

01

Оценка параметров составляющих спектра нелинейных систем второго порядка

© В.А. Двинских, С.В. Фролов

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

Поступило в Редакцию 14 октября 1999 г.

Рассмотрена нелинейная консервативная система Ляпунова и получено удовлетворительное соответствие между аналитическим решением и результатами численного анализа. Обсуждены спектры колебаний неавтономной нелинейной системы, близкой к Ляпуновской.

Известно [1], что дискретное преобразование Фурье обладает низкой разрешающей способностью при выявлении мелких деталей спектра. Использование для исследования спектра колебаний параметрических методов [2], требующих предварительной последовательности отсчетов решений, также не позволяет выделить из квазипериодических колебаний близкие по частоте составляющие. Поэтому в работе используется методика вычисления параметров составляющих спектра, основанная на аппроксимации последовательности отсчетов тригонометрическим полиномом первого порядка [3] и позволяющая повысить разрешающую способность.

Рассмотрим уравнение консервативной нелинейной системы Ляпунова

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x + x^3 = 0, \quad (1)$$

перейдем к новому аргументу

$$t \cong \tau(1 + h_2c^2 + h_4c^4 + \dots), \quad (2)$$

при h_2, h_4, \dots — постоянных, подлежащих вычислению. После подстановки (2) в (1) имеем

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + (x + x^3)(1 + h_2c^2 + h_4c^4 + \dots) = 0. \quad (3)$$

Для этого уравнения ищем решение в виде [4] ряда

$$x(\tau) = c \cos \tau + c^3 x_3(\tau) + c^5 x_5(\tau) + \dots, \quad (4)$$

где $x_3(\tau), x_5(\tau), \dots$ — периодические функции τ периода 2π , удовлетворяющие начальным условиям

$$x_3(0) = x_5(0) = \dots = 0; \quad \left. \frac{dx_3}{d\tau} \right|_0 = \left. \frac{dx_5}{d\tau} \right|_0 = \dots = 0. \quad (5)$$

Тогда

$$\frac{d^2 x_3}{d\tau^2} + x_3 = \left(\frac{3}{4} - 2h_2 \right) \cos \tau + \frac{1}{4} \cos 3\tau, \quad (6)$$

условие периодичности, т. е. коэффициент при $\cos \tau$, дает

$$h_2 = 3/8, \quad (7)$$

после чего из уравнения (6), принимая во внимание начальные условия (5), получим

$$x_3(\tau) = \frac{1}{32} (\cos \tau - \cos 3\tau). \quad (8)$$

Для $x_5(\tau)$ имеем уравнение

$$\frac{d^2 x_5}{d\tau^2} + x_5 = \left(-2h_4 + \frac{57}{128} \right) \cos \tau + \frac{3}{16} \cos 3\tau - \frac{3}{128} \cos 5\tau, \quad (9)$$

из которого находим

$$h_4 = 57/256. \quad (10)$$

Ограничиваясь полученными решениями, имеем

$$x(\tau) \cong x_1 \cos \tau - x_3 \cos 3\tau - \frac{c^5}{1024} \cos 5\tau, \quad (11)$$

где

$$x_1 = c + \frac{c^3}{32} + \frac{23c^5}{1024}, \quad x_3 = \frac{c^3}{32} - \frac{3c^5}{128}$$

с периодом

$$T \cong 2\pi \left(1 - \frac{3c^2}{8} - \frac{57c^4}{254} \right). \quad (12)$$

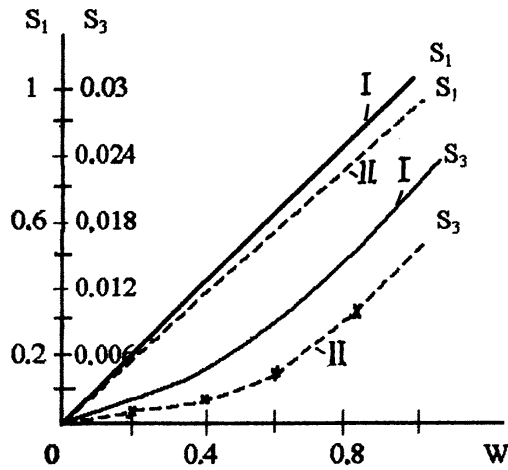


Рис. 1. Зависимости численного и аналитического решений уравнения Ляпунова для первой и третьей гармоники (где по оси абсцисс W отложены начальные условия, а по оси ординат S_1 и S_3 — значения амплитуды соответственно первой и третьей гармоники); I — расчет, II — эксперимент.

Кроме того, произведено численное решение уравнения (1) по методу Рунге–Кутты четвертого порядка с шагом 0.05 для различного начального условия W . На рис. 1 сплошными линиями показаны аналитические зависимости амплитуд первой и третьей гармоник от W , а пунктирными линиями — результаты численного решения. Оценка показывает, что между экспериментом и теорией результаты близки и по периоду. В [5] приведено уравнение Фейгенбаума

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \mu \frac{dx}{dt} + x^3 = b \sin t \quad (13)$$

при $\mu \ll 1$ и $b < 1$ постоянных коэффициентах.

На рис. 2 слева приведены временные диаграммы при $b = 0.9$, $\mu = 0.049$, 0.0491, 0.0492, а справа соответствующие спектры. Из анализа временных зависимостей следует, что в связи с неустойчивостью переходных процессов в нелинейной системе возникает амплитудная модуляция, которая в спектре приводит к появлению боковых составля-

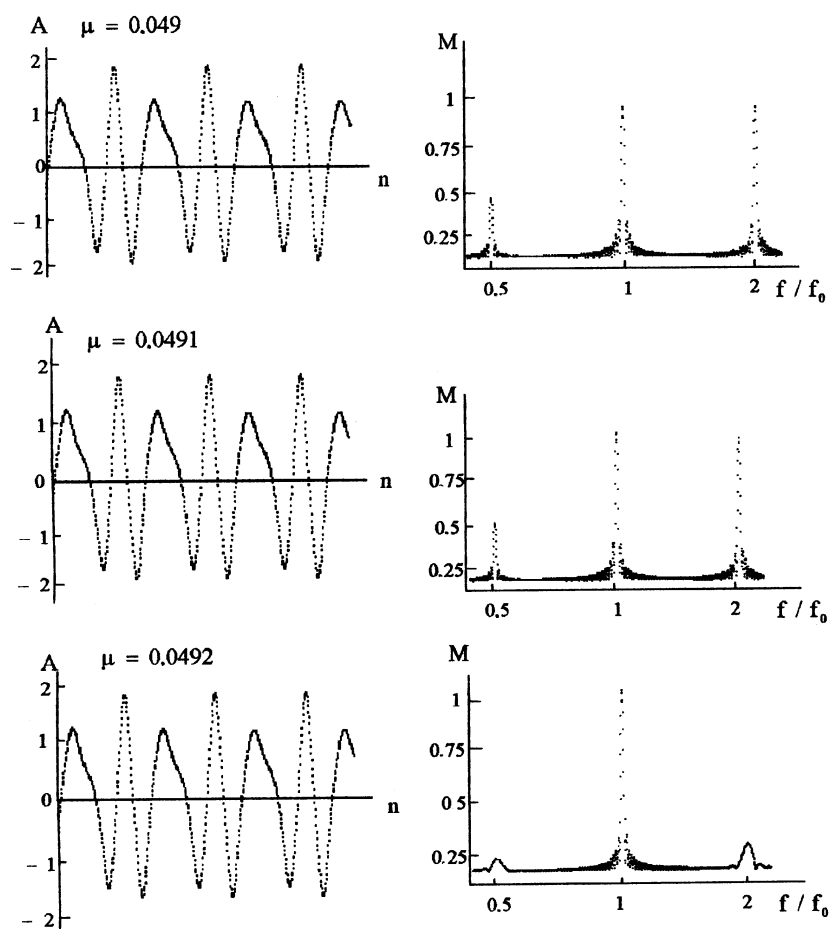


Рис. 2. Слева приведена временная диаграмма решения уравнения Фейгенбаума при $b = 0.9$ и различных значениях параметра μ (где A — модуль амплитуды, а n — порядковый номер отсчета); а справа спектр (где по оси абсцисс отложено f/f_0 — относительное значение частоты при f_0 частоте внешнего сигнала, а по оси ординат — M модуль амплитуды спектра).

ющих. Уровень этих составляющих уменьшается с ростом μ , причем левая составляющая представляет собой удвоение периода внешнего сигнала, а правая — второй гармоники.

Список литературы

- [1] *Дмитриев А.С., Кислов В.Я.* Стохастические колебания в радиофизике и электронике. М.: Наука, 1989. 280 с.
- [2] *Марпл С.Л.* Цифровой спектральный анализ и его приложения. / Пер. с англ. М.: Мир, 1990. 584 с.
- [3] *Двинских В.А.* // ЖТФ. 1992. Т. 63. В. 12. С. 168–170.
- [4] *Малкин И.Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: ГИТТЛ, 1956. 492 с.
- [5] *Feigenbaum M.I.* // Los Alamos Science. 1980. V. 1. N 1. P. 4–27.