi = \xi_0 \sin \omega_a t = \varepsilon H \sin \omega_a t, \quad (1)$$

где $t \geq 0$ — время; ε — малый параметр, равный отношению амплитуды колебаний штампа ξ_0 и глубины канала H .

Штамп возбуждает в жидкости колебательное движение, которое характеризуется потенциалом поля скоростей φ . Зависимость φ от пространственных координат x и y и времени t определяется уравнением [7]

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0. \quad (2)$$

Граничным условием на нижней границе является условие равенства скоростей жидкости и штампа на

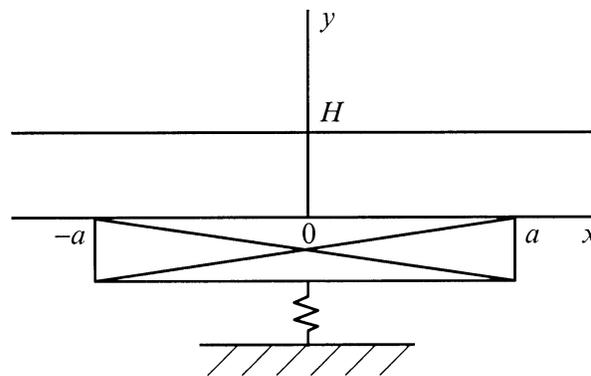


Рис. 1. Схема штампа шириной $2a$, совершающего малые вертикальные колебания на дне заполненного жидкостью бесконечного канала глубины H .

границе раздела штамп–жидкость

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|_{y=0} = \varepsilon H \omega_a \cos \omega_a t \theta \left(\frac{x}{a} \right), \quad (3)$$

$$\theta(x) \equiv \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases} \quad (4)$$

Строго говоря, условие (3) должно ставиться на границе $y = \xi$, а не на $y = 0$. Однако в силу линейности этого условия и малости ε данное различие с физической точки зрения несущественно. На свободной поверхности жидкости, т.е. при $y = h(x, t) + H$, где h — высота гравитационной волны в точке x в момент времени t , соответствующее граничное условие в пренебрежении капиллярными эффектами имеет вид [7]

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + gh = 0, \quad (5)$$

где g — ускорение свободного падения.

Сама величина h подчиняется уравнению [7]

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_{y=h+H} \frac{\partial h}{\partial x} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_{y=h+H}, \quad (6)$$

$$h(x, 0) = 0. \quad (7)$$

Кроме того, координата верхнего края штампа ξ должна удовлетворять уравнению колебаний штампа [5]

$$M \frac{d^2 \xi}{dt^2} = -\kappa \xi + M_0 g \frac{\xi}{H} - \rho \int_{-a}^a \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_{y=0} dx, \quad (8)$$

где $M_0 = 2\rho a H$ — масса жидкости над покоящимся штампом, ρ — плотность жидкости; здесь уже учтено, что сила $M_0 g$ уравновешена внешней силой, действующей на штамп, которая обеспечивает выполнение условия $\xi = 0$ в условиях равновесия [5].

Рассмотрим вначале замкнутую систему уравнений (2), (3), (5), (6), которая описывает распространение нелинейных гравитационных волн по поверхности канала (при заданном движении штампа). Введем новые безразмерные переменные

$$z = \frac{x}{a}, \quad \eta = \frac{y}{H}, \quad \tau = \frac{\sqrt{gH}}{a} t, \quad (9)$$

$$\psi = \frac{\varphi}{\varepsilon a \sqrt{gH}}, \quad u = \frac{h}{\varepsilon H}$$

и безразмерные параметры

$$\omega = \frac{\omega_a a}{\sqrt{gH}}, \quad \delta = \frac{H^2}{a^2}. \quad (10)$$

Тогда, (2), (3), (5), (6) примут вид

$$\psi_{\eta\eta} + \delta \psi_{zz} = 0,$$

$$\psi_{\eta}|_{\eta=0} = \delta \omega \cos \omega \tau \theta(z),$$

$$\left. \begin{aligned} \psi_{\tau} + \frac{\varepsilon}{2} \left(\psi_z^2 + \frac{1}{\delta} \psi_{\eta}^2 \right) + u = 0 \\ u_{\tau} - (1/\delta) \psi_{\eta} + \varepsilon \psi_z u_z = 0 \end{aligned} \right\} \text{ на } \eta = 1 + \varepsilon u. \quad (11)$$

Нас интересует поведение гравитационных волн лишь в простейшем случае мелкой воды, когда дисперсионные эффекты малы, т.е. при $\delta \rightarrow 0$. В действительности мелкой водой принято называть ситуацию, когда глубина мала по сравнению с характерной длиной волнового решения. Как будет показано ниже, эта характерная длина в данной задаче порядка a , поэтому при $\delta \ll 1$ будет использоваться термин мелкая вода. Следуя общей теории [7–9], представим функцию ψ в виде степенного ряда по η

$$\psi(z, \eta, \tau) = \psi_0(z, \tau) + \psi_1(z, \tau)\eta + \frac{1}{2} \psi_2(z, \tau)\eta^2 + \dots \quad (12)$$

Подставив (12) в первые два уравнения системы (11), нетрудно выразить ψ_i ($i = 1, 2, 3, \dots$) через ψ_0 . В результате получим

$$\psi(z, \eta, \tau) = \psi_0(z, \tau) + \delta \omega \cos \omega \tau \theta(z) \eta - \frac{\delta}{2} \psi_{0zz} \eta^2 + O(\delta^2). \quad (13)$$

Этот ряд, очевидно, сходится, так как $\eta \sim 1$, $\delta \ll 1$, а каждое следующее слагаемое содержит более высокую степень δ [9]. Подстановка (13) в последние два уравнения системы (11) дает уравнение на высоту волны u и скорость вертикального движения жидкости в ней $v \equiv \psi_{0z}$

$$u_{\tau} - \omega \cos \omega \tau \theta(z) + v_z(1 + \varepsilon u) - (\delta/6)v_{zzz} + \varepsilon v u_z = 0,$$

$$v_{\tau} + u_z - (1/2)\delta v_{zzz} + \varepsilon v v_z = 0. \quad (14)$$

В (14) оставлены лишь слагаемые, линейные по ε и δ , более высокими степенями ε и δ пренебрегается. Отсюда после преобразований получим

$$u_{zz} - u_{\tau\tau} - \omega^2 \sin \omega \tau \theta(z) - \frac{\varepsilon}{2}(v^2)_{zz} - \varepsilon(uv)_{z\tau} - \frac{\delta}{3}v_{zzz\tau} = 0,$$

$$v_{\tau} + u_z + \varepsilon v v_z - \frac{\delta}{2}v_{zzz} = 0. \quad (15)$$

Следуя общей теории возмущений, будем искать решение системы (15) в виде рядов по ε [10]

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots, \quad (16)$$

$$v = v_0 + \varepsilon v_1 + \varepsilon^2 v_2 + \dots, \quad (17)$$

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon^2 \omega_2 + \dots \quad (18)$$

Перенормировка частоты (18) необходима для того, чтобы уничтожить вековые слагаемые в (16) и (17) (в первом порядке по ε их нет). Наша задача заключается в том, чтобы решить систему (15) в первом порядке

по ε (учитывать более высокие порядки по ε нет смысла, поскольку сама система (15) учитывает нелинейные эффекты только в первом порядке по ε). С этой целью подставим (16)–(18) в (15) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε

$$u_{0zz} - u_{0\tau\tau} - \omega_0^2 \sin \omega_0 \tau \theta(z) - (\delta/3)v_{0zz\tau} = 0,$$

$$v_{0\tau} + u_{0z} - (\delta/2)v_{0zzz} = 0, \quad (19)$$

$$u_{1zz} - u_{1\tau\tau} + (1/2)(v_0^2)_{zz} - (u_0 v_0)_{z\tau} - (\delta/3)v_{1zz\tau} = 0,$$

$$v_{1\tau} + u_{1z} + v_0 v_{0z} - (\delta/2)v_{1zzz} = 0, \quad (20)$$

$$u_{2zz} - u_{2\tau\tau} - 2\omega_0 \omega_2 \sin \omega_0 \tau \theta(z) - \omega_0^2 \cos \omega_2 \tau \theta(z) + (v_0 v_1)_{zz} - (u_0 v_1 + u_1 v_0)_{zz} - (\delta/3)v_{2zz\tau} = 0,$$

$$v_{2\tau} + u_{2z} + (v_0 v_1)_z - (\delta/2)v_{2zzz} - \delta \omega_2^2 \cos \omega_2 \tau \theta = 0. \quad (21)$$

Для выявления физического смысла ловушечных мод колебаний и определения их основных свойств рассмотрим линейное приближение (19) в пределе мелкой воды $\delta \rightarrow 0$. Система (19) расщепляется на два независимых уравнения, причем уравнение на амплитуду гравитационной волны $f \equiv u_0$ имеет вид

$$f_{zz} - f_{\tau\tau} - \omega_0^2 \sin \omega_0 \tau \theta(z) = 0. \quad (22)$$

Начальные условия к нему легко находятся из (3) и (7)

$$f(z, 0) = 0; \quad f_\tau(z, 0) = \omega_0 \theta(z). \quad (23)$$

Решение уравнения (22) с условиями (23) имеет вид

$$u(z, \tau) = \theta(z) \sin \omega_0 \tau + \frac{1}{2} \text{sign}(z-1) \sin [\omega_0(\tau - |z-1|)] \Phi(\tau - |z-1|) - \frac{1}{2} \text{sign}(z+1) \sin [\omega_0(\tau - |z+1|)] \Phi(\tau - |z+1|), \quad (24)$$

где Φ — функция Хевисайда.

Данная формула описывает образование и распространение линейных гравитационных волн по мелкой воде под действием колеблющегося штампа. Из нее становится ясным физический смысл ловушечных мод колебаний. Действительно, формулу (24) можно переписать в следующем виде: над штампом

$$f = \begin{cases} \sin \omega_0 \tau, & \tau \leq 1 - |z|, \\ \sin \omega_0 \tau - \frac{1}{2} \sin \omega_0(|z| + \tau - 1), & 1 - |z| < \tau \leq |z| + 1, \\ (1 - \cos \omega_0 \cos \omega_0 z) \sin \omega_0 \tau + \sin \omega_0 \cos \omega_0 z \cos \omega_0 \tau, & \tau > |z| + 1, \end{cases} \quad (25)$$

вне штампа

$$f = \begin{cases} 0, & \tau \leq |z| - 1, \\ \frac{1}{2} \sin \omega_0(\tau - (|z| - 1)), & |z| - 1 < \tau \leq |z| + 1, \\ \sin \omega_0 \cos \omega_0(|z| - \tau), & \tau > |z| + 1. \end{cases} \quad (26)$$

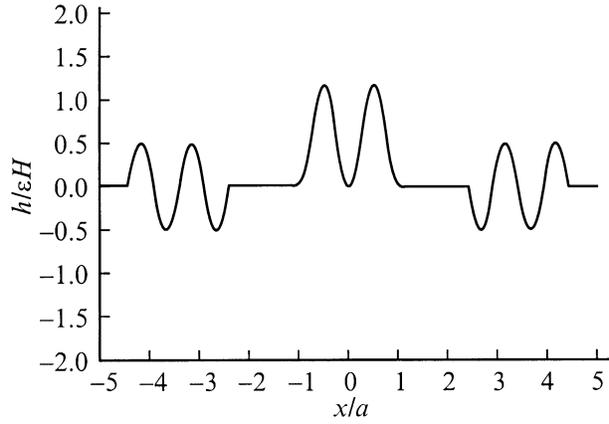


Рис. 2. Волны, возбужденные штампом, колеблющимся с частотой ловушечной моды с номером $k = 2$ в момент времени $\tau = 3.4$.

Отсюда следует, что колеблющийся штамп порождает три типа гравитационных волн: стоячие волны над штампом, две волны, распространяющиеся в разные стороны и локализованные в области $\tau - 1 \leq |z| \leq \tau + 1$, и бегущие волны с амплитудой $\sin \omega_0$. Все они являются результатом интерференции волн в заданной точке, которые пришли в данный момент времени из каждой точки поверхности колеблющегося штампа. Поскольку бегущие волны непрерывно отводят энергию колеблющегося штампа на бесконечность, то для поддержания постоянной амплитуды колебаний ему нужно постоянно подводить энергию, пропорциональную $\sin \omega_0$. Поэтому уравнение (8) может иметь решение типа $\sin \omega t$ только при выполнении условия $\sin \omega_0 = 0$ или $\omega_0 = \omega_k$, где

$$\omega_k = k\pi \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (27)$$

(данный результат является следствием смешанного спектра данной задачи, т.е. дискретного спектра на оси непрерывного [5]). В этом случае при $\tau > 2$ $f(z, \tau) = f_k(z, \tau)$, где

$$f_k(z, \tau) = (1 + (-1)^{k-1} \cos k\pi z) \sin k\pi \tau \theta(z) + \frac{(-1)^{k-1}}{2} \sin [k\pi(|z| - \tau)] \theta(|z| - \tau) \quad (28)$$

— амплитуда линейной гравитационной волны, соответствующей ловушечной моде с номером k ; волна с номером $k = 2$ при $\tau = 3.4$ представлена на рис. 2.

Нелинейные эффекты

Перейдем теперь к исследованию влияния нелинейных эффектов на частоты ловушечных мод и соответствующие им гравитационные волны. Если в исходной системе уравнений (15) сразу же положить $\delta = 0$ и начать строить теорию возмущений по ε , то вековые слагаемые типа $\varepsilon \tau \sin \omega_0 \tau$ появляются уже в первом порядке по ε .

Причем устранить их не удастся не только перенормировкой частоты, но и методом многих нелинейных масштабов [10]. Причиной этого является отсутствие дисперсии, которая в данном случае служит противовесом нелинейности. Решая последовательно системы уравнений (19)–(21), нетрудно видеть, что вековые слагаемые указанного типа вообще исчезают, а образуются новые слагаемые типа $\varepsilon^2 \tau \sin \omega_0 \tau$ во втором порядке по ε . Действительно, решение системы (19) содержит стоячие и бегущие волны, причем амплитуда последних равна $\sin(\omega_0/\sqrt{1-\delta\omega_0^2/3})$. Выбрав частоту колебаний штампа в виде

$$\omega_0 = \omega_k \equiv \frac{k\pi}{\sqrt{1 + \frac{\delta}{3}(k\pi)^2}}, \quad (29)$$

можно устранить бегущие волны и оставить только стоячие волны, которые в пределе мелкой воды описываются выражением

$$u_0 \sim [1 + (-1)^{k-1} \cos k\pi x] \theta(x) \sin \omega_k t. \quad (30)$$

Решение системы уравнений (20) также содержит и стоячие волны (конкретный вид которых несуществен), и бегущие волны с двойной частотой

$$u_1 \sim \frac{3}{8} \frac{\sin(\delta(k\pi)^3)}{\delta(k\pi)^2} \sin[2k\pi(|x| - t)]. \quad (31)$$

Выбрав H или a таким образом, чтобы

$$\delta = \frac{H^2}{a^2} = \frac{m}{k^3 \pi^2}, \quad (32)$$

где m — целое положительное число, амплитуда этих бегущих волн также обратится в нуль.

Решение системы уравнений (21) содержит помимо бегущих волн стоячую волну с растущей амплитудой, т.е. вековое слагаемое

$$u_2 \sim \left(\frac{9}{8\delta} - 2\omega_0 \omega_2 \right) t \cos \omega_0 t X(x) \theta(x). \quad (33)$$

Здесь $X(x)$ — профиль стоячей волны, который в данном случае несуществен. Данная неравномерная пригодность разложения (16) легко устраняется перенормировкой частоты (18) [10]. Выбрав

$$\omega_2 = \frac{9}{16\omega_0 \delta}, \quad (34)$$

можно добиться равномерности в первом приближении. Приведем окончательное выражение для частот ловушечных мод колебаний и соответствующей им высоты гравитационных волн в размерном виде (в первом приближении по ε и в пределе мелкой воды)

$$\omega_k = k\pi \frac{\sqrt{gH}}{a} \frac{1 + \left(\frac{3\xi_0 a}{4k\pi H^2} \right)^2}{\sqrt{1 + \frac{1}{3} \left(\frac{k\pi H}{a} \right)^2}}, \quad (35)$$

$$\begin{aligned} h(x, t) = & \xi_0 \left[1 + (-1)^{k-1} \cos \frac{k\pi x}{a} \right] \theta \left(\frac{x}{a} \right) \sin \omega_k t \\ & + \frac{(-1)^{k-1}}{2} \xi_0 \sin \left(k\pi \frac{|x|}{a} - \omega_k t \right) \theta \left(\frac{|x|}{a} - \frac{\omega_k t}{k\pi} \right) \\ & + \frac{3\xi_0^2 a^2}{8(k\pi)^2 H^3} \sin \left(\frac{H^2}{a^2} (k\pi)^3 \right) \sin \left[2 \left(k\pi \frac{|x|}{a} - \omega_k t \right) \right] \\ & \times \left[\theta \left(\frac{|x|}{a} \right) - 1 \right], \quad t > \frac{2a}{\sqrt{gH}}. \end{aligned} \quad (36)$$

Стоячие волны амплитуды ε над штампом здесь для простоты опущены. Найдем теперь массу M , которой должен обладать штамп, чтобы совершить гармонические колебания с ловушечной частотой ω_k . Из (36) следует, что при выполнении условия (32), т.е. при отсутствии бегущих волн

$$M_0 g \frac{\xi}{H} - \rho \int_{-a}^a \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_{y=0} dx = 0 \quad (37)$$

при любых амплитудах волн ξ_0 , поэтому из (8) вытекает

$$M \frac{d^2 \xi}{dt^2} = -\varkappa \xi. \quad (38)$$

Следовательно, при отсутствии бегущих волн масса штампа должна удовлетворять соотношению $M = M_k$, где

$$M_k = \frac{a}{(k\pi)^2} \frac{\varkappa}{gH} \left[1 + \left(\frac{3\xi_0 a}{4k\pi H^2} \right)^2 \right]^{-2}. \quad (39)$$

При этом должны выполняться условия малости нелинейных и дисперсионных эффектов

$$\frac{\xi_0}{H} \ll 1, \quad \left(\frac{3\xi_0 a}{4k\pi H^2} \right)^2 \ll 1, \quad \left(\frac{H}{a} \right)^2 \ll 1. \quad (40)$$

В частности, при $H = 1$ м, $a = 10$ м, $\varkappa = 10^5$ Н/м, $\xi_0 = 10^{-1}$ м имеем при $k = 2$ $M_2 = 2.5 \cdot 10^3$ кг, $\omega_2 = 2$ с $^{-1}$. Если условие (32) не выполняется, то для поддержания амплитуды колебаний постоянной необходимо прикладывать к штампу силу порядка $Mg\xi_0/H$, так как бегущие волны будут уносить энергию колебаний штампа.

Таким образом, динамическое включение конечных размеров приводит к появлению ловушечных мод колебаний, характерной особенностью которых является взаимное уничтожение (вдали от включения) волн, бегущих от каждой точки поверхности динамического включения. Нелинейные эффекты приводят к тому, что и частота колебаний, и масса штампа начинают зависеть от амплитуды колебаний (форма колебаний от амплитуды не зависит). В первом порядке по ε и δ гравитационные волны описываются системой (15). Однако если интересоваться лишь нулевым приближением, т.е. если оставить лишь те слагаемые, линейные по ε или δ , которые

являются источником неравномерности, то система (15) резко упростится и сведется к уравнению

$$u_{zz} - u_{\tau\tau} - \omega^2 \sin \omega\tau \theta(z) + \frac{3}{2}\varepsilon(u^2)_{zz} + \frac{\delta}{3}u_{zz\tau\tau} = 0, \quad (41)$$

что соответствует приближению Буссинеска [7,9]. Поэтому уравнение (41) с начальным условием (23) является максимально упрощенным уравнением, описывающим ловушечные моды колебаний в нелинейном случае. Значения параметров этих колебаний даются формулами (35), (36), (39).

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 99-01-00693).

Список литературы

- [1] *Бабешко В.А., Ворович И.И., Образцов И.Ф.* // Изв. АН СССР. Сер. ММТ. 1990. № 3. С. 74.
- [2] *Evans D.V., Linton C.M., Ursell F.* // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1993. Vol. 46. P. 253.
- [3] *McIver P., McIver M.* // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1997. Vol. 50. P. 165.
- [4] *Kuznetsov N., McIver P.* // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1997. Vol. 50. p. 565.
- [5] *Индейцев Д.А., Осипова Е.В.* // ЖТФ. 1996. Т. 66. Вып. 8. С. 124.
- [6] *Indejtchev D., Abramjan A., Andreev V.* // J. Ac. Soc. Amer. 1994. Vol. 95. P. 3007.
- [7] *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
- [8] *Сретенский.* Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. 817 с.
- [9] *Debnath L.* Nonlinear Water Waves. London: Acad. Press, 1994.
- [10] *Найфэ А.* Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 455 с.