01

Асимптотика резонанса для двумерных волноводов, связанных через отверстие

© И.Ю. Попов, С.В. Фролов

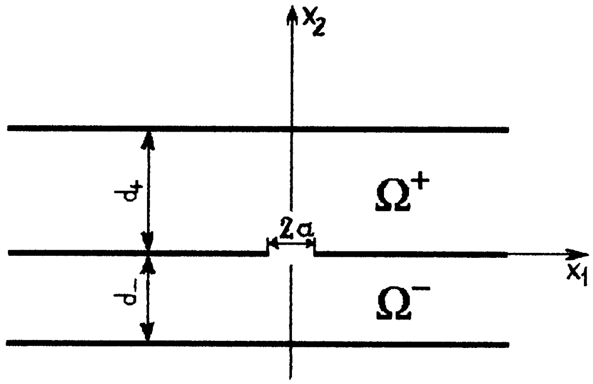
С.-Петербургский государственный институт точной механики и оптики (технический университет)

Поступило в Редакцию 28 декабря 1998 г.

Найдены главные члены асимптотического разложения резонанса (квазисобственной частоты) для волноводов, связанных через малое отверстие. На границе предполагается выполненным условие Дирихле. Проведено сравнение с полученными ранее оценками. Построение ведется методом согласования асимптотических разложений решений краевых задач.

Задача о связанных состояниях и резонансах в волноводах, соединенных малыми окнами, в последние годы вызывает повышенный интерес, в основном в связи с задачами наноэлектроники. В работах [1,2] с помощью вариационной техники доказано существование связанных состояний, близких к нижней границе непрерывного спектра, и получены их оценки при малой ширине окна связи. В статье [3] построена асимптотика данного собственного значения (по ширине отверстия). Однако вопрос об асимптотике резонансов оставался открытым, хотя ряд оценок (на физическом уровне строгости) был получен ранее [4]. В данной работе найден ответ на него. Построение ведется методом согласования асимптотических разложений решений краевых задач [5–7].

Рассмотрим задачу о резонансах в системе двух волноводов (см. рисунок) шириной d_+ и d_- соответственно, соединенных отверстием шириной $2a$, причем будем считать, что $d_+ > d_-$, а размер отверстия мал по сравнению с длиной волны. Для решения задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца построим асимптотику квазисобственной частоты $\lambda_a = k_a^2$ по параметру a вблизи нижней границы $\frac{\pi^2}{d_-^2}$ ветви непрерывного спектра. Отметим, что непрерывный спектр начинается



Геометрическая конфигурация системы. $d_\pm$ — ширина волновода $\Omega_\pm$, $2a$ — ширина отверстия связи. Указан выбор системы координат.

с точки $\frac{\pi^2}{d_+^2}$, $\frac{\pi^2}{d_+^2} < \frac{\pi^2}{d_-^2}$. Рассмотрим асимптотический ряд следующего вида:

$$\left(\frac{\pi^2}{d_-^2} - k_a^2\right)^{1/2} = \sum_{j=2}^{\infty} \sum_{i=0}^{[(j-1)/2]} k_{ji} a^j \left(\ln \frac{a}{a_0}\right)^i. \tag{1}$$

Здесь a_0 — характерная единица длины (например d_-).

Для нахождения коэффициентов k_{ij} в (1) воспользуемся методом согласования асимптотических разложений квазисобственных функций, имеющих вид

$$\psi_a(x) = \left(\frac{\pi^2}{d_-^2} - k_a^2\right)^{1/2} \sum_{j=0}^{\infty} a^j P_{j+1}\left(D_y, \ln \frac{a}{a_0}\right) G^-(x, y, k)\Big|_{y=0},$$

$$x \in \Omega^- \setminus S_{a^{1/2}}, \tag{2}$$

$$\psi_a(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{[(j-1)/2]} v_{ji}(x/a) a^j \left(\ln \frac{a}{a_0}\right)^i, \qquad x \in S_{2a^{1/2}}, \tag{3}$$

$$\psi_a(x) = -\left(\frac{\pi^2}{d_-^2} - k_a^2\right)^{1/2} \sum_{j=0}^{\infty} a^j P_{j+1}\left(D_y, \ln\frac{a}{a_0}\right) G^+(x,y,k)\Big|_{y=0},$$

$$x \in \Omega^+ \setminus S_{a^{1/2}}. \tag{4}$$

Здесь S_t — сфера радиуса t с центром, совпадающим с серединой отверстия, $v_{ji} \in W^1_{2,loc}(\Omega^+ \bigcup \Omega^-)$, P_m — некоторые полиномы от D_y, а $G^\pm$ — функции Грина для волноводов $\Omega^\pm$. Произведем согласование разложений (2) и (3), а также (3) и (4). Получаем следующие значения первых 4 коэффициентов k_{ij}:

$$k_{20} = \frac{\pi^3}{2d_-^3}, \tag{5}$$

$$k_{30} = 0, \tag{6}$$

$$k_{40} = \frac{\pi^4}{4d_-^2}\left(\frac{\pi}{d_+^2\sqrt{d_-^2 - d_+^2}}\right.$$
$$\left. - \frac{1}{2d_-}\left(g_{1n}^+\left(0, \frac{\pi}{d_-}\right) + g_{1n}^-\left(0, \frac{\pi}{d_-}\right)\right) + \frac{\pi}{8d_-^3}\right), \tag{7}$$

$$k_{41} = -\frac{\pi^5}{2d_-^5}, \tag{8}$$

где $g_{1n}^+(0, \frac{\pi}{d_-})$ и $g_{1n}^-(0, \frac{\pi}{d_-})$ — значения нормальных производных в точке $((0;0), \frac{\pi}{d_-})$ функций $g_1^+(x,k)$ и $g_1^-(x,k)$ соответственно, входящих в асимптотику нормальных производных функций Грина. Заметим, что первое слагаемое в (7) чисто мнимое. Оно и дает главную часть асимптотики мнимой части резонанса. Окончательно асимптотика квазисобственной частоты будет выглядеть следующим образом:

$$\lambda_a = \frac{\pi^2}{d_-^2} - k_{20}^2 a^4 - 2k_{20}\left(k_{40} + k_{41}\ln\frac{a}{a_0}\right)a^6$$
$$- \left(k_{40}^2 + 2k_{40}k_{41}\ln\frac{a}{a_0} + k_{41}^2\left(\ln\frac{a}{a_0}\right)^2\right)a^8 + o(a^8). \tag{9}$$

Рассмотрим случай $d_- = d_+ = d$. В этой ситуации описанная выше схема даст уже не асимптотику резонанса (квазисобственной частоты), а несколько первых членов асимптотического разложения собственной частоты, близкой к границе непрерывного спектра (первый член этой асимптотики был найден в [3]). Теперь функции G^+ и G^- будут совпадать, а значения функции ψ_a будут отличаться в областях $\Omega^- \setminus S_{a^{1/2}}$ и $\Omega^+ \setminus S_{a^{1/2}}$ лишь знаками. Учитывая это, получаем следующие значения k_{ij}:

$$k_{20} = \frac{\pi^3}{d^3}, \tag{10}$$

$$k_{30} = 0, \tag{11}$$

$$k_{40} = \frac{\pi^4}{d^3}\left(\frac{3\pi}{16d^2} - g_{1n}\left(0, \frac{\pi}{d}\right)\right), \tag{12}$$

$$k_{41} = -\frac{\pi^5}{d^5}. \tag{13}$$

Выражение для λ_a будет даваться той же формулой (9) с другими значениями коэффициентов (10)–(13).

Работа частично поддержана РФФИ и Международным научным фондом.

И.Ю. Попов благодарит центр теоретической физики (Лумини, Марсель, Франция), где часть работы была выполнена, за гостеприимство и поддержку.

Список литературы

[1] *Exner P., Vugalter S.* // Ann. Inst. Henri Poincare. 1996. V. 65. N 1. P. 109–123.
[2] *Exner P., Vugalter S.* // J. Phys. A: Math. Gen. 1997. V. 30. P. 7863–7878.
[3] *Попов И.Ю.* // Письма в ЖТФ. 1999. Т. 25. В. 3. С. 57–59.
[4] *Kunze C.* // Phys. Rev. B. 1993. V. 48. N 19. P. 14338–14346.
[5] *Ильин А.М.* Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989. 250 с.
[6] *Гадыльшин Р.Р.* Алгебра и анализ. 1992. Т. 4. № 2. С. 88–115.