

01;02

Геометрические резонансы формы в многоцентровых системах с симметрией икосаэдра. Управляемая молекулярная ловушка для электронов

© Ю.Ф. Мигаль, В.С. Ковалева

Донской государственной технической университет,
344010 Ростов-на-Дону, Россия
E-mail: root@sintez.rnd.su

(Поступило в Редакцию 3 июня 1999 г.)

Условия существования специфических резонансов формы, которые возникают только в узких интервалах энергии и разрушаются при усилении внутриатомных потенциалов, исследованы в случае систем с наивысшей точечной симметрией. Проведены расчеты для модельной системы из точечных рассеивателей, расположенных в вершинах и центре икосаэдра. Время жизни геометрического резонанса в этой системе чрезвычайно чувствительно к изменениям структуры системы и может достигать значения 10^{-10} с, что на шесть порядков превышает период вращения электронов в атомах. Обсуждается возможность создания молекулярной ловушки для упруго рассеиваемых электронов, захватываемых в резонансное состояние. Временем задержки электрона в такой ловушке можно управлять с помощью внешних статических полей.

Введение

Одним из наиболее интересных явлений в упругом электрон-молекулярном рассеянии являются ярко выраженные максимумы в сечении рассеяния, обусловленные захватом налетающих электронов в одноэлектронные квазистационарные состояния — резонансы формы (см., например, [1]). Недавно был обнаружен новый тип резонансов формы [2], обладающий рядом специфических особенностей. Эти резонансы существуют в узких интервалах энергии, определяемых геометрическими размерами многоатомной системы. В отличие от обычных (гибридизационных; см. ниже) резонансов, которые при усилении потенциала плавно переходят в дискретный спектр, геометрические резонансы при этих условиях разрушаются. Эти резонансы встречаются только в высокосимметричных системах. В частности, в [2] были исследованы резонансы в системе из восьми точечных рассеивателей, расположенных в вершинах куба. Чем выше симметрия системы, тем ярче выражены резонансы. В связи с недавними открытиями новых типов высокосимметричных соединений (в частности, соединений углерода с симметрией икосаэдра) представляет интерес исследовать особенности поведения геометрических резонансов в системах с симметрией икосаэдра. Можно ожидать, что время жизни резонансных состояний в таких объектах окажется рекордным.

Поскольку геометрические резонансы существуют в высокосимметричных системах и только в узких интервалах энергии, то даже малые изменения структуры систем могут приводить к разрушению резонансов. Этот факт наводит на мысль о возможности отыскания таких систем, в которых условия существования резонансов могли бы создаваться или разрушаться внешними воздействиями. Известно, что даже самые сильные электрические и магнитные статические поля, создаваемые в совре-

менных лабораторных установках, значительно слабее внутренних полей в атомах, поэтому внешние статические поля не могут существенно влиять на состояния электронов в атомных системах. Сверхчувствительность же геометрических резонансов к изменениям структуры является тем обстоятельством, которое можно было бы попытаться использовать в нанотехнологии для управления некоторыми процессами в атомных системах с помощью внешних полей.

Ниже предпринята попытка сконструировать модельную многоцентровую систему с максимально большим временем жизни резонансных состояний. Кроме того, в работе обсуждается возможность создания молекулярной ловушки для упруго рассеиваемых электронов, в которой время задержки электронов можно было бы контролировать с помощью внешних полей. Предварительно рассмотрены некоторые общие вопросы, относящиеся к геометрическим резонансам формы и важные для дальнейшего исследования.

Условия существования геометрических резонансов

В [3] было показано, что фактором, способствующим появлению коллективных резонансов формы в многоцентровых системах, является деструктивная интерференция волн от отдельных центров системы. В результате вокруг системы возникает обширная область, в которой общая волновая функция электрона подавлена. Наличие этой области можно имитировать барьером, окружающим систему, который в случае высокосимметричных малых систем является центробежным барьером.

Чтобы количественно описать этот эффект, рассмотрим решение уравнения Шредингера для многоцентровой системы, на каждом центре которой помещен

источник волн (представление многих источников [4])

$$\Psi_{\lambda}^{+}(k, \mathbf{r}) = \sum_{jL} B_{\lambda L}^{(j)+}(k) h_l^{+}(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|) Y_L(\widehat{\mathbf{r} - \mathbf{r}_j}), \quad (1)$$

где $k = \sqrt{E}$; $L = (l, m)$ — комбинированное квантовое число; \mathbf{r}_j — радиус-векторы центров; h_l^{+} — сферические функции Ханкеля; Y_L — сферические гармоники; комплексные коэффициенты $B_{\lambda L}^{(j)+}$ определяют амплитудные и фазовые характеристики источников; индекс λ нумерует ортонормированные решения, преобразующиеся по неприводимым представлениям группы точечной симметрии системы.

Следует отметить, что выражение (1) справедливо не для всех точек пространства, а только для области вне системы, где, кроме того, потенциал, описывающий взаимодействие налетающего электрона с системой, предполагается равным нулю. Последнее допущение слабо сказывается на описании квазилокализованных состояний, поскольку плотность этих состояний, как правило, велика внутри системы и быстро убывает при удалении от системы. Подчеркнем также, что выражение (1) не является волновой функцией электрона, так как оно содержит сингулярности в месте расположения источников. Обычную волновую функцию можно получить из (1), отбрасывая мнимую часть этого выражения, содержащую все сингулярности.

Разложим выражение (1) в ряд по сферическим гармоникам относительно центра точечной симметрии системы:

$$\Psi_{\lambda}^{+}(k, \mathbf{r}) = \sum_L D_{\lambda L}^{+}(k) h_l^{+}(kr) Y_L(\Omega). \quad (2)$$

Важно, что при малых значениях k , когда длина волны гораздо больше линейных размеров системы, в (2) можно ограничиться слагаемым с минимальным для данного неприводимого представления значением l , равным l_{\min} . При этом описание рассеяния становится возможным на языке, используемом в случае сферически симметричных объектов. В частности, в этом случае можно использовать понятие центробежного барьера. В системе, окруженной барьером с l_{\min} , при достаточной глубине потенциала внутри барьера возможно образование стоячих волн с $E > 0$, которые фактически и являются резонансными состояниями. Это утверждение одинаково справедливо как для сферически симметричных объектов, так и для многоцентровых систем.

Однако рассеяние на многоцентровых системах имеет и ряд особенностей. Одна из них состоит в том, что в некотором интервале энергий ΔE первый коэффициент $D_{\lambda L}^{+}(k)$ с $l = l_{\min}$ из (2) может оказаться равным или близким нулю. Тогда доминирующим в (2) будет слагаемое со следующим значением $l = l_1$, минимальным среди оставшихся. Это приведет к тому, что в интервале ΔE система будет окружена центробежным барьером с $l_1 > l_{\min}$, более высоким, чем барьер с l_{\min} . Если потенциал системы таков, что в системе имеется резонанс с $E_{\text{res}} \in \Delta E$, то время жизни этого резонанса определяется проницаемостью барьера с l_1 [3]. Допустим

теперь, что потенциал можно усиливать и таким способом уменьшать энергию E_{res} . При достаточном усилении потенциала значение E_{res} выходит из интервала ΔE и доминирующим в разложении (2) становится слагаемое с l_{\min} . В таком состоянии система окружена менее высоким барьером с l_{\min} , что приводит к уменьшению времени жизни резонанса. Если $l_{\min} = 0$, то барьера не будет вовсе и в этом случае резонанс при усилении потенциала полностью разрушается. Резонансы с таким поведением, нетипичным для сферически симметричных объектов, и названы в [2] геометрическими (смысл этого названия будет пояснен ниже).

Простейшей иллюстрацией геометрических резонансов является резонанс в системе из восьми одинаковых точечных рассеивателей (ТР), расположенных в вершинах куба (группа симметрии O_h). Известно, что изолированный ТР однозначно характеризуется энергетическим параметром α [5]. При $\alpha > 0$ ТР имеет одиночное связанное s -состояние с энергией $-\alpha^2/2$. ТР может испускать только s -волны. Поэтому выражение (1) для системы из ТР содержит только слагаемые с $l = 0$. В случае решения a_{1g} -симметрии, которое только и будет рассматриваться ниже и в котором все источники испускают волны с одинаковой амплитудой и фазой, выражение (1) можно представить в форме

$$\Psi^{+} = b \exp(i\eta) \sum_j h_0^{+}(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|). \quad (3)$$

Одноцентровая запись этого выражения имеет вид

$$\Psi^{+} = b \exp(i\eta) \left\{ j_0(kR) h_0^{+}(kr) + j_4(kR) h_4^{+}(kr) Y_{4m}(\Omega) C + \dots \right\}, \quad r > R. \quad (4)$$

Здесь R — радиус сферы, на которой расположены ТР; j_l — сферические функции Бесселя. При $k \approx \pi/R$ $j_0(kR) \approx 0$ и первый член в (4) мал. Главным в этом случае становится член с $l = 4$. Система в таком состоянии окружена центробежным барьером, высота которого $V_{\max} = l(l+1)/R^2 = 20/R^2$. При значениях α порядка единицы в системе возможен резонанс с энергией, приблизительно равной $(\pi/R)^2$, которая значительно ниже, чем V_{\max} . Этот резонанс является типичным геометрическим резонансом, который может существовать только в энергетическом интервале, содержащем точку $(\pi/R)^2$. Резонанс быстро разрушается, когда α увеличивается и E_{res} выходит из этого интервала. Приведенный пример показывает, что энергия резонанса определяется геометрическим фактором R , по этой причине резонанс был назван геометрическим.

Для существования подобного резонанса важно, что вторым слагаемым в (4) является слагаемое с довольно большим значением l ($l = 4$). Благодаря этому энергия резонанса существенно ниже вершины барьера, что обеспечивает длительную задержку электрона в системе. В случае систем с низкой симметрией второму слагаемому в решении Ψ^{+} , преобразующемуся по тождественному неприводимому представлению, соответствует малое

значение l , равное 1 или 2, и энергия $(\pi/R)^2$ оказываются выше, чем вершина центробежного барьера с этим значением l . Геометрические резонансы в такой системе не возникают.

В наглядной форме зависимость геометрического резонанса от потенциала описывается траекторией полюса S -матрицы, соответствующего этому резонансу, в комплексной плоскости E или k . Хорошо известно (см., например, [6]), что вещественная координата полюса S -матрицы в четвертом квадранте плоскости E равна энергии резонанса E_{res} , а мнимая координата равна полуширине Γ соответствующего максимума в сечении упругого рассеяния. Для геометрического резонанса характерно приближение полюса к вещественной оси по мере усиления потенциала, а затем удаление от этой оси (в следующем пункте будет приведена траектория полюса S -матрицы для системы из восьми ТР). Типичным же поведением полюса, соответствующего гибридационному резонансу, является его монотонное приближение к вещественной оси. При малых k величина Γ для гибридационных резонансов пропорциональна величине $(\text{Re}k)^{2l+1}$ с $l = l_{\text{min}}$. В случае же геометрических резонансов подобное соотношение со значением l , характеризующим резонанс, можно использовать только в малом интервале энергий ΔE для оценки величины Γ .

Важно подчеркнуть, что геометрические резонансы не относятся к явлениям, присущим только моделям из ТР. Они встречаются также и в реальных многоатомных системах. В частности, резонансы этого типа исследовались в [7] в случае соединений LiBiS_2 и NaBiS_2 .

В заключение этого раздела коротко упомянем другие особенности геометрических резонансов. По сравнению с гибридационными геометрические резонансы характеризуются большими значениями энергии и квантового числа l . В отличие от гибридационных резонансов, которые в случае малых систем могут быть предсказаны схемой МО ЛКАО с минимальным базисом, геометрические резонансы этой схемой не предсказываются. Отсюда, в частности, следует, что если в малой системе каждый из центров имеет собственное локализованное или квазилокализованное состояние и общее число этих состояний равно N , то в объединенной системе имеется N локализованных и квазилокализованных состояний, исключая геометрические резонансы (при подсчете состояний следует исключить состояния, локализованные или квазилокализованные вне системы). Таким образом, геометрические резонансы представляют собой явление, возникающее только в объединенных высокосимметричных системах, и их наличие означает, что объединенный потенциал даже малой системы в некотором отношении является более сильным, чем сумма потенциалов изолированных центров, поскольку объединенный потенциал может удерживать большее количество физически выделенных состояний.

Геометрические резонансы в системе из ТР с икосаэдрической симметрией

Рассмотрим теперь систему из ТР с наиболее высокой точечной симметрией — икосаэдрической. В случае представления a_{lg} группы икосаэдра Y_h последовательность значений числа l в одноцентровом разложении (2) такова: 0, 6, 8, Следовательно, в многоцентровой системе с этой симметрией может существовать ярко выраженный геометрический резонанс с $l = 6$.

Будем исследовать систему из двенадцати одинаковых ТР, расположенных в вершинах икосаэдра. Кроме того, поместим в центре еще один ТР (рис. 1), чтобы расширить возможности по управлению рассеивающими свойствами системы. Пусть параметр центрального ТР равен α_0 , а параметр периферийных ТР — α_1 . Будем рассчитывать полюса S -матрицы системы, соответствующие a_{lg} -решению. Для этого воспользуемся общим уравнением для полюсов S -матрицы в muffin-tin (МТ)-приближении, полученным в [4],

$$\det \left\| [1 + i \text{ctg} \delta_l^{(j)}] \delta_{jj'} \delta_{LL'} + \sum_{L''} H_{LL'L''}^{j,j'} h_{l''}^+(k|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_{j'}|) \right\| = 0, \quad (5)$$

где $\delta_l^{(j)}$ — сдвиг фазы на j -й атомной сфере (комплексный для комплексных k); $H_{LL'L''}^{j,j'} = 4\pi i^{l-l'-l''} \times Y_{L''}(\widehat{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_{j'}|}) \int Y_L Y_{L'} Y_{L''} d\Omega$ — вещественные структурные константы, не зависящие от k .

В случае точечных рассеивателей в суммах нужно оставить только слагаемые с $l = 0$ и $l' = 0$. При этом все ненулевые структурные константы равны единице. Величины $\text{ctg} \delta_l^{(j)}$ для ТР заменяются на $-\alpha_j/k$ ($j = 0, 1$).

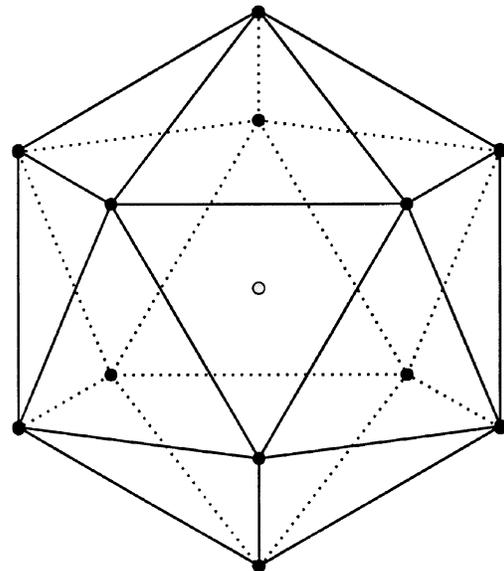


Рис. 1. Система из точечных рассеивателей, расположенных в вершинах и центре икосаэдра.

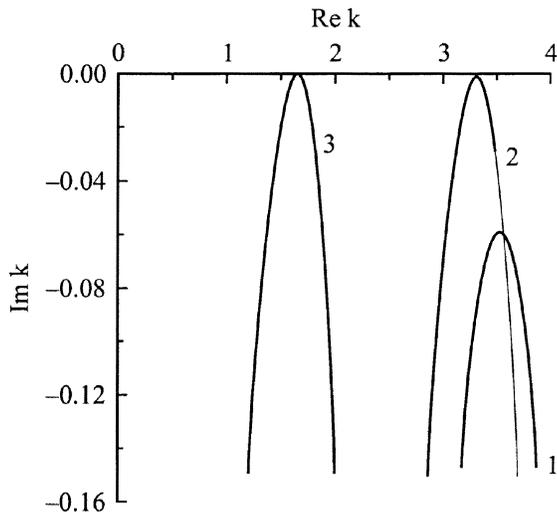


Рис. 2. Траектории полюсов S -матрицы, соответствующие геометрическим резонансам в системах точечных рассеивателей. 1 — восемь ТР, расположенных в вершинах куба со стороной $d = 1$ а.у.; 2 — двенадцать ТР, расположенных в вершинах икосаэдра со стороной $d = 1$ а.у.; 3 — тринадцать ТР, расположенных в вершинах и центре икосаэдра со стороной $d = 1$ а.у. ($\alpha_0 = 0$).

В результате уравнение (5) приобретает вид

$$D_0 D_1 - 12[h_0(kr_4)]^2 = 0, \tag{6}$$

где $D_0 = (1 - i\alpha_0/k)$, $D_1 = (1 - i\alpha_1/k + 5h_0^+(kr_1) + 5h_0^+(kr_2) + h_0^+(kr_3))$, $r_1 = d$, $r_2 = 1.618033989d$, $r_3 = 1.902113033d$, $r_4 = r_3/2$ — различные расстояния между ТР в системе, d — сторона икосаэдра (в расчетах принято $d = 1$ а.у., что по порядку величины совпадает с межъядерными расстояниями в реальных многоатомных системах).

Вначале найдем полюса для системы без центрального ТР. В этом случае функция Ψ^+ имеет ту же форму (4), что и в случае системы из восьми ТР, но индекс 4 у второго слагаемого заменен на индекс 6. Уравнение (6) сводится при этом к уравнению $D_1 = 0$. Результаты расчетов приведены на рис. 2. Кривая 2 описывает поведение полюса для икосаэдрической системы при изменениях величин α_1 в широких пределах (каждая точка кривой соответствует определенному значению α_1). Эта кривая приближается к вещественной оси в узком интервале значений $Re k$. Значения параметров, соответствующие точке максимального сближения, таковы: $Re k = 3.300$, $Im k = -1.204 \cdot 10^{-3}$, $\alpha_1 = 2.597$. Из теории, изложенной в предыдущем разделе, следует, что для системы из ТР, расположенных на сфере радиуса R , энергия геометрического резонанса должна соответствовать первому корню уравнения $j_0(Re k \cdot R) = 0$, равному π . В нашем случае $R = r_4 = 0.9511$ а.у., следовательно, $Re k = 3.303$, что практически совпадает с координатой точки максимального сближения кривой 2 с вещественной осью.

Для сравнения на том же рисунке приведена траектория полюса S -матрицы для системы из восьми ТР, расположенных в вершинах куба со стороной $d = 1$ а.у. (кривая 1). В этом случае точке максимального сближения с осью соответствуют величины $Re k = 3.522$, $Im k = -0.05917$, $\alpha_1 = 1.653$. Радиус сферы при этом равен 0.8660 а.у. Из условия $Re k \cdot R = \pi$ следует, что $Re k = 3.628$, здесь также имеется определенное совпадение с координатой точки максимального сближения.

Очевидно, в случае икосаэдра траектория полюса значительно сильнее приближается к вещественной оси, чем в случае куба. По приведенным данным легко оценить время задержки резонансного состояния в системе. Эта величина равна $\tau \sim \hbar/\Gamma$, где $\Gamma = 2(Re k) \cdot (Im k)$. Оказывается, что максимальное время задержки, соответствующее геометрическому резонансу в икосаэдре, в 52 раза больше, чем в случае куба.

Теперь попытаемся еще более увеличить время задержки электрона, манипулируя потенциалом дополнительного ТР, расположенного в центре икосаэдра. Появление в системе центрального ТР приводит к появлению в уравнении (4) дополнительного слагаемого с $l = 0$. В результате энергия геометрического резонанса уже не удовлетворяет простому соотношению $j_0(Re k \cdot R) = 0$, а становится сложной функцией величин R , α_0 и α_1 .

Расчеты, проведенные с использованием уравнения (6), показывают, что при увеличении α_0 от большого отрицательного до малого положительного значения траектория полюса сдвигается справа налево, параллельно самой себе, и одновременно все больше сближается с вещественной осью. На рис. 2 показана траектория 3, соответствующая $\alpha_0 = 0$. Для точки максимального сближения с осью $Re k = 1.6517$, $Im k = -1.484 \cdot 10^{-7}$, $\alpha_1 = 3.6855$. В этом случае время задержки в 16 200 раз больше, чем для икосаэдра без центрального рассеивателя. Его абсолютное значение составляет 10^{-10} с, что представляет собой гигантское для атомных процессов время (в случае куба $\tau \sim 10^{-15}$ с, что лишь на порядок больше периода вращения валентных электронов в атоме). Таким образом, изменяя параметр центрального ТР, можно изменять энергию резонанса и существенно увеличивать время задержки электрона.

Выше речь шла о геометрических резонансах в системах точечных рассеивателей, представляющих собой простейшую модель реальных многоатомных систем. Однако рассматриваемый здесь эффект длительной задержки электрона внутри системы является в первую очередь следствием симметрии системы и результаты, полученные для модели из ТР, качественно остаются справедливыми и в случае более реалистичных моделей. (Исследования, проведенные нами для систем объемных рассеивателей в МТ-приближении, подтверждают сказанное.)

Контролируемая ловушка для электронов

Поскольку икосаэдрическая система с центральным рассеивателем обладает уникальными задерживающими свойствами, то имеет смысл рассмотреть возможности практического использования такой системы. Нам необходимо допустить, что устойчивый кластер из реальных атомов с межъядерным расстоянием порядка 1 а.е., подобный рассматриваемой системе, может быть построен. Для создания такой конструкции достаточно подобрать атомы так, чтобы энергия резонанса попала в область, где величина D_L^+ с $l = 0$ в (2) минимальна. Недавние успешные попытки конструирования различных экзотических структур позволяют надеяться, что требуемая система может быть создана. Предположим также, что температура системы достаточно мала и тепловые колебания атомов не искажают существенно структуру икосаэдра. Тогда такую систему можно было бы использовать как ловушку для свободных электронов, налетающих на систему с кинетической энергией, равной энергии геометрического резонанса в системе.

В данной работе предлагается только идея ловушки, и здесь, видимо, не стоит подробно обсуждать многочисленные детали, которые могут быть важными при конкретной реализации ловушки. Наиболее существенными из них, безусловно, являются вопросы, связанные с влиянием различных неупругих процессов на рассеяние электронов. Не исключено, что это влияние в реальных системах невозможно свести к малому эффекту, тогда подобная ловушка не может быть реализована. Кроме того, важными могут оказаться проблемы, обусловленные, например, взаимной ориентацией спинов налетающего электрона и рассеивающей системы и т.п. К сожалению, дать оценки влияния этих эффектов, не проводя соответствующих детальных исследований, выходящих за рамки данной работы, чрезвычайно трудно. Поэтому, уже допустив вначале, что можно построить устойчивый кластер нужной конфигурации, сделаем следующий шаг — допустим, что учет всех существенных факторов в реальной системе не приведет к исчезновению задерживающих свойств ловушки.

Рассмотрим теперь, как время задержки электрона в ловушке можно изменять с помощью внешних полей. Ниже исследуем два возможных эффекта: а) однородное сжатие (или расширение), при котором изменяется радиус рассеивающей системы; б) смещение центрального атома из положения равновесия, которое можно получить, используя, например, сильное электростатическое поле. Так как эффективные заряды центрального и периферийных атомов имеют разные знаки (трудно ожидать, что эти заряды равны нулю), внешнее электрическое поле должно приводить к смещению центрального атома из средней точки.

Чтобы изучить эти эффекты, рассмотрим зависимость величины Γ от изменяемых параметров нашей модельной системы из ТР, расположенных в вершинах и центре

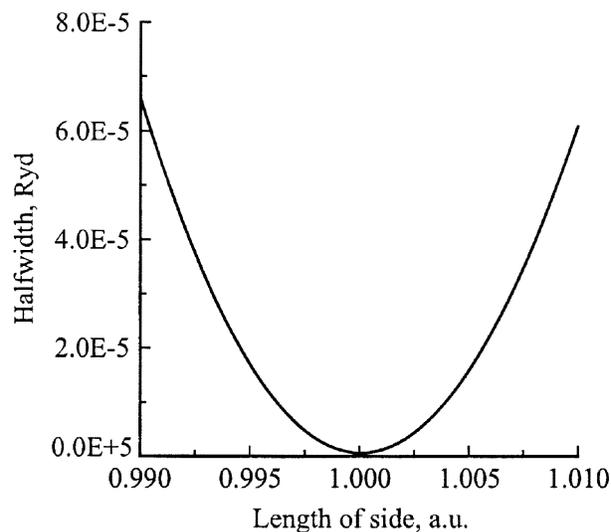


Рис. 3. Зависимость полуширины Γ резонансного максимума от длины d стороны икосаэдра для системы точечных рассеивателей с $\alpha_0 = 0$ и $\alpha_1 = 3.6855$.

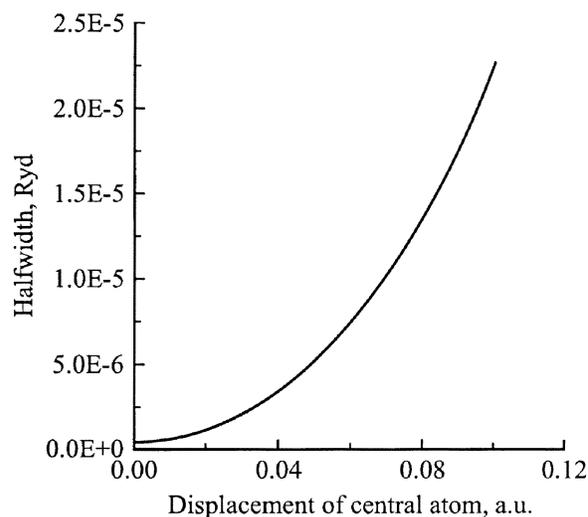


Рис. 4. Зависимость полуширины Γ резонансного максимума от смещения центрального атома из средней точки икосаэдра для системы из точечных рассеивателей с $d = 1$ а.е., $\alpha_0 = 0$ и $\alpha_1 = 3.6855$.

икосаэдра. В случае однородного сжатия рассмотрим зависимость Γ от стороны d икосаэдра. Если параметры потенциала (α_0 и α_1) остаются фиксированными, то значение Γ изменяется так, как показано на рис. 3. Здесь значения α_0 и α_1 подобраны так, чтобы величина Γ была минимальна при $d = 1$ а.е. ("недеформированное" состояние, рассмотренное в предыдущем разделе). Очевидно, чем больше деформация, тем больше значение Γ и, следовательно, меньше время задержки τ электрона в системе. Например, при увеличении значения d на 0.5% величина τ уменьшается в 32 раза.

При рассмотрении смещения центрального атома из средней точки (обозначим величину этого смещения через s) уравнение (6) становится несправедливым, поскольку двенадцать атомов, расположенных в вершинах икосаэдра, уже не эквивалентны и симметрия икосаэдра нарушается. Приходится решать более сложное уравнение (получаемое из общего уравнения (5)), степень сложности которого зависит от направления смещения. Результаты вычислений для смещения центрального атома в направлении одной из вершин икосаэдра приведены на рис. 4. Видно, что при относительно малом смещении s увеличение Γ и уменьшение τ значительны. Следует отметить, что при равных значениях двух изменяемых величин в обоих рассматриваемых эффектах (смещения s и изменения d) изменение τ несколько меньше в случае перемещения центрального атома, чем при однородном сжатии. Однако ясно, что в действительности легче сдвинуть на некоторое расстояние центральный атом, чем изменить на ту же величину сторону d .

Отметим также, что при наложении внешнего электрического поля даже в отсутствии деформации системы симметрия состояния, в котором оказывается захватываемый электрон, понижается (исключается операция инверсии), что тоже приводит к уменьшению времени задержки электрона.

Выводы

Система из рассеивателей, расположенных в центре и вершинах икосаэдра, обладает уникальными свойствами, проявляющимися при резонансном рассеянии. Теоретическое время задержки электрона в такой системе составляет 10^{-10} s даже при сравнительно большой кинетической энергии налетающего электрона (10–30 eV). Этот эффект обусловлен компактностью системы и большим значением орбитального квантового числа l , характеризующим резонансное состояние вне системы. Можно предполагать, что подобная система может быть реализована и использована в нанотехнологических проектах.

Список литературы

- [1] *Trajmar S., Register D.F., Chutjian A.* // Phys. Rep. 1983. Vol. 97. N 5. P. 219–356.
- [2] *Migal Yu.F.* // J. Phys. B. 1991. Vol. 24. N 19. P. 4181–4185.
- [3] *Migal Yu.F.* // J. Phys. B. 1992. Vol. 25. N 18. P. 3849–3858.
- [4] *Migal Yu.F.* // J. Phys. B. 1993. Vol. 26. N 17. P. 2755–2766.
- [5] *Демков Ю.Н., Островский В.Н.* Метод потенциального нулевого радиуса в атомной физике. Л.: Изд-во ЛГУ, 1975. 240 с.
- [6] *Taylor J.R.* Scattering Theory. New York: Wiley, 1972. Тейлор Дж. Теория рассеяния. М.: Мир, 1975. 565 с.
- [7] *Лаврентьев А.А., Мигаль Ю.Ф., Никифоров И.Я.* // Журн. структурной химии. 1922. Т. 33. № 2. С. 60–66.