01;03

Критерии жесткой неустойчивости плоской поверхности диэлектрической жидкости во внешнем электрическом поле

© Н.М. Зубарев, О.В. Зубарева

Институт электрофизики УрО РАН, Екатеринбург

Поступило в Редакцию 8 декабря 1999 г.

Рассмотрено околокритическое поведение свободной поверхности идеальной диэлектрической жидкости во внешнем электрическом поле. Получена система амплитудных уравнений, описывающих нелинейное взаимодействие трех стоячих волн, образующих гексагональную структуру. В рамках этих уравнений сформулированы достаточные интегральные критерии жесткого возбуждения неустойчивости плоской поверхности среды.

Известно [1], что плоская поверхность диэлектрической жидкости в нормальном электрическом поле становится неустойчивой, если напряженность поля E превысит критическое значение

$$E_c^2 = \frac{8\pi\varepsilon(\varepsilon+1)}{(\varepsilon-1)^2}\sqrt{g\alpha\rho},$$

где g — ускорение поля тяжести, α — коэффициент поверхностного натяжения, ρ — плотность среды, а ε — ее диэлектрическая проницаемость. При малых надкритичностях $\delta = (E^2 - E_c^2)/E_c^2$ нарастают возмущения с волновыми числами, близкими к $k_0 = \sqrt{g\rho/\alpha}$, причем нелинейное взаимодействие между стоячими волнами, волновые векторы которых образуют углы, кратные $\pi/3$, приводит систему к состоянию, обладающему гексагональной структурой [2,3]. Важно отметить, что образование волнистого рельефа поверхности возможно и в докритической области полей (т.е. при $\delta < 0$), что характерно для жесткого режима возбуждения. В настоящей работе мы получим ряд достаточных критериев жесткой неустойчивости плоской поверхности жидкого диэлектрика, обусловленной трехволными процессами.

Рассмотрим потенциальное движение идеальной диэлектрической жидкости, ограниченной свободной поверхностью $z = \eta(x,y,t)$, во внешнем электрическом поле, направленном по оси z. Потенциал скорости жидкости Φ и потенциалы электрического поля в среде φ и в вакууме φ' удовлетворяют уравнениям Лапласа

$$\Delta\Phi = 0, \quad \Delta\varphi = 0, \quad \Delta\varphi' = 0.$$

Функции $\eta(x, y, t)$ и $\psi(x, y, t) = \Phi|_{z=\eta}$ являются канонически сопряженными величинами [3,4], так что уравнения движения могут быть записаны в гамильтониановой форме:

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\delta H}{\delta\eta}, \qquad \frac{\partial\eta}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta\psi},$$

причем гамильтониан

$$H = \int\limits_{z\leqslant\eta} \frac{(\nabla\Phi)^2}{2} d^3r - \int\limits_{z\geqslant\eta} \frac{(\nabla\varphi')^2}{8\pi\rho} d^3r - \int\limits_{z\leqslant\eta} \frac{\varepsilon(\nabla\varphi)^2}{8\pi\rho} d^3r$$
$$+ \int \left[\frac{g\eta^2}{2} + \frac{\alpha}{\rho}\left(\sqrt{1 + (\nabla\eta)^2} - 1\right)\right] d^2r$$

с точностью до констант совпадает с полной энергией системы. Система уравнений замыкается граничными условиями:

$$\varphi' \to -Ez, \qquad z \to \infty,$$

$$\varphi \to -\varepsilon^{-1}Ez, \qquad z \to -\infty,$$

$$\Phi \to 0, \qquad z \to -\infty,$$

$$\varphi = \varphi', \qquad z = \eta,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \varepsilon^{-1}\frac{\partial\varphi'}{\partial n}, \qquad z = \eta,$$

где ∂/∂_n обозначает нормальную производную.

Будем считать характерные углы наклона поверхности $|\nabla_\eta|$ малыми. Тогда, переписывая гамильтониан в виде поверхностного интеграла с помощью формулы Грина, а затем раскладывая подынтегральное выражение в ряд по каноническим переменным η и ψ, получим с точностью до членов более высокого порядка малости:

$$H = \frac{1}{2}\int \left[\psi\hat{k}\psi + g\eta^2 + \alpha\rho^{-1}(\nabla\eta)^2\right] d^2r$$

$$- \frac{E^2(\varepsilon-1)^3}{8\pi\rho\varepsilon(\varepsilon+1)^2}\int\left[\frac{(\varepsilon+1)}{(\varepsilon-1)}\eta\hat{k}\eta - \eta(\nabla\eta)^2 + \eta(\hat{k}\eta)^2\right] d^2r, \qquad (1)$$

где $\hat{k}$ — двумерный интегральный оператор с разностным ядром, фурье-образ которого равен модулю волнового вектора $(\hat{k}e^{ikr}) = |\mathbf{k}|e^{ikr})$. Перейдем к огибающим с помощью замен:

$$\eta(\mathbf{r},t) = \frac{2(\varepsilon+1)}{3k_0(\varepsilon-1)}\sum_{j=1}^{3} A_j(x_j,y_j,t)\exp(i\mathbf{k}_j\mathbf{r}) + (\text{к.с.}),$$

$$\psi(\mathbf{r},t) = \frac{2(\varepsilon+1)}{3k_0^2(\varepsilon-1)}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial A_j(x_j,y_j,t)}{\partial t}\exp(i\mathbf{k}_j\mathbf{r}) + (\text{к.с.}),$$

где волновые векторы $\mathbf{k}_j$, для которых $|\mathbf{k}_j| = k_0$, повернуты относительно друг друга на угол $2\pi/3$, а переменные x_j и y_j образуют ортогональные системы координат, оси абсцисс которых сонаправлены с волновыми векторами $\mathbf{k}_j$. Подобное представление для функций η и ψ соответствует гексагональной структуре возмущений поверхности. Подставляя выражения для η и ψ в (1) и проведя необходимые усреднения, получаем после масштабирования

$$\mathbf{r} \to \frac{\mathbf{r}}{\sqrt{2}k_0}, \quad t \to \frac{t}{\sqrt{2gk_0}}, \quad H \to \frac{8g}{9k_0^2}\frac{(\varepsilon+1)^2}{(\varepsilon-1)^2}H$$

следующее выражение для усредненного гамильтониана:

$$H = \int\left[\sum_{j=1}^{3}(|A_j|_t^2 + |\hat{L}_jA_j|^2 - \delta|A_j|^2) - A_1A_2A_3 - A_1^*A_2^*A_3^*\right]d^2r. \qquad (2)$$

Здесь введены дифференциальные операторы: $\hat{L}_j = \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{i}{2}\frac{\partial^2}{\partial y_j^2}$. Соответствующие этому гамильтониану уравнения для комплексных амплитуд A_j $(j = 1, 2, 3)$ имеют вид

$$\frac{\partial^2 A_j}{\partial t^2} = \delta A_j + \hat{L}_j^2 A_j + \frac{A_1^*A_2^*A_3^*}{A_j^*}. \qquad (3)$$

Построим для данных уравнений, описывающих нелинейное взаимодействие трех стоячих волн, достаточные критерии неограниченного роста амплитуд A_j за конечное время, иными словами — коллапса. Введем для этого неотрицательную величину

$$X = \sum_{j=1}^{3} X_j, \quad X_j(t) = \int |A_j|^2 d^2 r.$$

При помощи уравнений (3) и выражения для гамильтониана (2) можно получить соотношение:

$$X_{tt} + 3H = -\delta X + \sum_{j=1}^{3} \int \left[5|A_j|_t^2 + |\hat{L}_j A_j|^2\right] d^2 r. \tag{4}$$

Используя последовательно интегральное неравенство Буняковского и алгебраическое неравенство Коши, находим, что

$$\sum_{j=1}^{3} \int |A_j|_t^2 d^2 r \geqslant \sum_{j=1}^{3} X_{jt}^2/(4X_j) \geqslant X_t^2/(4X).$$

Учитывая также, что $\int |\hat{L}_j A_j|^2 d^2 r \geqslant 0$, получим из (4) следующее дифференциальное неравенство:

$$X_{tt} + 3H \geqslant 5X_t^2/(4X) - \delta X. \tag{5}$$

Следует отметить, что аналогичные неравенства возникают при получении достаточных критериев коллапса для нелинейного уравнения Клейна–Гордона [5], различных модификаций уравнения Буссинеска [6] и др. (см., например, [7] и ссылки там).

Введение новой функции $Y = X^{-1/4}$ позволяет переписать (5) в форме второго закона Ньютона:

$$Y_{tt} \leqslant -\frac{\partial P(Y)}{\partial Y}, \quad P(Y) = -\frac{1}{8}\left(\delta Y^2 + HY^6\right), \tag{6}$$

где Y играет роль координаты "частицы", P — ее потенциальной энергии. Пусть скорость "частицы" Y_t отрицательная (в этом случае

$X_t > 0$). Тогда, домножая (6) на Y_t, получим:

$$E_t(t) \geqslant 0, \quad E(t) = Y_t^2/2 + P(Y),$$

т. е. "частица" набирает энергию при движении. Понятно, что достаточным критерием обращения величины Y в нуль и соответственно величины X в бесконечность за конечное время будет условие, что "частица" не встретит потенциального барьера, даже если $E_t = 0$, что соответствует знаку равенства в (6). Тогда коллапс имеет место:

при $\delta < 0$ и $H > 0$, если $Y(t_0) < |\delta|^{1/4}/(3H)^{1/4}$ и $12E(t_0) \leqslant |\delta|^{3/2}/(3H)^{1/2}$;

при $\delta < 0$ и $H > 0$, если $12E(t_0) > |\delta|^{3/2}/(3H)^{1/2}$;

при $\delta < 0$ и $H \leqslant 0$;

при $\delta \geqslant 0$, если $E(t_0) > 0$,

где $t = t_0$ соответствует начальному моменту времени. Первые три условия относятся к случаю докритических внешних полей $E > E_c$, когда плоская поверхность диэлектрической жидкости устойчива в линейном приближении. В таком случае возбуждение неустойчивости носит жесткий характер. Отметим также, что после этапа степенного роста амплитуд, описываемого уравнениями (3), последует стабилизация неустойчивости за счет старших нелинейностей.

Авторы признательны Е.А. Кузнецову за стимулирующие обсуждения, а также Н.Б. Волкову и А.М. Искольдскому за интерес к работе.

Список литературы

[1] *Шлиомис М.И.* // УФН. 1974. Т. 112. С. 427.
[2] *Gailitis A.* // J. Fluid. Mech. 1977. V. 82. P. 401.
[3] *Кузнецов Е.А., Спектор М.Д.* // ЖЭТФ. 1976. Т. 71. С. 262.
[4] *Захаров В.Е.* // ПМТФ. 1968. В. 2. С. 86.
[5] *Кузнецов Е.А., Лушников А.М.* // ЖЭТФ. 1995. Т. 108. С. 614.
[6] *Turitsyn S.K.* // Phys. Rev. E. 1993. V. 47. P. R796.
[7] *Лушников П.М.* // Письма в ЖЭТФ. 1995. Т. 62. С. 447.