01;03

Характерное время развития неустойчивости сильно заряженной маловязкой капли

© С.О. Ширяева

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

Поступило в Редакцию 11 октября 1999 г.

Выведено и решено нелинейное интегральное уравнение, описывающее эволюцию во времени сфероидальной деформации маловязкой капли, неустойчивой по отношению к собственному заряду.

Вопрос о возможности теоретической оценки характерного времени развития неустойчивости сильно заряженной капли представляет интерес в связи с многочисленными приложениями обсуждаемого феномена в различных разделах технической физики и геофизики, а также в связи со сложностью прямого наблюдения процесса развития неустойчивости в эксперименте. В многочисленных экспериментах по проверке критерия Рэлея устойчивости сильно заряженной капли (см. литературу, указанную в [1]) наблюдатели фиксируют лишь начальное и конечное состояния капли. В [2–4] проведены теоретические оценки времени развития неустойчивости сильно заряженной капли идеальной жидкости, когда характерный временно́й масштаб процесса развития неустойчивости определялся лишь особенностями взаимодействия величины деформации неустойчивой капли со степенью закритичности заряда капли, зависящей от величины деформации. Использование той же методики расчета и тех же исходных физических посылок, что и в [2–3], лишь с дополнительным учетом снижения за счет влияния вязкого затухания величины инкремента неустойчивости капиллярных движений жидкости в сферической и сфероидальной каплях, согласно [5,6], позволяет оценить и влияние вязкости.

1. Спектр капиллярных колебаний изолированной капли проводящей жидкости радиуса R, с зарядом Q и коэффициентом поверхностного

натяжения σ определяется выражением [7]:

$$\frac{\omega^2}{n} = \frac{\sigma}{\rho \cdot R^3} n(n-1)\left[(n+2) - W\right], \qquad W = \frac{Q^2}{4\pi \cdot \sigma \cdot R^3}, \qquad (1)$$

где n — номер моды капиллярных колебаний; ρ — плотность жидкости. Из (1) легко видеть, что при $W > 4$ становится неустойчивой основная мода ($n = 2$) капиллярных колебаний капли, амплитуда которой ζ начинает расти со временем по закону $\zeta \sim \exp(\gamma t)$, где

$$\gamma = \left\{\frac{2\sigma}{\rho R^3}(W-4)\right\}^{1/2}.$$

Если жидкость не идеальная и обладает кинематической вязкостью ν_0, а радиус капли R, плотность жидкости ρ и коэффициент ее поверхностного натяжения σ таковы, что $\nu_0(\rho^{-1}\sigma^{-1}R)^{1/2} \ll 1$ и каплю можно считать маловязкой, то капиллярные движения основной моды капли затухают по экспоненциальному же закону с декрементом:

$$\eta_s = \nu\gamma k(W), \qquad (2)$$

$$k(W) \equiv \left[1 + \frac{4}{W+1} + \frac{1}{2(W-4)}\right].$$

Эта формула получена путем аппроксимации результатов численного анализа дисперсионного уравнения, выведенного в [5], и справедлива при $\nu \cdot k(W) < 1$. Учтем, что и при $W = 4$ капля уже неустойчива по отношению к бесконечно малым деформациям ее поверхности вида $\zeta = \zeta_0 P_2(\cos\theta)$, соответствующим виртуальному возбуждению основной моды капиллярных колебаний. Возбуждение подобных капиллярных колебаний может иметь причиной хотя бы тепловое движение молекул жидкости. В этом случае амплитуда ζ_0 определяется выражением $\zeta_0 = (\sigma/k \cdot T)^{1/2}$, где k — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура жидкости. Тепловое возбуждение капиллярной волны $\sim P_2(\cos\theta)$ соответствует виртуальному вытягиванию капли в сфероид с эксцентриситетом $e_0 = (3 \cdot \zeta_0/R)^{1/2}$. Но для сфероида критическое для реализации неустойчивости капли по отношению к собственному заряду значение параметра W является убывающей функцией эксцентриситета [8]. В линейном по квадрату эксцентриситета e^2 приближении эта функция имеет вид [8]:

$$W = W_* = 4(1 - \alpha \cdot e^2). \qquad (3)$$

Поэтому при $W = 4$ для капли, претерпевшей виртуальное (тепловое) искажение формы $\zeta = \zeta_0 \cdot P_2(\cos\theta)$, амплитуда такого возмущения начнет расти со временем по экспоненциальному закону с инкрементом

$$\alpha_0 = \left\{ \frac{8\sigma}{\rho R^3} \alpha e_0^2 \right\}^{1/2}.$$

Но увеличение амплитуды возмущения $\sim P_2(\cos\theta)$ соответствует дальнейшему вытягиванию капли, увеличению ее эксцентриситета, снижению согласно (3), критического значения неустойчивости и, следовательно, приводит к увеличению инкремента неустойчивости.

Вместе в тем наличие у капли сфероидальной деформации приводит к появлению зависимости декремента затухания основной моды от величины этой деформации (от величины квадрата эксцентриситета e^2), имеющей, согласно аппроксимации результатов численных расчетов, проведенных в [6], вид

$$\eta_{sd} = \eta_s \left[1 - \frac{2}{1 + 0.8\nu} e^2 \right],$$

где η_s определено соотношением (2).

Выписывая последовательность амплитуд растущих возмущений в близкие моменты времени, можно получить нелинейное интегральное уравнение, описывающее рост безразмерной амплитуды $X \equiv \zeta/R$ со временем:

$$X(t) = X_0 \cdot \exp\left\{ \lambda \int_0^t X(t)^{-1/2} \left\{ aX(t)^2 + bX(t) - c \right\} dt \right\}, \tag{4}$$

$$\lambda \equiv \left\{ \frac{24\alpha\sigma}{\rho R^3} \right\}^{1/2}, \qquad a \equiv 3\varkappa(\nu) \cdot \nu, \qquad b \equiv 1 - 3\nu + \frac{\varkappa(\nu) \cdot \nu}{24\alpha},$$

$$c \equiv \frac{\nu}{24\alpha}, \qquad \varkappa(\nu) \equiv \frac{6}{1 + 0.8\nu},$$

решение которого в используемом приближении малой вязкости имеет вид

$$X(t) = X_0 \left\{ 1 - \frac{1}{2} \lambda \delta(\nu) t \right\}^{-2}; \quad \delta(\nu) \equiv 1 - \nu \left[3 - \frac{1}{4\alpha(1 + 0.8\nu)} \right]. \tag{5}$$

Полученная функция $X(t)$, описывающая временно́й рост амплитуды сфероидальной деформации неустойчивой маловязкой капли, имеет качественно такой же вид, что и для капли идеальной жидкости [2]. Отличие лишь в наличии для вязкой капли множителя $\delta(\nu) < 1$ для любых допустимых вязкостей (которые должны быть малыми $\nu \ll 1$, ибо это обстоятельство использовалось при получении выражения (4)). При $\nu = 0$ получим $\delta(\nu) = 1$ и соотношение (5) переходит в полученное в [2] выражение для временно́го роста сфероидальной деформации капли идеальной жидкости.

Видно, что учет вязкости приводит к увеличению характерного временно́го масштаба развития неустойчивости по сравнению с каплей невязкой (идеальной) жидкости в $\delta(\nu)$ раз. Если для безразмерной вязкости ν принять $\nu = 0.1$ и взять, согласно [2,8], $\alpha = 1/3$, то получим $\delta \approx 1.3$.

Заключение. Полученный результат с качественной стороны достаточно очевиден: a priori ясно, что влияние вязкости должно проявляться в увеличении характерного времени реализации неустойчивости. Но впервые появилась возможность количественной оценки этого феномена в условиях существенно нелинейного процесса нарастания во времени весьма малой тепловой деформации формы капли, находящейся на пороге устойчивости.

Список литературы

[1] *Григорьев А.И., Ширяева С.О.* // ЖТФ. 1991. Т. 61. В. 3. С. 19–28.
[2] *Ширяева С.О., Григорьева И.Д.* // ПЖТФ. 1994. Т. 20. В. 6. С. 1–5.
[3] *Ширяева С.О., Григорьев А.И., Григорьева И.Д.* // ЖТФ. 1995. Т. 65. В. 9. С. 39–45.
[4] *Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И.* // ПЖТФ. 1999. Т. 25. В. 17. С. 41–45.
[5] *Ширяева С.О., Муничев М.И., Григорьев А.И.* // ЖТФ. 1996. Т. 66. В. 7. С. 1–8.
[6] *Ширяева С.О.* // ЖТФ. 1998. Т. 68. В. 4. С. 20–27.
[7] *Rayleigh (Strutt J.W., Lord)* // Phil. Mag. 1882. V. 14. P. 184–188.
[8] *Григорьев А.И.* // ЖТФ. 1985. Т. 55. В. 7. С. 1272–1278.