

01;05

## Автоволновая динамика магнитного потока в неидеальных сверхпроводниках второго рода с различными типами вольт-амперных характеристик

© В.Р. Романовский

Российский научный центр "Курчатовский институт",  
123182 Москва, Россия

(Поступило в Редакцию 11 мая 1999 г. В окончательной редакции 22 февраля 2000 г.)

Проведен анализ процессов макроскопического проникновения электромагнитного поля внутрь сверхпроводящих сред с различными типами вольт-амперных характеристик, индуцированного изменяющимся внешним магнитным полем или транспортным током. Показано, что даже при наличии в сверхпроводнике конечного электрического напряжения, возникающего задолго до критического тока, магнитный поток, как и в модели критического состояния, проникает в сверхпроводник с конечной скоростью в виде характерной электромагнитной волны. На ее фронте выполняется особое условие — плавный переход напряженности электрического поля, индуцированного каким-либо внешним возмущением, к соответствующему невозмущенному значению. Записаны формулы для расчета скорости проникновения электромагнитного поля внутрь сверхпроводника. Для подтверждения сформулированных закономерностей выполненное исследование сопоставлено с соответствующими численными расчетами.

В основе изучения физических закономерностей нестационарных процессов, происходящих в неидеальных сверхпроводниках второго рода в ответ на какие-либо внешние возмущения, лежит анализ динамики магнитного потока. Если характерные размеры возмущения много больше лондоновской глубины проникновения, то для описания электродинамики сверхпроводника правомерно использование макроскопических уравнений Максвелла. При этом они должны быть дополнены соответствующими соотношениями, устанавливающими связь между характерными параметрами сверхпроводника. Одно из основных связующих уравнений — вольт-амперная характеристика (ВАХ) сверхпроводника.

Несмотря на ее важность, в настоящее время отсутствует общая микроскопическая теория, объясняющая во всем интервале изменения напряженности электрического поля экспериментально наблюдаемые ВАХ неидеальных сверхпроводников второго рода. Поэтому для их описания широко используются феноменологические модели. Они в усредненной форме отражают наблюдаемые в эксперименте закономерности возникновения электрического напряжения внутри сверхпроводника, обусловленные особенностями движения его вихревой структуры, неоднородностью критических свойств и т. п. Отметим наиболее характерные из них.

Как известно [1], неидеальный сверхпроводник второго рода переходит в резистивное состояние, когда плотность протекающего по нему тока превышает некоторое пороговое значение. Физически это соответствует состояниям, когда сила Лоренца превышает силу пиннинга. При этом на ВАХ появляется нелинейная область — крип потока, в которой вихревая решетка постепенно приходит в движение [2]. Нелинейный участок ВАХ обусловлен многими причинами: неоднородностью пиннинга, дефектами структуры вихревой решетки, термической

активацией магнитного потока и др. При увеличении тока под действием сил Лоренца в движение может быть вовлечена вся вихревая решетка и ВАХ сверхпроводника становится линейной. Это так называемая область вязкого течения магнитного потока [3].

Для описания данных особенностей изменения ВАХ используются следующие модели.

Если нелинейный участок ВАХ пренебрежимо мал, то ее аппроксимация может быть выполнена с помощью модели вязкого течения магнитного потока. Математически она записывается в виде

$$E = \begin{cases} 0, & J < J_C, \\ (J - J_C)\rho_f, & J \geq J_C, \end{cases} \quad (1)$$

где  $J_C$  — критическая плотность тока, в общем случае зависящая от температуры и индукции магнитного поля;  $\rho_f$  — сопротивление течения потока.

Из этой модели следует модель критического состояния Бина [4], в которой наклоном ВАХ пренебрегают. В соответствии с данной концепцией в сверхпроводнике в ответ на любое возмущение протекает ток с плотностью, равной  $J_C$ . С помощью этой упрощенной модели электродинамика неидеальных сверхпроводников второго рода описывается в простой и наглядной форме. В частности, нетрудно найти скорость проникновения электромагнитного поля внутрь сверхпроводника, инициируемого нарастающим внешним магнитным полем. Для сверхпроводящей пластины ее величина равна  $v = \dot{B}/\mu_0 J_C$ , где  $\dot{B} = dB/dt$  — скорость увеличения внешнего магнитного поля.

В случаях, когда нелинейный участок ВАХ наблюдается в широком интервале изменения напряженности электрического поля, для описания ВАХ неидеальных сверхпроводников второго рода используют различные

модели. В частности, они могут быть описаны степенной и экспоненциальной моделями, в простейших случаях они имеют вид [5,6]

$$E = E_C \left( \frac{J}{J_C} \right)^n, \quad (2)$$

$$E = E_C \exp \left( \frac{J - J_C}{J_\delta} \right). \quad (3)$$

Здесь  $J_C$  — плотность тока, определенная при напряженности электрического поля  $E_C$ ;  $J_\delta, n$  — плотность тока и показатель степени соответственно, определяющие крутизну нарастания ВАХ. ВАХ вида (2) характерна для сверхпроводников, у которых зависимость потенциального барьера от тока имеет нелинейность логарифмического типа. В основе формулировки уравнения (3) лежит идея тепловой активации вихревой структуры сверхпроводника [2,3]. Есть и макроскопические причины, приводящие к экспоненциальному росту ВАХ неидеальных сверхпроводников второго рода. В частности, они могут быть объяснены объемной неоднородностью физических свойств сверхпроводника. У подобных материалов сверхпроводящий переход в различных зернах происходит при различных значениях температуры, магнитной индукции, плотности протекающего тока. Кроме объемной неоднородности критических параметров сверхпроводника у него может наблюдаться продольная неоднородность сверхпроводящих свойств (так называемый эффект "связки сосисок"). При этом вместо линейного показателя степени в экспоненте ВАХ вида (3) появляется квадратичная зависимость. Однако в данных случаях форма ВАХ с удовлетворительной точностью аппроксимируется с помощью простого и наглядного уравнения (2).

В силу отмеченных особенностей значения  $J_\delta, n$  изменяются в широких пределах. У неидеальных сверхпроводников второго рода, существующих при гелиевых температурах, типичными являются следующие значения:  $E_C = 10^{-5} - 10^{-2}$  В/м,  $J_\delta = (0.01 - 0.02)J_C$ ,  $n \sim 50 - 100$ . Вольт-амперные характеристики высокотемпературных сверхпроводников, как правило, описываются в терминах модели (2), у которых показатель степени обычно изменяется в пределах  $n \sim 5 - 30$ .

При  $n \rightarrow \infty$  и  $J_\delta \rightarrow 0$  модели (2), (3) переходят в модель критического состояния. Однако следует отметить, что в уравнении (3) напряженность электрического поля при  $J = 0$  равна  $E_0 = E_C \exp(-J_C/J_\delta)$ . Для того чтобы избежать неопределенности подобного типа, уравнение (3) следует записывать как

$$E = E_C \exp \left( \frac{J - J_C}{J_\delta} \right) - E_0. \quad (4)$$

Поэтому для корректности получаемых результатов ниже будет использоваться ВАХ вида (4).

В целом приведенные уравнения вольт-амперных характеристик позволяют с удовлетворительной точностью

описать широкий спектр экспериментальных данных, полученных при измерении токонесущей способности реальных сверхпроводящих проводов. Так, ВАХ физически однородных проводов с небольшим количеством сверхпроводящих волокон достаточно круты. Поэтому для подобных проводов модель вязкого течения удобна при анализе условий стабильности сверхпроводящего состояния к тепловым возмущениям, при расчете потерь в переменных магнитных полях [5,6]. В то же время по мере усложнения технологии производства сверхпроводящих проводов в практических приложениях появляются такие сверхпроводящие материалы, как например композиты с весьма тонкими сверхпроводящими волокнами, провода со сложной конструкцией поперечного сечения, у которых вольт-амперные характеристики существенно нелинейны. В этих случаях выбор каждой из моделей (2) или (3) главным образом обуславливается особенностями интерпретации полученных экспериментальных данных. Так как ни одна из этих моделей не является универсальной, то для описания ВАХ реальных проводов широко используются как степенные, так и экспоненциальные зависимости [2–11]. Следует, однако, отметить, что, несмотря на постоянное внимание, которое уделяется изучению динамики магнитного потока в сверхпроводниках второго рода (см., например, [12–16]), исчерпывающий анализ основных физических закономерностей их электродинамического поведения с учетом существующего разнообразия феноменологических моделей ВАХ реальных сверхпроводников не был проведен. В связи с этим в настоящей работе на основе решения системы уравнений

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t, \quad \operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J},$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{J} = 0 \quad (5)$$

с ВАХ (1), (2), (4) сформулированы основные закономерности проникновения электромагнитного поля внутрь неидеальных сверхпроводников второго рода, инициированного изменяющимся внешним магнитным полем, вводом транспортного тока. При этом основное внимание уделено особенностям диффузионных процессов, происходящих в сверхпроводящих материалах, сохраняющих сверхпроводимость при гелиевых температурах.

Рассмотрим хорошо охлаждаемую полубесконечную сверхпроводящую среду, помещенную в однородное внешнее магнитное поле, параллельное ее граничной поверхности (рис. 1). Пусть в начальный момент времени магнитное поле на поверхности сверхпроводника  $B_a$  равно нулю, а затем оно начинает увеличиваться с постоянной скоростью ( $B_a = \dot{B}t$ ) так, что температура сверхпроводника остается практически неизменной и равной температуре хладагента. Для упрощения проводимого анализа будем также предполагать, что плотность тока в сверхпроводнике не зависит от индукции магнитного поля. Тогда система уравнений (5) после очевидных

преобразований может быть приведена к уравнению

$$\mu_0 \partial \mathbf{J} / \partial t = \Delta \mathbf{E}. \quad (6)$$

Принимая во внимание характер изменения электромагнитного поля и регулярность соответствующих значений на бесконечности, запишем для рассматриваемой одномерной геометрии необходимые граничные и начальные условия относительно напряженности электрического поля  $E = E(x, t)$

$$\begin{aligned} \partial E / \partial x(0, t) &= -dB/dt, \\ E(\infty, t) &= 0, \quad E(x, 0) = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Наряду с (7) для дальнейшего анализа также потребуется дополнительное условие

$$\mu_0 \int_0^\infty J(x, t) dx = B_a, \quad t > 0, \quad (8)$$

выражающее непрерывность изменения магнитной индукции. Исключая в (7) плотность тока, для записанных выше типов ВАХ получим следующие одномерные урав-

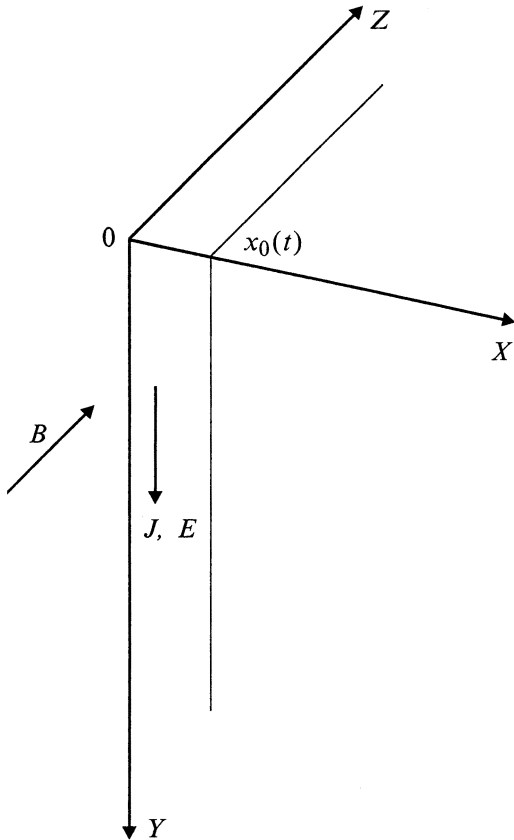


Рис. 1. Распределение электромагнитного поля в сверхпроводящем полупространстве.

нения:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \mu_0 \begin{cases} \frac{1}{\rho_f} \frac{\partial E}{\partial t} & \text{для ВАХ (1),} \\ \frac{J_c}{nE} \left( \frac{E}{E_c} \right)^n \frac{\partial E}{\partial t} & \text{для ВАХ (2),} \\ \frac{J_\delta}{E + E_0} \frac{\partial E}{\partial t} & \text{для ВАХ (4).} \end{cases} \quad (9)$$

Для решения сформулированных задач удобно воспользоваться безразмерными переменными  $e = E/E_c$ ,  $X = x/L_x$ ,  $\tau = t/t_x$ , где

$$\begin{aligned} E_x &= J_c \rho_f, \quad L_x = J_c \rho_f / \dot{B}, \quad t_x = \mu_0 J_c^2 \rho_f / \dot{B}^2 & \text{для ВАХ (1),} \\ E_x &= E_c, \quad L_x = E_c / \dot{B}, \quad t_x = \mu_0 J_c E_c / \dot{B}^2 & \text{для ВАХ (2),} \\ E_x &= E_c, \quad L_x = E_c / \dot{B}, \quad t_x = \mu_0 J_\delta E_c / \dot{B}^2 & \text{для ВАХ (4).} \end{aligned}$$

Тогда в безразмерном виде изменение напряженности электрического поля в пространстве и во времени описывается начально-краевыми задачами вида

$$\frac{\partial e}{\partial \tau} = \begin{cases} \frac{\partial e}{\partial \tau}, & (12) \\ \frac{1}{n} e^{(1-n)/n} \frac{\partial e}{\partial \tau}, & (13) \\ \frac{1}{e + e_0} \frac{\partial e}{\partial \tau}, & (14) \end{cases}$$

$$\frac{\partial e}{\partial X}(0, \tau) = -1, \quad e(\infty, \tau) = 0, \quad e(X, 0) = 0 \quad (15)$$

при соблюдении дополнительных условий

$$\int_0^\infty (1 + e) dX = \tau \quad (16)$$

для ВАХ (1),

$$\int_0^\infty e^{1/n} dX = \tau \quad (17)$$

для ВАХ (2),

$$\int_0^\infty [1 + \delta \ln(e + e_0)] dX = \delta \tau, \quad \delta = J_\delta / J_c, \quad e_0 = E_0 / E_c \quad (18)$$

для ВАХ (4).

Искомое распределение напряженности электрического поля будем отыскивать в классе автомодельных решений, используя групповые свойства дифференциальных уравнений (12)–(14). Запишем их для каждого из рассматриваемых типов ВАХ.

Для решения задачи (12), (15) будем использовать инварианты вида

$$V(Z) = \partial e / \partial X, \quad Z = X / \sqrt{\tau}. \quad (19)$$

Тогда, переходя от дифференцирования по независимым переменным  $X$ ,  $\tau$  к дифференцированию по  $Z$ , приведем уравнение в частных производных (12) к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2V}{dZ^2} + \frac{Z}{2} \frac{dV}{dZ} = 0.$$

Используя соответствующим образом преобразованные граничные условия  $V(0) = -1$ ,  $V(\infty) = 0$ , найдем

$$V(Z) = C \operatorname{erf}(Z/2) - 1, \quad (20)$$

где

$$\operatorname{erf}(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y \exp(-x^2) dx$$

— функция ошибок,  $C$  — некоторая положительная константа.

В силу громоздкой формы записи выражение для ее вычисления не приведено.

Поскольку напряженность электрического поля внутри сверхпроводника конечна, то для всех  $Z = X/\sqrt{\tau} > 0$  имеет место неравенство  $\partial e/\partial X < 0$ . Следовательно, область существования неотрицательных значений  $e(X, \tau)$  конечна. Данный вывод также следует из условия непрерывности (16). Поэтому, согласно (15), (19), распределение напряженности электрического поля внутри сверхпроводника описывается выражением

$$e(X, \tau) = X_0(\tau) - X + C \int_{X_0(\tau)}^X \operatorname{erf}\left(\frac{X}{2\sqrt{\tau}}\right) dX,$$

где  $X_0(\tau)$  — подвижная граница области намагниченности сверхпроводника.

Используя для ее определения модифицированное условие (16)

$$\int_0^{X_0(\tau)} (1 + e) dX = \tau, \quad (21)$$

найдем уравнение движения фронта намагниченности

$$\tau = X_0 + \frac{X_0^2}{2} + C \int_0^{X_0} [\Psi(X, \tau) - \Psi(X_0, \tau)] dX. \quad (22)$$

Здесь  $\Psi(X, \tau) = X \operatorname{erf}(X/2\sqrt{\tau}) + 2\sqrt{\tau/\pi} \exp(-X^2/4\tau)$ . Дифференцируя уравнение (21) по  $\tau$ , нетрудно установить, что  $dX_0/\tau = \partial e/\partial X|_{X=X_0}$ , т.е. в модели вязкого течения на границе области намагниченности профиль напряженности электрического поля, как и в модели критического состояния, имеет конечную производную по пространственной координате. В то же время из (22) следует, что в отличие от модели критического состояния скорость распространения фронта намагниченности

внутри неидеальных сверхпроводников второго рода, вообще говоря, не является постоянной. Однако если для реальных композитных сверхпроводников во внимание принять малые поперечные размеры сверхпроводящих жил, то для них нетрудно оценить  $X_0 \ll 1$ . Поэтому с хорошей степенью точности  $X_0 \sim \tau$ , т.е., как и в модели критического состояния, скорость проникновения магнитного потока внутрь сверхпроводников с ВАХ вида (1) практически постоянна и в размерном виде равна  $v = \dot{B}/\mu_0 J_C$ .

Для сверхпроводящих сред со степенной ВАХ автономное решение может быть найдено после введения инварианта вида

$$V(Z) = e\tau^p, \quad Z = X/\tau^p, \quad p = n/(n+1).$$

Тогда задача (13), (15) приводится к интегрированию нелинейного обыкновенного уравнения

$$(n+1) \frac{d^2V}{dZ^2} + ZV^{(1-n)/n} \frac{dV}{dZ} - V^{1/n} = 0 \quad (23)$$

с граничными условиями

$$\frac{dV}{dZ}(0) = -1, \quad V(\infty) = 0. \quad (24)$$

При этом дополнительное условие (17) трансформируется в условие

$$\int_0^\infty V^{1/n} dZ = 1. \quad (25)$$

На рис. 2 приведено семейство решений уравнения (23) для ВАХ с  $n = 80$ , которое является типичным для Nb-Ti сплава. Кривые 1–3 получены на основании его численного решения. Причем вместо граничных условий (24) в точке  $Z = 0$  задавались исходное значение производной и варьируемые значения инварианта  $V(0)$ , значения которых указаны в подписи к рисунку. Помимо этого, также проверялось выполнение условия (25), и на вставке к рис. 2 для заданных значений  $V(0)$  построены соответствующие значения интеграла

$$I(Z) = \int_0^Z V^{1/n} dZ.$$

Как следует из рис. 2, характерной особенностью построенных кривых является наличие точки  $Z_0$ , в которой функция  $V(Z)$  принимает нулевые значения. Ее существование определяет допустимый диапазон изменения инварианта  $Z$ , так как при  $Z > Z_0$  решения (23) в области действительных значений не существует. В соответствии с этим должны видоизмениться второе граничное условие (24) и условие (25). Последнее тем самым будет определять искомое значение  $Z_0$ .

Наличие конечного значения  $Z_0$ , при котором  $V(Z_0) = 0$ , определяет специфику процесса проникновения магнитного потока внутрь сверхпроводящей

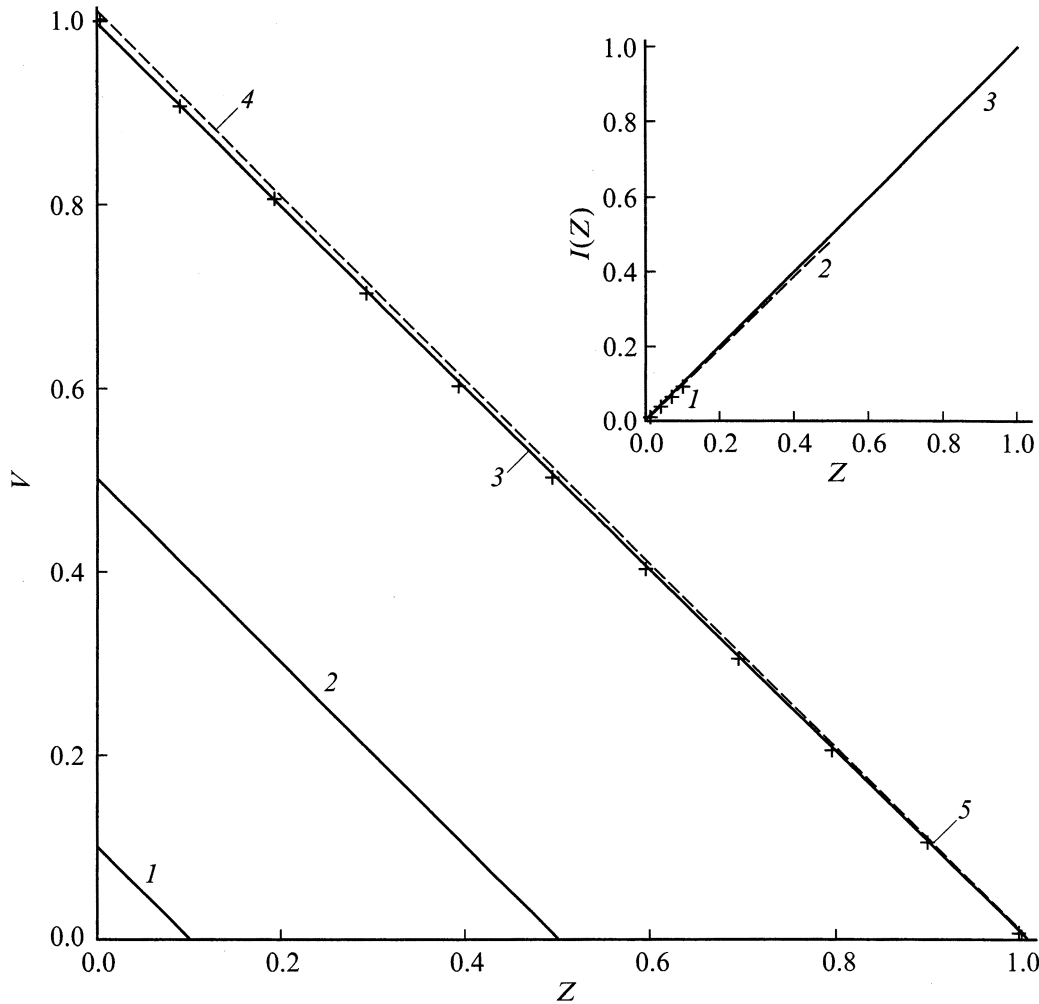


Рис. 2. Семейство решений уравнения (23).  $V(0)$ : 1 — 0.1, 2 — 0.5, 3 — 1.000017.

среды с ВАХ степенного вида. Во-первых, при всяком изменении внешнего магнитного поля возникающие в сверхпроводнике экранирующие токи будут протекать только в конечной области сверхпроводника, прилегающей к его поверхности  $0 \leq X \leq X_0(\tau) = Z_0\tau^p$ , причем  $e(X_0, \tau) = 0$ . Поэтому проникновение экранирующих токов внутрь сверхпроводника происходит с конечной скоростью. Во-вторых, на границе фронта области намагниченности имеют место особые условия изменения  $V(Z)$ , а значит, и электромагнитного поля. Сформулируем их. Для этого продифференцируем по времени уравнение (17), в котором верхний предел в соответствии со сказанным заменен на  $X_0(\tau)$ . После несложных преобразований получим

$$\left( e^{1/n} \frac{dX_0}{d\tau} + \frac{\partial e}{\partial X} \right) \Big|_{X=X_0} = 0.$$

Так как  $e(X_0\tau) = 0$ , то  $\partial e / \partial X(X_0\tau) = 0$ . Следовательно,  $dV/dZ = 0$  при  $Z = Z_0$ . Тогда из (23) следует, что вторая и все высшие производные  $d^k V/dZ^k$  при  $Z = Z_0$  также равны нулю. Поэтому при  $Z \geq Z_0$  инварианта

$V(Z)$ , а значит, и  $e(X, \tau)$  при  $X \geq X_0$  продолжают тождественным нулем.

Используя отмеченные свойства инварианты  $V(Z)$ , приведем уравнение (23) к эквивалентному интегральному уравнению второго рода. Для этого, сгруппировав в (23) соответствующие члены, проинтегрируем его по  $Z$  в пределах от 0 до  $Z$ , а затем в пределах от  $Z_0$  до  $Z$ . В результате получим

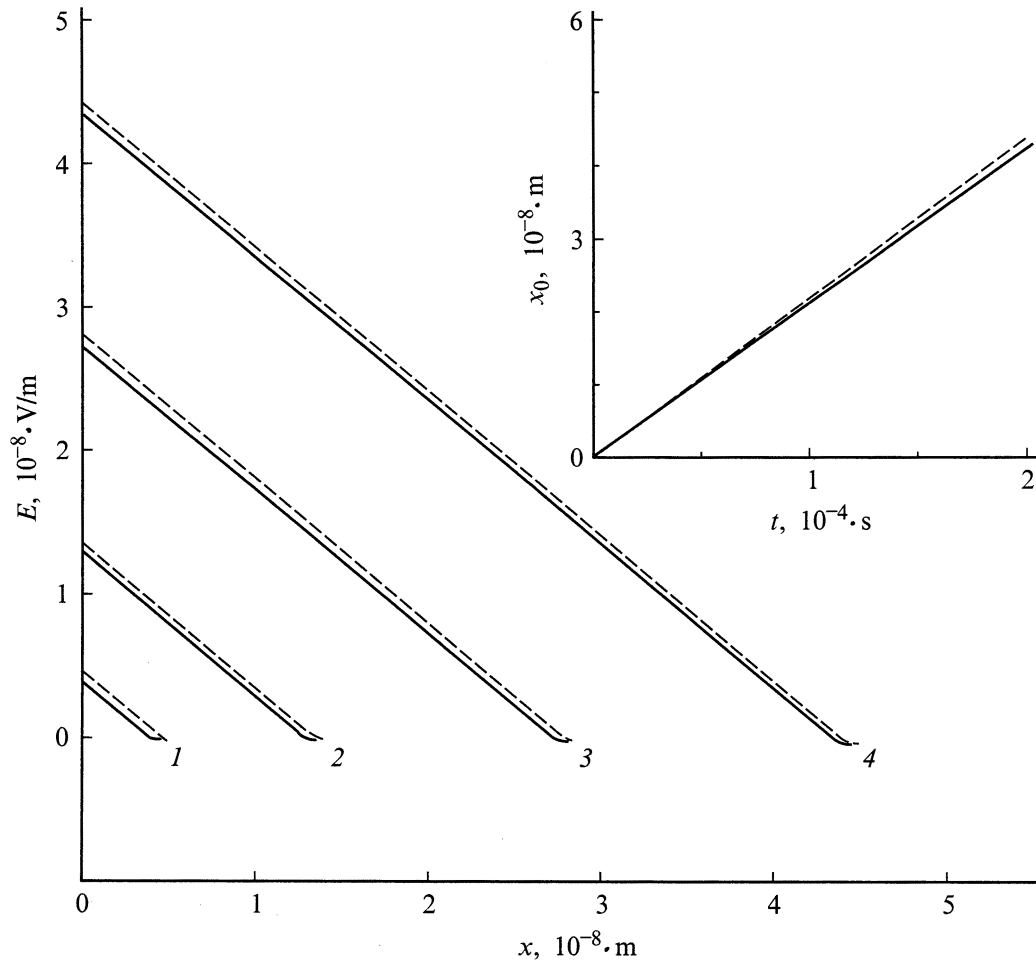
$$V(Z) = Z_0 - Z + \int_{Z_0}^Z dx \int_0^x V^{1/n}(y) dy - \frac{n}{n+1} \int_{Z_0}^Z V^{1/n}(y) dy.$$

Решение данного интегрального уравнения будем искать в соответствии с методом последовательных приближений. В качестве нулевого приближения примем

$$V_0(Z) = Z_0 - Z.$$

В этом случае значение  $Z_0$  в соответствии с условием (25) равно

$$Z_0 = \left( \frac{n+1}{n} \right)^{n/(n+1)}.$$



**Рис. 3.** Распределение напряженности электрического поля внутри сверхпроводника со степенной ВАХ.  $t, 10^{-4} \text{ s}$ : 1 — 0,2, 2 — 0,6, 3 — 1,257, 4 — 2.

Подставляя нулевое приближение в правую часть исходного интегрального уравнения, найдем следующее приближение:

$$V_1(Z) = V_0(Z) - pZ_0^{1/p}V_0(Z) + p^2Z_0V_0^{1/p}(Z).$$

На рис. 2 кривые 4, 5 представляют нулевое и первое приближения  $V(Z)$  соответственно. Хорошо видно, что для Nb–Ti сплава уже нулевое приближение с удовлетворительной точностью описывает решение интегрального уравнения. Более детальный анализ возможных решений задачи (23)–(25) показывает, что при  $n \gg 10$  линейное приближение весьма удовлетворительно описывает искомые инварианты  $V(Z)$ . Воспользуемся им для определения напряженности электрического поля, индуцированного внутри сверхпроводника. После перехода к размерным переменным будем иметь

$$E(x, t) = \frac{dB}{dt}[x_0(t) - x], \quad 0 \leq x \leq x_0(t), \quad t > 0. \quad (26)$$

Данная формула полностью совпадает с формулой, которая имеет место в модели критического состояния [5,6]. Но при этом для ВАХ вида (2) закон движения

фронта намагниченности описывается выражением

$$x_0(t) = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n/(n+1)} \left(\frac{dB}{dt}\right)^{\frac{n-1}{n+1}} t^{n/(n+1)} \left(\frac{E_C}{\mu_0^n J_C^n}\right)^{1/(n+1)},$$

согласно которому магнитный поток распространяется по сверхпроводнику со скоростью

$$\frac{dx_0}{dt}(t) = \left(\frac{dB}{dt}\right)^{\frac{n-1}{n+1}} \left(\frac{n}{n+1} \frac{E_C}{\mu_0^n J_C^n}\right)^{1/(n+1)}.$$

Нетрудно найти, что в записанных выражениях при  $n \rightarrow \infty$  соблюдается предельный переход к модели критического состояния.

На рис. 3 для различных моментов времени показано распределение электрического поля внутри Nb–Ti сверхпроводника при изменении внешнего магнитного поля со скоростью  $dB/dt = 1 \text{ T/s}$ . Штриховыми кривыми показаны зависимости  $E(x, t)$ , построенные с помощью нулевого приближения. Здесь же сплошными кривыми представлены результаты численного решения задачи (2), (7), (10), выполненного с шагом по времени

$\Delta t = 10^{-8}$  s и шагом по пространству  $\Delta x = 10^{-9}$  m. О его точности можно судить по результатам расчета границы области намагниченности  $x_0(t)$ , которые приведены на вставке к рис. 3. При выполнении расчетов исходные параметры задавались равными  $n = 80$ ,  $E_C = 10^{-4}$  V/m,  $J_C = 4 \cdot 10^9$  A/m<sup>2</sup>.

Исследуем особенности динамики магнитного потока в сверхпроводниках с экспоненциальной ВАХ. Так как  $e_0 \ll 1$ , решение (14), (15) будем искать в виде разложения по малому параметру  $e_0$

$$e = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 e_0 + \varepsilon_2 e_0^2 + \dots$$

Тогда в нулевом относительно разложения по  $e_0$  приближении исходная задача преобразуется к виду

$$\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \varepsilon_0}{\partial X^2} = \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial \tau},$$

$$\frac{\partial \varepsilon_0}{\partial X}(0, \tau) = -1, \quad \varepsilon_0(\infty, \tau) = 0, \quad \varepsilon_0(X, 0) = 0.$$

Нетрудно понять, что в силу малости  $e_0$  последующие приближения практически не окажут влияния на искомые значения  $e(X, \tau)$ . Поэтому для определения  $e(X, \tau)$  достаточно ограничиться нулевым приближением относительно разложения по  $e_0$ . Предполагая  $V(Z) = \varepsilon_0/\tau$ ,  $Z = X/\tau$ , для определения инварианты  $V(Z)$  получим краевую задачу

$$V \frac{d^2 V}{dZ^2} + Z \frac{dV}{dZ} - V = 0,$$

$$\frac{dV}{dZ}(0) = -1, \quad V(\infty) = 0. \quad (27)$$

На рис. 4 представлены возможные зависимости  $V(Z)$ , определенные на основании численного решения (27), выполненного для различных начальных значений  $V(0)$  и в соответствии с исходным граничным условием при  $Z = 0$ . Поскольку по своему физическому смыслу  $V(Z)$  не должно быть отрицательным и при  $Z \rightarrow \infty$  удовлетворять условию ограниченности, то приведенные на рис. 4 кривые позволяют сделать следующие выводы. Форма искомой инварианты должна быть отлична от зависимостей, представленных кривыми 2–6, которые, начиная с некоторого значения  $Z$ , имеют положительный наклон. Поэтому решение (27), как и в уже рассмотренных выше случаях, следует искать на ограниченном отрезке  $0 \leq Z \leq Z_0$ , причем  $V(Z_0) = 0$ . Тогда из (18), (27) следует, что при  $Z = Z_0$  все производные по  $Z$  равны нулю, т.е.  $V(Z) = 0$  для всех  $Z \geq Z_0$ . Следовательно, нетривиальное решение задачи (4), (7), (11), как для моделей критического состояния и ВАХ степенного вида, также имеет вид электромагнитной волны, распространяющейся по сверхпроводнику с конечной скоростью. Ее фронтом является граница раздела между намагниченной областью и областью с невозмущенными начальными значениями, к которым плавно приближаются индуцированные внешним магнитным полем соответствующие значения в намагниченной области.

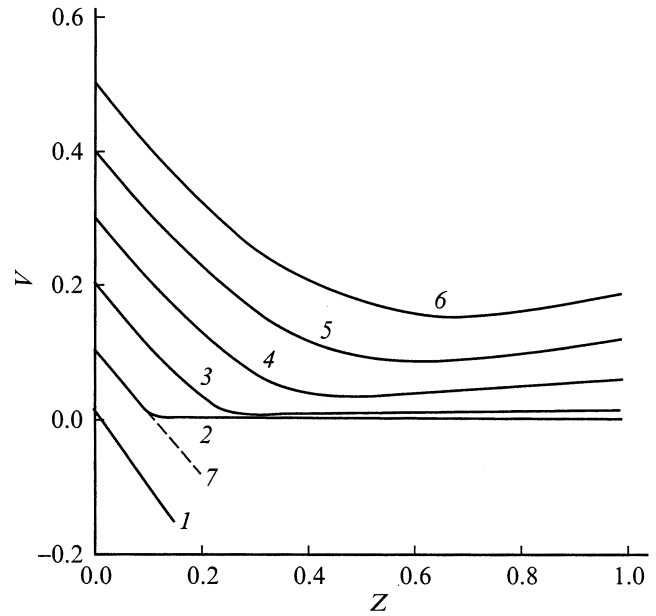


Рис. 4. Семейство решений задачи (27).  $V(0)$ : 1 — 0.01, 2 — 0.1, 3 — 0.2, 4 — 0.3, 5 — 0.4, 6 — 0.5, 7 — приближенное решение.

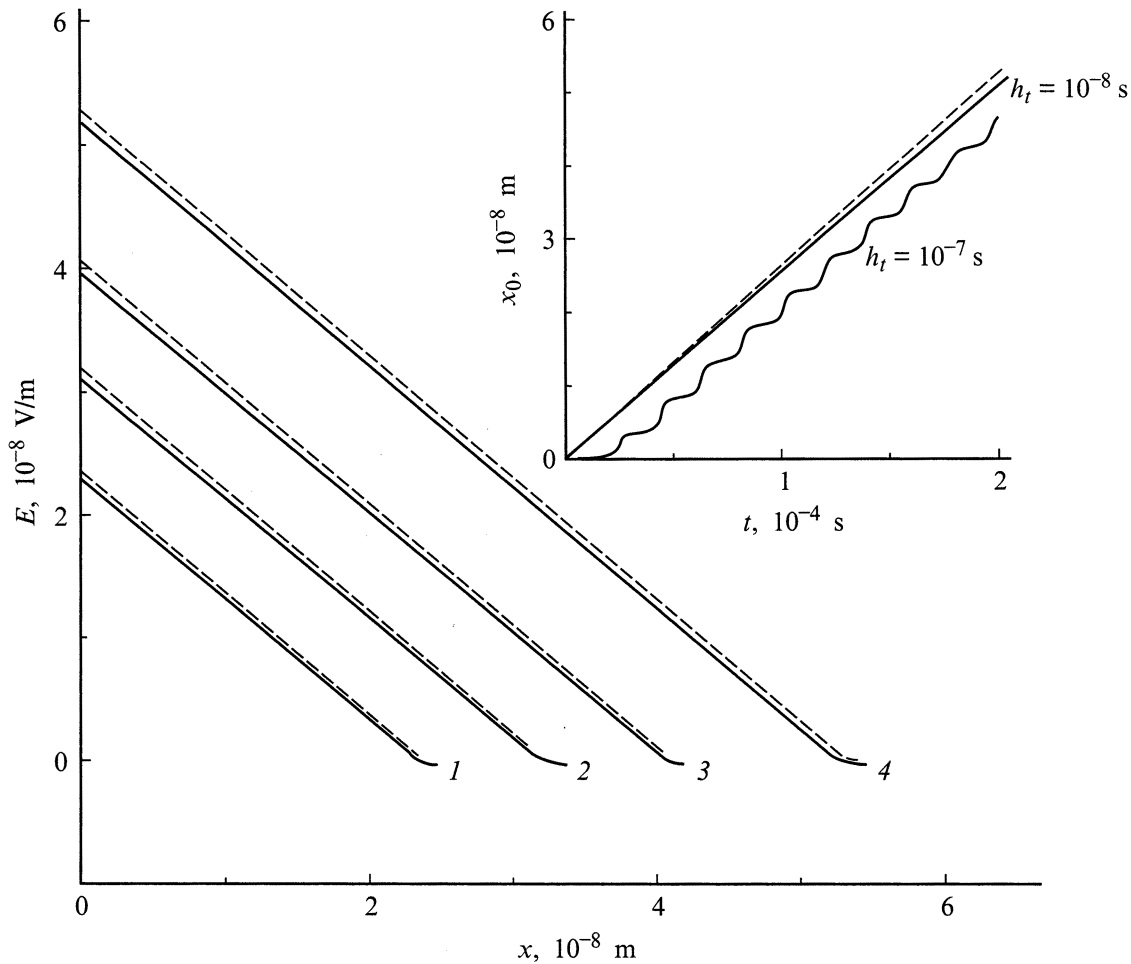
Для определения  $V(Z)$  перейдем от дифференциального уравнения (27) к соответствующему интегральному. Разделив уравнение (27) на  $V$ , а затем дважды интегрируя его в пределах от 0 до  $Z$  и от  $Z_0$  до  $Z$ , получим следующее интегральное уравнение второго рода:

$$V(Z) = Z_0 - Z + \frac{Z^2 - Z_0^2}{2} - \int_{Z_0}^Z dx \int_0^x \frac{y}{V(y)} \frac{dV}{dy} dy.$$

Из рис. 4 следует, что допустимые значения инварианты  $V(Z)$  существуют в области  $Z \ll 1$ . Поэтому уже линейная аппроксимация решений уравнения (27), показанная на рис. 4 для случая  $V(0) = 0.1$  штриховой кривой 7, будет с удовлетворительной точностью описывать значения  $V(Z)$ . Следовательно, в линейном приближении напряженность электрического поля внутри области намагниченности сверхпроводника также описывается формулой (26), где подвижная координата фронта намагниченности для сверхпроводящих сред с ВАХ типа (4) является решением трансцендентного уравнения

$$B_a = \mu_0 J_C x_0(t) + \mu_0 J_\delta \left( \frac{E_0}{dB/dt} + x_0(t) \right) \times \left( \ln \frac{E_0 + x_0(t) dB/dt}{E_C} - 1 \right) - \mu_0 J_\delta \frac{E_0}{dB/dt} \left( \ln \frac{E_0}{E_C} - 1 \right). \quad (28)$$

Принимая во внимание малость  $E_0$ , из данного уравнения для всех  $x_0(t) \ll E_C/\dot{B}$  нетрудно найти верхнюю



**Рис. 5.** Распределение напряженности электрического поля внутри сверхпроводника с экспоненциальной ВАХ.  $t, 10^{-4}$  s: 1 — 0.888, 2 — 1.208, 3 — 1.537, 4 — 2.

оценку для скорости проникновения магнитного потока внутрь сверхпроводника с экспоненциальной ВАХ

$$v = \frac{dB/dt}{\mu_0(J_C - 2J_\delta)}$$

Отметим, что в записанных приближенных выражениях условие  $J_\delta \rightarrow 0$  соответствует предельному переходу к модели критического состояния.

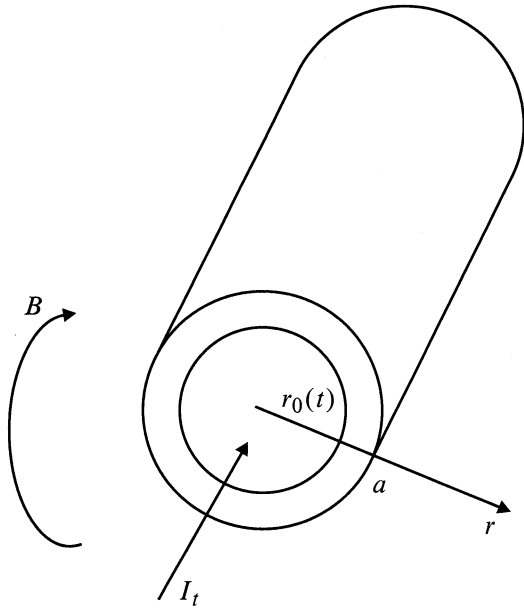
На рис. 5 для Nb-Ti сверхпроводника с экспоненциальной ВАХ приведено пространственное распределение напряженности электрического поля, вычисленное для различных моментов времени как по формулам (26), (28), так и на основании численного решения исходной задачи (7), (11). В расчетах принималось  $dB/dt = 1$  Т/с,  $E_C = 10^{-4}$  В/м,  $J_C = 4 \cdot 10^9$  А/м<sup>2</sup>,  $J_\delta = 4 \cdot 10^7$  А/м<sup>2</sup>. Сходимость численного решения при  $\Delta x = 10^{-9}$  м и уменьшении шага по времени показано на вставке к рис. 5.

Приведенные аналитические и численные решения наглядно демонстрируют физические особенности процесса проникновения электромагнитного поля внутрь

неидеальных сверхпроводников второго рода, индуцированного изменяющимся внешним магнитным полем. Однако помимо вариации магнитного поля может происходить и изменение транспортного тока. В общем случае эти процессы происходят одновременно и конечное состояние токонесящего элемента зависит от последовательности их изменения. Но из всего многообразия возможных задач особое значение для оценки токонесящей способности проводов, для анализа экспериментальных результатов измерения ВАХ сверхпроводников представляет решение задачи о распределении тока, вводимого в сверхпроводящий композитный проводник (сверхпроводник + матрица), который в большинстве практических случаев имеет цилиндрическую форму. В связи с этим исследуем данную проблему с учетом автомодельного характера распространения электромагнитного поля внутри сверхпроводящих сред с ВАХ (2), (4).

Рассмотрим бесконечно протяженный цилиндрический провод с радиусом  $a$ , по сечению которого равномерно распределен сверхпроводник с коэффициентом





**Рис. 6.** Распределение тока и магнитного поля в сверхпроводящем цилиндре при вводе в него тока.

заполнения  $\eta$  (рис. 6). Предположим, что внешнее магнитное поле постоянно. Пусть в начальный момент времени транспортный ток равен нулю, а затем он начинает увеличиваться с заданной скоростью  $dI/dt$ . В упрощенной постановке, согласно которой можно пренебречь током, протекающим по матрице [5,6], напряженность электрического поля, индуцированного изменяющимся током, в цилиндрической системе координат в соответствии с уравнением (6) описывается нелинейным параболическим уравнением вида

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial E}{\partial r} \right) = \mu_0 \eta \begin{cases} \frac{J_C}{nE} \left( \frac{E}{E_C} \right)^{1/n} \frac{\partial E}{\partial t} & \text{для ВАХ (2),} \\ \frac{J_\delta}{E + E_0} \frac{\partial E}{\partial t} & \text{для ВАХ (4)} \end{cases} \quad (29)$$

с начальным и краевым условиями

$$E(r, 0) = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial r}(a, t) = \frac{\mu_0}{2\pi a} \frac{dI}{dt} \quad (30)$$

при соответствующем условии сохранения тока

$$\int_S J ds = I_t, \quad t > 0,$$

где  $S$  — область протекания тока;  $I_t = dI/dt t$  — общий ток, введенный в композит.

Для решения (29), (30) воспользуемся введенными выше безразмерными переменными, в которых в качестве характерного линейного размера принят радиус композита. Преобразуем дивергентную часть исходных уравнений, заменяя переменные  $\rho = 1 - R$ ,  $R = r/a$  и

используя для  $\rho \leq 1$  разложение  $(1 - \rho)^{-1} \sim 1 - \rho + \dots$ . Тогда относительно новой переменной  $y = \ln(1 - \rho)$  задачи (29), (30) запишутся в виде

$$\frac{\partial^2 e}{\partial y^2} = \begin{cases} \frac{1}{n} e^{(1-n)/n} \frac{\partial e}{\partial \tau}, \\ \frac{1}{e + e_0} \frac{\partial e}{\partial \tau}, \end{cases}$$

$$e(y, 0) = 0, \quad \frac{\partial e}{\partial y}(0, \tau) = q = \frac{\mu_0}{2\pi E_C} \frac{dI}{dt},$$

решение которых при  $q = -1$  было записано выше. Поэтому нетрудно найти и соответствующие аналитические выражения в цилиндрической системе координат, описывающие распределение напряженности электрического поля, индуцированного в сверхпроводящем композите вводом тока. В нулевом приближении, как и в модели критического состояния [5], будем иметь

$$E(r, t) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{dI}{dt} \ln \frac{r}{r_0(t)}, \quad (31)$$

где  $r_0(t)$  — подвижная граница области протекания тока, которая, согласно условию сохранения тока, определяется из решения уравнения

$$I_t = 2\pi \eta J_C \left( \frac{\mu_0}{2\pi E_C} \frac{dI}{dt} \right)^{1/n} \int_{r_0}^a \left( \ln \frac{r}{r_0} \right)^{1/n} r dr \quad (32)$$

для степенной ВАХ (2) и

$$I_t = \pi n J_C (a^2 - r_0^2) + 2\pi \eta J_\delta \int_{r_0}^a \ln \left( \frac{\mu_0}{2\pi E_C} \frac{dI}{dt} \ln \frac{r}{r_0} + \frac{E_0}{E_C} \right) r dr$$

для экспоненциальной ВАХ вида (4).

Для иллюстрации правомерности использования записанных приближенных выражений на рис. 7 приведены результаты расчета напряженности электрического поля на поверхности композита  $E_a = E(a, t)$  со степенной ВАХ, выполненного по формулам (31), (32) и на основе численного решения системы уравнений Фурье и Максвелла

$$c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \lambda r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + EJ, \quad \mu_0 \frac{\partial J}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial E}{\partial r} \right),$$

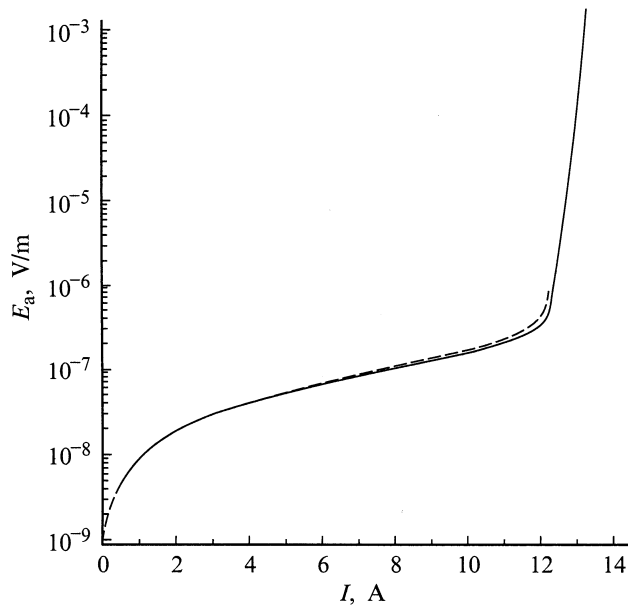
$$J = \eta J_s + (1 - \eta) J_m, \quad E = E_C (J_s / J_C)^n = J_m \rho_m \quad (33)$$

с начально-краевыми условиями

$$T(r, 0) = T_0, \quad E(r, 0) = 0,$$

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial r} + h(T - T_0)|_{r=a} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial r} \Big|_{r=a} = \frac{\mu_0}{2\pi a} \frac{dI}{dt},$$

которая рассматривалась с целью общности анализа получаемых результатов. При проведении вычислений исходные параметры принимались равными  $a = 5 \cdot 10^{-5}$  м,  $c = 1000$  Дж/(м<sup>3</sup> · К),  $\lambda = 200$  Вт/(м · К),



**Рис. 7.** Увеличение напряженности электрического поля на поверхности цилиндрического композитного сверхпроводника. Штриховая кривая — нулевое приближение (31), (32), сплошная — численная модель (33).

$h = 1000 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ ,  $T_0 = 4.2 \text{ K}$ ,  $\eta = 0.5$ ,  $\rho_m = 2 \cdot 10^{-10} \Omega \cdot \text{m}$ ,  $J_C = 4 \cdot 10^9 \text{ A}/\text{m}^2$ ,  $E_C = 10^{-4} \text{ V}/\text{m}$ ,  $n = 80$ ,  $dI/dt = 1 \text{ A}/\text{s}$ , которые соответствуют композитному проводнику на основе Nb–Ti сверхпроводника в медной матрице.

Расчет в нулевом приближении выполнялся для состояний, предшествующих полному заполнению током поперечного сечения композита, когда его температура практически не отличается от температуры хладагента. В численной модели рассматривалась и стадия ввода тока при его заполнении всего поперечного сечения композита. На рис. 7 это соответствует вначале устойчивому увеличению напряженности электрического поля, а затем ее лавинообразному нарастанию при соответствующем увеличении температуры композита выше температуры хладагента с последующим его переходом в нормальное состояние.

Таким образом, записанные решения и выполненный на их основе анализ особенностей процесса проникновения магнитного потока внутрь неидеальных сверхпроводников второго рода с различными типами вольт-амперных характеристик показывают, что внешнее электромагнитное поле, как и в модели критического состояния, не может мгновенно проникнуть в толщу сверхпроводника. Вследствие этого экранирующие токи, индуцированные внешним магнитным полем, протекают только в ограниченной области поперечного сечения провода, даже несмотря на то, что устойчивое электрическое напряжение внутри сверхпроводника возникает задолго до нарушения условий стабильности сверхпроводящего состояния. Происходящие при этом диффузионные яв-

ления характеризуются образованием внутри сверхпроводника электромагнитной волны, распространяющейся по нему с конечной скоростью. Как и в модели критического состояния, для сверхпроводящих материалов, сохраняющих сверхпроводимость при гелиевом уровне температур, пространственное распределение напряженности электрического поля внутри сверхпроводников с рассмотренными типами нелинейностей ВАХ с хорошей степенью точности аппроксимируется линейной зависимостью, но при соответствующих каждому типу ВАХ уравнениях движения границы области намагниченности. В то же время в отличие от модели критического состояния на подвижной границе области намагниченности сверхпроводящих сред со степенной или экспоненциальной ВАХ равны нулю все производные по пространственной координате. Поэтому в окрестности фронта проникновения магнитного потока напряженность электрического поля, индуцированная изменяющимся внешним магнитным полем или транспортным током, плавно приближается к соответствующему невозмущенному значению.

В заключение отметим, что нелинейный характер ВАХ еще в более существенной форме наблюдается у высокотемпературных сверхпроводников в силу их известной физической неоднородности, сложности явлений, протекающих на границе сверхпроводник–нормальный металл. При этом уравнения вольт-амперных характеристик вида (2), (3) также имеют место у высокотемпературных сверхпроводников. Поэтому сформулированные в настоящей работе основные характерные особенности диффузионных процессов в сверхпроводящих средах с ВАХ вида (2)–(4) справедливы и для высокотемпературных сверхпроводников.

Работа выполнена в рамках проекта № 98-02-16046а Российского фонда фундаментальных исследований.

## Список литературы

- [1] Кемпбелл А., Иветс Дж. Критические токи в сверхпроводниках. М.: Мир, 1975. 332 с.
- [2] Anderson P.W. // Phys. Rev. Lett. 1962. Vol. 9. N 7. P. 309–311.
- [3] Anderson P.W., Kim Y.B. // Rev. Mod. Phys. 1964. Vol. 36. N 1. P. 39–43.
- [4] Bean C.P. // Phys. Rev. Lett. 1962. Vol. 8. N 6 P. 250–253.
- [5] Гуревич А.В., Милиц Р.Г., Рахманов А.Л. Физика композитных сверхпроводников. М.: Наука, 1987. 240 с.
- [6] Уилсон М. Сверхпроводящие магниты. М.: Мир, 1985. 407 с.
- [7] Jones R.G., Rhoderick E.H., Rose-Innes A.C. // Phys. Lett. 1967. Vol. 24A. N 6. P. 318–319.
- [8] Polak M., Hlasnik I., Krempasky L. // Cryogenics. 1973. Vol. 13. N 12. P. 702–711.
- [9] Краснов Ю.К., Шухман В.А., Матюшкина Л.В. // ФНТ. 1979. Т. 5. № 2. С. 109–117.
- [10] Dorofeev G.L., Imenitov A.B., Klimenko E.Yu. // Cryogenics. 1980. Vol. 20. N 6. P. 307–312.

- [11] *Goodrich L.F., Fickett F.R.* // *Cryogenics*. 1982. Vol. 22. N 5. P. 225–241.
- [12] *Kalmakhelidze Yu.G., Mints R.G.* // *Cryogenics*. 1989. Vol. 29. N 11. P. 1041–1044.
- [13] *Vinokur V.M., Feigel'man M.V., Geshkenbein V.B.* // *Phys. Rev. Lett.* 1991. Vol. 67. N 7. P. 915–918.
- [14] *Gurevich A., Kupfer H.* // *Phys. Rev.* 1993. Vol. 48. N 9. P. 6477–6487.
- [15] *Максимов И.Л., Шалаев И.В.* // *Сверхпроводимость: физика, химия, техника*. 1991. Т. 4. N 7. С. 1251–1255.
- [16] *Kasatkin A.L., Pan V.M., Vysotskii V.V.* et al. // *Physica C*. 1998. Vol. 310. P. 296–301.