01

Квантование натуральных систем

© *А.Г. Чирков, И.В. Казинец*

С.-Петербургский государственный технический университет

Поступило в Редакцию 26 ноября 1999 г.

Получены новые правила квантования классических систем, обобщающие традиционные и переходящие в них в случае существования перехода к декартовым координатам. Найдено уравнение, обобщающее уравнение Шредингера на произвольные натуральные системы. Принцип минимальной связи (сильный принцип эквивалентности) позволяет распространить это уравнение на произвольные искривленные пространства.

Термин "квантование" возник в 20-е гг. в физической литературе и с самого начала употреблялся в двух смыслах: во-первых, это дискретизация множества значений той или иной величины; во-вторых, это построение, исходя из классической механической системы с c-числовой функцией Гамильтона $H(p,q,t)$, оператора Гамильтона $\hat{H}(\hat{p},\hat{q},t)$, где $\hat{p}$, $\hat{q}$ — операторы, сопоставляемые с классическими каноническими переменными. В предлагаемой работе термин "квантование" употребляется в этом втором значении.

Традиционная схема квантования Вейля–Гейзенберга применима к классическим системам только с плоским фазовым пространством и только в декартовых координатах [1]. В общем случае задача квантования не является тривиальной и однозначной, так как существует много способов выбора вида оператора $\hat{p}$ и расстановки операторов $\hat{p}$ и $\hat{q}$ в $\hat{H}(\hat{p},\hat{q},t)$.

Рассмотрим натуральную механическую систему — тройку (M,T,V), где M — гладкое многообразие (пространство положений), T — риманова метрика на M (положительно определенная квадратичная форма — кинетическая энергия), V — гладкая функция на M (потенциал силового поля) [2]. Движение такой системы — гладкие отображения q: $R^1 \to M$, являющиеся экстремалями функционала действия с функцией Лагранжа $L = T - V$. В локальных координатах функция Лагранжа имеет вид

$$L = \frac{1}{2} g_{ik} \dot{q}^i \dot{q}^k - V(q), \tag{1}$$

где по повторяющимся индексам подразумевается суммирование от 1 до n.

Функция Гамильтона, соответствующая (1), равна

$$H = \frac{1}{2} g^{ik} \pi_i \pi_k + V(q), \tag{2}$$

где $\pi_i = g_{ik} \dot{q}^k$ — обобщенный импульс. Локальные координаты q^i, π_i являются каноническими на касательном расслоении T^*M гладкого многообразия M. В случае нетривиальных значений $g_{ik} \neq \delta_{ik}$ традиционная схема квантования становится существенно неоднозначной. Однако существует способ сделать эту процедуру вполне определенной.

Действительно, традиционная схема решения квантовых задач в криволинейных координатах выглядит следующим образом. Сначала производится квантование классической системы в декартовых координатах, в результате чего (в шредингеровском координатном представлении) кинетической энергии $T = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)$ сопоставляется оператор $\hat{T} = -\hbar^2 \Delta / 2m$ (где Δ — оператор Лапласа–Бельтрами, определенный на касательном расслоении гладкого многообразия M), а затем производится пересчет в криволинейные координаты q. Получающаяся волновая функция $\psi(q) = \psi(x(q))$ (x — совокупность декартовых координат) не является амплитудой вероятности и не описывает никаких физических состояний, так как для амплитуды вероятности при переходе к криволинейным координатам должно выполняться соотношение

$$l = \int\limits_{R^n} |\psi(x)|^2 dx = \int\limits_{M} |\psi(x(q))|^2 g^{1/2} dq = \int\limits_{M} |\tilde{\psi}(q)|^2 dq, \tag{3}$$

где $dx = dx^1 dx^2 \ldots dx^n$, $dq = dq^1 dq^2 \ldots dq^n$, $q = det|g_{ik}|$ [3]. Из (3) следует связь амплитуды вероятности с $\psi(x(q))$:

$$\tilde{\psi}(q) = g^{1/4} \psi(x(q)). \tag{4}$$

Теперь очевидно, что следует выводить уравнение сразу для амплитуды вероятности $\tilde{\psi}(q)$. Оно имеет следующий вид:

$$\left[\left(g^{-\frac{1}{4}} \frac{\partial}{\partial q^i} g^{1/4} \right) g^{ik} \left(g^{1/4} \frac{\partial}{\partial q^k} g^{-1/4} \right) \right] \tilde{\psi}(q) + \frac{2m}{\hbar^2} \left[E - V(q) \right] \tilde{\psi}(q) = 0$$

или

$$\tilde{\Delta}\tilde{\psi}(q) + \frac{2m}{\hbar^2}\left[E - V(q)\right]\tilde{\psi}(q) = 0, \tag{5}$$

где $\tilde{\Delta} = g^{1/4}\Delta g^{-1/4}$.

Симметрия (самосопряженность) оператора $\tilde{\Delta}$ относительно скалярного произведения $(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) = \int \overline{\tilde{\varphi}(q)}\tilde{\psi}(q)dq$ (черта означает комплексное сопряжение) очевидна из цепочки равенств $(\tilde{\Delta}\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) = (\Delta\varphi, \psi) = (\varphi, \Delta\psi) = (\tilde{\varphi}, \tilde{\Delta}\tilde{\psi})$.

Введем далее операторы проекции обобщенного импульса

$$\hat{\pi}_i = -i\hbar g^{-1/4}\frac{\partial}{\partial q^i}g^{1/4}, \tag{6}$$

удовлетворяющие коммутационным соотношениям

$$\left[\hat{\pi}_e q^k\right] = -i\hbar\delta_e^k, \qquad [\hat{\pi}_i, \hat{\pi}_k] = 0, \qquad \left[q^i, q^k\right] = 0. \tag{7}$$

При этом сопряженный оператор

$$\hat{\pi}_i^* = -i\hbar g^{1/4}\frac{\partial}{\partial q^i}g^{-1/4}, \tag{8}$$

так что оператор кинетической энергии имеет вид

$$\hat{T} = -\frac{\hbar^2}{2m}\hat{\pi}_i g^{ik}\hat{\pi}_k^*. \tag{9}$$

Перестановочные соотношения (7) алгебраически тождественны обычным перестановочным соотношениям Гейзенберга. Однако операторы $\hat{\pi}_i$, q^k определяют представление, унитарно не эквивалентное представлению Шредингера. Теоремы единственности Реллиха–Диксьмье и фон Неймана–Стоуна [4] в этом случае не имеют места, так как операторы $\hat{\pi}_i$ не симметрические (самосопряженные).

Оператор кинетической энергии как оператор физической величины является самосопряженным. Обобщенный импульс, вообще говоря, не является физической величиной и поэтому не обязан представляться самосопряженным оператором.

Оператор обобщенного импульса, соответствующий радиальной координате (оператор радиального имульса), имеет вид

$$\hat{\pi}_r = \frac{\partial}{\partial r} + \frac{n-1}{2r},$$

где n — размерность многообразия M с областью определения $D(\hat{\pi}_r) = \left\{\tilde{\psi} \in L^2((0, \infty), dr);\ \tilde{\psi}' + ((n-1)/2r)\tilde{\psi} \in L^2((0, \infty), dr\right\}$.

Этот результат совпадает с соотношением (7.8.2) из [5], где вид оператора радиального импульса постулирован.

Уравнение (5) содержит возможность обобщений. Действительно, с точки зрения теории многообразий даже плоское пространство вовсе не просто: по сравнению с обычным дифференцируемым многообразием оно имеет гораздо более богатую структуру, ибо на нем задана аффинная связность. В декартовой системе координат присутствие этой связности не ощущается, так как символы Кристофеля обращаются в нуль. Однако если физические законы сформулированы в плоском пространстве на языке криволинейных координат, то связность становится наблюдаемой. В большинство так записанных законов входят символы Кристофеля, а не тензор Римана, следовательно их уравнения выглядят одинаково независимо от того, плоско многообразие или искривлено. Таким образом, естественно постулировать, что форма уравнения Шредингера (5) для искривленных многообразий, на которых не существует глобальной декартовой системы координат, та же, что и в криволинейных координатах в плоском многообразии. Этот постулат — аналог принципа минимальной связи в общей теории относительности [6].

Кроме того, используя методы, развитые в [7,8], можно обобщить уравнение (5) на многообразие с нетривиальной топологией.

Список литературы

[1] *Березин Ф.А.* // Изв. АН СССР. Сер. Матем. 1974. Т. 38. С. 1116.

[2] *Козлов В.В.* Симметрия, топология и резонансы в гамильтоновой механике. Ижевск, 1995. 429 с.

[3] *Feller W.* An introduction to probability theory and its applications. Neq York, 1965.

[4] *Hart N.* Geometric quantization in action. Dordrecht: Holland ets, 1983.

[5] *Richtmyer R.D.* Principles of advanced mathematical physics. New York, 1978. V. 1,2.

[6] *Shutz B.* Geometric methods of mathematical physics. Moscow: Mir, 1984.

[7] *Goncharov Yu.P., Yarevskaya J.V.* // Mod. Phys. Lett. 1994. V. A9. P. 3175–3180.

[8] *Goncharov Yu.P.* // Phys. Lett. 1997. B398. P. 32–40.