Краткие сообщения

01;09

Переходное фрактальное излучение

© В.Н. Болотов

Институт электромагнитных исследований,
310022 Харьков, Украина
E-mail: renic@iemr.vl.net.ua

(Поступило в Редакцию 21 октября 1999 г.)

Явления, связанные с фрактальностью движения излучающих объектов, а также с фрактальностью электродинамических структур, представляют в настоящее время большой интерес. Рассмотрено излучение электромагнитных волн, сопровождающее переходные фрактальные процессы.

Введение

Большой интерес, который в последние годы вызывают фракталы, связан не только с их особой красотой, но и с большим кругом новых явлений фрактальной физики [1]. В настоящее время существование электродинамических фрактальных структур не вызывает сомнений, более того, стало ясно, что электрофизические свойства таких структур имеют особый нетривиальный характер. При этом рассматриваются как стохастические, так и регулярные фрактальные объекты.

В данной работе рассматриваются электродинамические задачи излучения с участием фрактальных структур. При этом используются регулярные фракталы, построенные на основе функции Кантора. Это никоим образом не снижает общность полученных результатов.

Переходные процессы приводят к изменению параметров системы со временем или в пространстве. В данной работе вводится в рассмотрение переходное фрактальное излучение (ПФИ), которое инициируется изменением этих параметров по фрактальному закону. Как известно [2], прямолинейно и равномерно движущийся сгусток заряженных частиц может излучать электромагнитные волны при его прохождении через границу двух и более сред с разной диэлектрической проницаемостью. ПФИ связано с тем, что граница является фракталом. Такая геометрия границы приводит к особенностям в спектрах излучений, к их широкополосности и самоподобию.

Излучение электромагнитных волн при изменении состояния излучающей системы по фрактальному закону

Если в течение промежутка времени T система электрических зарядов перестраивается (параметры системы изменяются), то можно утверждать, что в течение этой перестройки система излучает электромагнитные волны. Пусть в начальный момент система зарядов имела дипольный момент $\mathbf{p}_1$, а через время перестройки T он стал равным $\mathbf{p}_2$. Пусть перестройка системы (т. е. переход из одного стационарного состояния системы в другое стационарное состояние) осуществляется по фрактальному закону. В качестве фрактальной функции возьмем одну из самых изученных — функцию Кантора $\alpha_\xi(t)$, связанную со множеством Кантора [1], у которого ξ — оставляемый интервал на каждой итерации ($0 < \xi < 0.5$). Функция Кантора постоянна на удаленных из отрезка $[0, 1]$ интервалах и меняется скачком в точках канторова дисконтинуума (рис. 1).

В настоящем исследовании используется интервал $[0, 2\pi]$. Фрактальная размерность множества Кантора равна: $D_f = \ln 2/|\ln\xi|$. Таким образом, в представляемой модели дипольный момент излучающей системы имеет вид

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \left[\mathbf{P}_1 + \alpha_\xi\left(\frac{2\pi t}{T}\right)(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1)\right]\delta(\mathbf{r}). \qquad (1)$$

При этом размеры системы выбираются малыми и в дальнейшем ими можно пренебречь. Математически

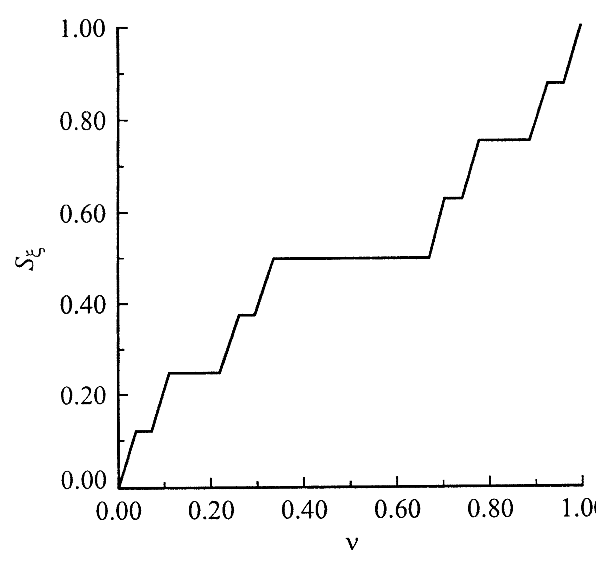

Рис. 1. Функция Кантора $\alpha_\xi(x)$ (чертова лестница).

этот факт отражен введением дельта-функции Дирака $\delta(\mathbf{r})$. Рассмотрим теперь излучение, возникающее на частоте ω при указанном выше законе изменения дипольного момента. Фурье-компонента вектор-потенциала определяется формулой [2]

$$\mathbf{A}_\omega = \int \mathbf{j}_\omega(\mathbf{r}) \frac{\exp(i\omega/c|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d\mathbf{r}'. \quad (2)$$

Здесь $\mathbf{j}_\omega$ — фурье-компонента тока $\mathbf{j}$, связанного с изменением дипольного момента,

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = (\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2)\delta(\mathbf{r}) \frac{d}{dt} \alpha_\xi \left(\frac{2\pi t}{T}\right). \quad (3)$$

Испольуя это выражение, несложно найти фурье-компоненту плотности тока, перейдя от преобразования Фурье для $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$,

$$\mathbf{j}_\omega(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \int^{\infty} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \exp(i\omega t), \quad (4)$$

к преобразованию Фурье–Стильтьеса для канторовой функции, используя соотношение

$$\frac{d}{dt}\alpha_\xi(t)dt = d\alpha_\xi(t). \quad (5)$$

Таким образом, следуя [3],

$$\mathbf{j}_\nu(\mathbf{r}) = \frac{(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1)}{2\pi} \delta(\mathbf{r}) \exp(-\pi i \nu) \times \prod_{k=1}^{\infty} \cos(\pi \nu \xi^{k-1}(1-\xi)), \quad (6)$$

где $\nu = \omega T/2\pi$.

Спектральная плотность излучения, приходящаяся на интервал частот $d\omega$ и на телесный угол $d\Omega$, равна

$$dW_{\mathbf{n},\omega} = c|\mathbf{H}_\omega|^2 \mathbf{r}^2 d\Omega d\omega. \quad (7)$$

На больших расстояниях r от начала координат магнитное поле $\mathbf{H}_\omega$ просто выражается через вектор-потенциал $\mathbf{A}_\omega$

$$\mathbf{H}_\omega(\mathbf{r}) = i\frac{\omega}{c}[\mathbf{n}, \mathbf{A}_\omega], \quad (8)$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор в направлении излучения.

Таким образом, зная $\mathbf{j}_\omega$, $\mathbf{A}_\omega$ и $\mathbf{H}_\omega$, мы можем найти интенсивность излучения $I(\omega)$ в волновой зоне, проинтегрировав по телесному углу выражение (7),

$$I(\omega) = \frac{(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1)^2}{3\pi c^3} \omega^2 S_\xi(\omega), \quad (9)$$

$$S_\xi(\omega) = \prod_{k=1}^{\infty} \cos^2\left(\frac{\omega T}{2} \xi^{k-1}(1-\xi)\right). \quad (10)$$

Приведенный выше результат отличается от получаемых ранее появлением в формуле для спектра структурного фактора $S_\xi(\omega)$, содержащего произведение квадратов косинусов. Такого типа особенность в излучении характерна для фрактальных структур [4]. На дипольное излучение влияет фрактальная размерность функции, описывающей переходный процесс. Эта размерность и является управляющим параметром вида спектров. В случае мгновенной перестройки $\omega T \ll 1$ легко получить спектр, совпадающий со спектром, полученным в работе [5],

$$I_0(\omega) = \frac{(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1)^2}{3\pi c^3} \omega^2. \quad (11)$$

Таким образом, становится понятным, что фрактальность при переходных процессах может себя проявить только при конечном времени перестройки. На рис. 2–5 приводятся структурные факторы S_ξ для спектров излучения при нескольких значениях фрактальной размерности.

Достаточно просто из уравнений (9) и (10) получить функциональное уравнение для интенсивности излучения

$$I(\omega) = \frac{\cos^2[\omega T(1-\xi)/2]}{\xi^2} I(\xi\omega). \quad (12)$$

Анализ этого уравнения показывает самоподобность спектров ПФИ. Этот факт непосредственно виден на рис. 2 и 3.

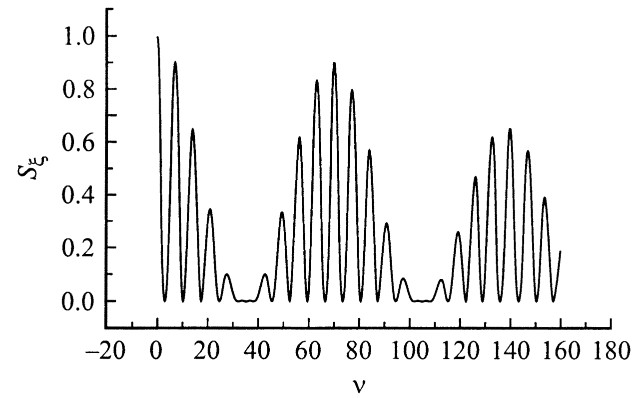

Рис. 2. $S_\xi(\nu)$ для $D_f = 0.3$.

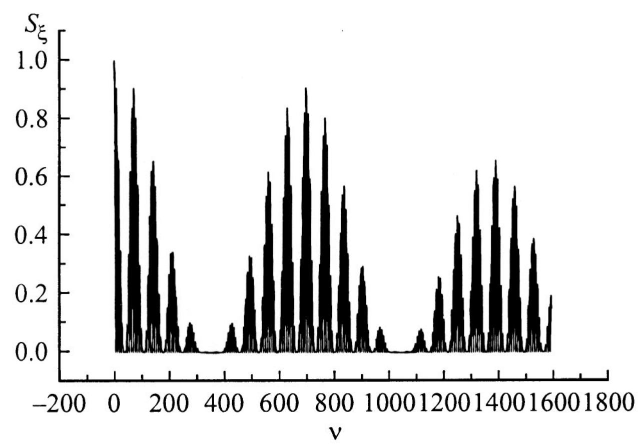

Рис. 3. $S_\xi(\nu)$ для $D_f = 0.3$.

Переходное излучение на фрактальной границе между двумя средами

Исследованиями последних лет установлено, что шероховатые поверхности твердых тел могут обладать фрактальными свойствами (иметь друбную размерность Хаусдорфа–Безиковича). То же относится и к межфазной границе при фазовых превращениях.

Для решения задачи, сформулированной в названии данного раздела, примем следующую модель фрактальной границы двух сред. Положим, что пространство с $z < 0$ и $z > L$ заполнено веществом с диэлектрической проницаемостью ε_1, в переходном слое $(0 \le z \le L)$ диэлектрическая проницаемость меняется по закону, который соответствует закону (фрактальному) чередующихся диэлектрических слоев с ε_1 и ε_2,

$$\varepsilon(z) = \varepsilon_1 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) L \frac{d}{dz} \alpha_\xi(z/L). \qquad (13)$$

Теперь рассмотрим электромагнитное излучение заряда, движущегося равномерно со скоростью $\mathbf{v}$ через переходной слой. При этом возникает переходное излучение, причиной которого является изменение электродинамических параметров среды (в данном случае — диэлектрической проницаемости) вдоль траектории заряда. Предположим, что

$$\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon_1} = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1} \ll 1. \qquad (14)$$

В работе [2] получена формула для спектрально-угловой плотности энергии переходного излучения на размытой границе двхх прозрачных сред при выполнении последнего условия. Для излучения назад эта формула имеет вид

$$W_2(\omega, \theta_2) = \frac{q^2\omega^2 \left[1 - \varepsilon\beta^2 + \beta\sqrt{\varepsilon}\cos\theta_2\right]^2 \sin^2\theta_2}{4\pi^2\varepsilon^{3/2}c^3\left[1 - \varepsilon\beta^2\cos^2\theta_2\right]^2}$$
$$\times |\delta\varepsilon_k|^2\Big|_{k=-\omega/v[1+\beta\sqrt{\varepsilon}\cos\theta_2]}, \qquad (15)$$

а для излучения вперед

$$W_1(\omega, \theta_1) = \frac{q^2\omega^2 \left[1 - \varepsilon\beta^2 + \beta\sqrt{\varepsilon}\cos\theta_1\right]^2 \sin^2\theta_1}{4\pi^2\varepsilon^{3/2}c^3\left[1 - \varepsilon\beta^2\cos^2\theta_1\right]^2}$$
$$\times |\delta\varepsilon_k|^2\Big|_{k=-\omega/v[1-\beta\sqrt{\varepsilon}\cos\theta_2]}, \qquad (16)$$

где $\beta = v/c$, q — заряд частицы, $\varepsilon = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)/2$, $\cos\theta_2 = \mathbf{kv}/kv$, $\cos\theta_1 = -\cos\theta_2$, $\mathbf{k}$ — волновой вектор в направлении излучения,

$$\delta\varepsilon_k = \int dz \exp(-ikz)\delta\varepsilon(z). \qquad (17)$$

Используя дальше формулу для преобразования Фурье-Стильтьеса функции Кантора (6), несложно получить спектр переходного излучения при прохождении зарядов через фрактальную границу. Для этого мы должны в выражении для излучения вставить соотношение для $|\delta\varepsilon_k|^2$

$$|\delta\varepsilon_k|^2 = \Delta\varepsilon^2 S_\xi(kL). \qquad (18)$$

В случае $\beta \ll 1$ и $W_1 = W_2 = W$ видно, что

$$W(k, \theta) = \frac{q^2\beta^2\Delta\varepsilon^2\sin^2\theta}{4\pi^2\varepsilon^{3/2}c} S_\xi(kL)k^2. \qquad (19)$$

Таким образом, можно сделать вывод, что фрактальность среды или переходных процессов вносит особенность в переходное излучение через структурный фактор S_ξ.

Следует отметить, что канторов дисконтинуум является простейшим совершенным нигде не плотным множеством [3]. Поэтому фрактальные среды, построенные на основе множества Кантора, являются частным случаем совершенных нигде не плотных сред.

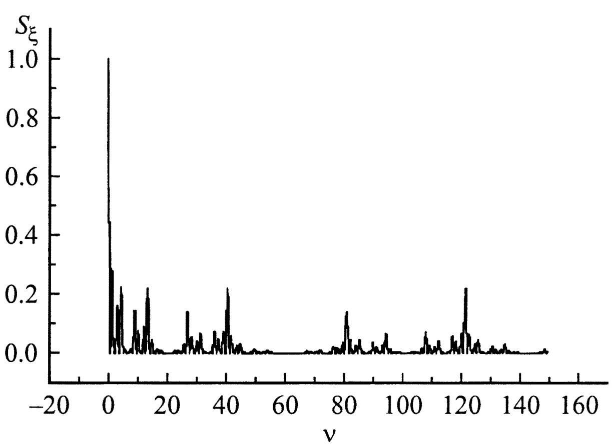

Рис. 4. $S_\xi(\nu)$ для $D_f = 0.62$.

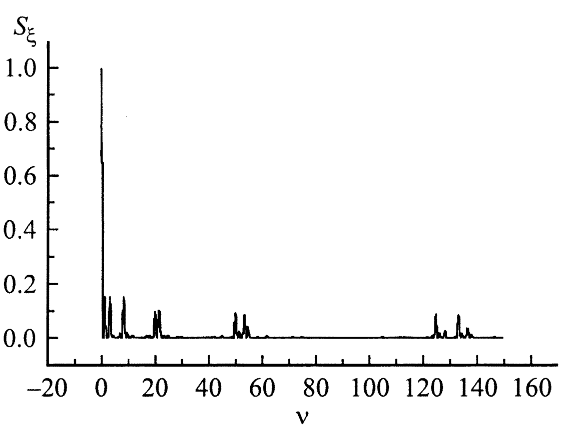

Рис. 5. $S_\xi(\nu)$ для $D_f = 0.75$.

Заключение

В данной работе рассчитаны спектры излучения, возникающие при участии фрактальных структур. Основу расчетов этих спектров составляли функции Кантора и преобразование Фурье–Стильтьеса.

Обычное переходное излучение возникает при прохождении заряженных частиц через границу двух сред с разной диэлектрической проницаемостью. Данная работа дала возможность увидеть влияние фрактальности переходного слоя на спектры переходного фрактального излучения. Структура спектров становится широкополосной и самоподобной. Как было показано, в спектрах появляется структурный фактор, который несет информацию о фрактальности границы между средами. Такой структурный фактор появляется и в других типах излучений при наличии соответствующих электродинамических структур (например, при дипольном излучении, сопровождающем переходной фрактальный процесс, при рассеянии на фрактальных решетках, при фрактальном обобщении излучения Смита–Парселла и при изменении диэлектрической проницаемости среды со времени по фрактальному закону).

Список литературы

[1] *Федер Е.* Фракталы. М.: Мир, 1991. 260 с.
[2] *Гинзбург В.Л., Цытович В.Н.* Переходное излучение и переходное рассеяние. М.: Наука, 1984. 360 с.
[3] *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. М.: Мир, 1965. Т. 1. 615 с.
[4] *Аллен К., Клуатр М.* Оптическое преобразование Фурье фракталов // Фракталы в физике, М.: Мир, 1988. С. 91–97.
[5] *Болотовский Б.М., Давыдов В.А., Рок В.Е.* // УФН. 1979. Т. 126. № 2. С. 311–321.