01;09

Метод сведения уравнения Поклингтона для электрического вибратора к сингулярному интегральному уравнению

© В.А. Неганов, И.В. Матвеев, С.В. Медведев

Самарский государственный университет

Поступило в Редакцию 15 ноября 1999 г.

Рассматривается подход, базирующийся на использовании математического аппарата теории сингулярных интегральных уравнений (СИУ), позволяющий математически корректно подойти к анализу уравнения Поклингтона для тонкого электрического вибратора. Получено новое сингулярное интегральное уравнение относительно производной по продольной координате от поверхностного тока на вибраторе. Результаты численного анализа показали быструю сходимость данного подхода и достаточную простоту расчетов.

Введение

Расчет электрических вибраторов основан, как правило, на решении интегральных и интегродифференциальных уравнений для распределения тока на вибраторе. К настоящему времени известны интегродифференциальные уравнения Поклингтона и Харрингтона, а также интегральное уравнение Халлена [1–3]. Самым распространенным методом решения таких уравнений является метод моментов и его модификации, которые определяются выбором базисных и весовых функций. Основным недостатком этого подхода следует считать, на наш взгляд, то, что при решении указанных выше интегральных уравнений исходные сингулярные ядра, записанные в неявном виде, заменяются на регулярные (фредгольмовские). В результате получаются интегральные уравнения первого рода с фредгольмовскими ядрами, нахождение решений которых является некорректно поставленной задачей [4]. Также остается открытым вопрос проверки истинности решения и установления его адекватности рассматриваемой физической задаче. В развитие данного подхода С.И. Эминовым был предложен новый класс базисных функций для решения таких уравнений, названных собственными функциями интегродифференциального оператора [5]. Однако в результате использования таких функций алгоритм численного решения оказывается сильно усложненным.

Особенностью данной статьи является использование математического аппарата теории СИУ, развитого для полосково-щелевых волноведущих структур сверх- и крайневысоких частот [6,7], и алгоритм преобразования интегродифференциального уравнения Поклингтона к СИУ с особенностью Коши [8].

1. Постановка задачи. Интегральное уравнение первого рода

Рассмотрим тонкий проводник длиной $2l$ и радиусом a, возбуждаемый в точке разрыва генератором высокочастотных колебаний (рис. 1). При выводе СИУ будем использовать общепринятую модель тонкого вибратора ($a \ll l, \lambda$), согласно которой плотность продольного электрического тока η_z^e вместе с эквивалентной плотностью магнитного тока

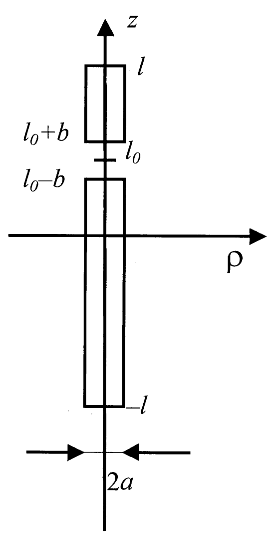

Рис. 1.

η_z^m в зазоре заменяются расположенной на оси вибратора бесконечно тонкой нитью продольного электрического тока $I_z(z) = 2\pi a \eta_z^e(z)$. Этот ток считается непрерывным в области зазора и обращается в нуль на концах вибратора. Торцевые токи не учитываются. Составляющая вектора электрического поля E_z, создаваемая нитью тока, на поверхности цилиндра $\rho = a(z \in [-l, l])$ обращается в нуль всюду, кроме области зазора $2b$, где она приравнивается стороннему полю $E^{\text{ст}}(z)$.

В рамках принятой физической модели при рассмотрении излучения выбратора, не зависящего от угла φ, исходным соотношением может служить уравнение Поклингтона [1]

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + \gamma^2\right\} \int\limits_{-l}^{l} I_z(z) \frac{e^{-i\gamma R}}{4\pi R} dz' = -i\omega\varepsilon_0\varepsilon E^{\text{ст}}(z), \tag{1}$$

где $R = \sqrt{(z - z')^2 + a^2}$; $\gamma^2 = k^2\varepsilon\mu$; $k = \omega/c$ — волновое число; ε, μ — диэлектрическая и магнитная проницаемости пространства, окружающего вибратор.

Используя известное разложение для функции Грина в (1) [5]:

$$\frac{e^{-i\gamma R}}{R} = -\frac{i}{2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ih(z-z')} J_0\left(-ia\sqrt{h^2 - \gamma^2}\right) H_0^{(2)}\left(-ia\sqrt{h^2 - \gamma^2}\right) dh, \tag{2}$$

где $J_0(x)$, $H_0^{(2)}(x)$ — функции Бесселя первого рода и функция Ханкеля второго рода первого порядка соответственно, можно записать следующее интегральное уравнение:

$$\int\limits_{-l}^{l} I_z(z') G_1(z, z') dz' = \omega\varepsilon\varepsilon_0 E^{\text{ст}}(z), \tag{3}$$

где

$$G_1(z, z') = \frac{1}{8\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (\gamma^2 - h^2) J_0(-ia\sqrt{h^2 - \gamma^2}) \times H_0^{(2)}(-ia\sqrt{h^2 - \gamma^2}) e^{-ih(z-z')} dh. \tag{4}$$

Соотношение (3) есть неоднородное интегральное уравнение первого рода.

2. Сингулярное интегральное уравнение

Очевидно, подынтегральная функция в ядре $G_1(z, z')$ при $|h| \to \infty$ возрастает как $|h|$ и интеграл (4) является расходящимся. Для устранения расходимости в ядре (4) перейдем в интегральном уравнении (3) от функции $I_z(z)$ к ее производной $I'_z = dI_z/dz$. Так как на концах вибратора ток I_z обращается в нуль $(I_z(-l) = I_z(l) = 0)$, то можно записать соотношение

$$\int_{-l}^{l} I_z(z')e^{ihz'}dz' = \frac{i}{h}\int_{-l}^{l} I'_z(z')e^{ihz'}dz'; \tag{5}$$

с учетом соотношения (5) интегральное уравнение (3) переписывается следующим образом:

$$\omega\varepsilon_0\varepsilon E^{\text{ст}}(z) = \int_{-l}^{l} I'_z(z')G(z, z')dz', \tag{6}$$

где

$$G(z, z') = \frac{1}{8\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ih(z-z')}g(h)dh, \tag{7}$$

$$g(h) = i\frac{\gamma^2 - h^2}{h}J_0(-ia\sqrt{h^2 - \gamma^2})H_0^{(2)}(-ia\sqrt{h^2 - \gamma^2}). \tag{8}$$

Для нахождения решения уравнения (6) определим асимптотическое поведение функции $g(h)$ при $|h| \to \infty$. С учетом представлений для функций Бесселя и Ханкеля мнимого аргумента [9]

$$J_0(-ix) = I_0(x), \qquad H_0^{(2)}(-ix) = \frac{2i}{\pi}K_0(x),$$

получим

$$\lim_{|h|\to\infty} g(h) = \text{sgn}(h), \tag{9}$$

где

$$\text{sgn}(h) = \begin{cases} 1, & h > 0 \\ -1, & h < 0. \end{cases}$$

Рассмотрим теперь соответствующее асимптотическое ядро

$$G_\infty(z,z') = \frac{1}{8\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(h) e^{-ih(z-z')} dh. \tag{10}$$

С учетом известного соотношения [10]

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ih(z-z')} \operatorname{sgn}(h) dh = \frac{2i}{z-z'} \tag{11}$$

получим

$$G_\infty(z,z') = \frac{i}{4\pi(z-z')}. \tag{12}$$

Таким образом, ядро $G(z,z')$ в интегральном уравнении (6) в неявном виде содержит сингулярность типа Коши (12) и поэтому оно является сингулярным.

Преобразуем интегральное уравнение (6). В результате несложных преобразований нетрудно записать следующее СИУ:

$$4i\omega\varepsilon_0\varepsilon E^{\text{ст}}(z) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-l}^{l} \frac{I'_z(z')}{z'-z} dz' + \int\limits_{-l}^{l} I'_z(z') K(z,z') dz', \tag{13}$$

где

$$K(z,z') = \frac{i}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ih(z'-z)} \Delta g(h) dh, \tag{14}$$

$$\Delta g(h) = \frac{\gamma^2 - h^2}{h} J_0(-ia\sqrt{h^2-\gamma^2}) H_0^{(2)}(-ia\sqrt{h^2-\gamma^2}) + \operatorname{sgn}(h).$$

Соотношение (13) является СИУ первого рода для нахождения неизвестного тока I_z и не имеет аналогов в научной литературе. Подынтегральное выражение в ядре $K(z,z')$ при $|h| \to \infty$ стремится к нулю: $\Delta g(h) \to 0$.

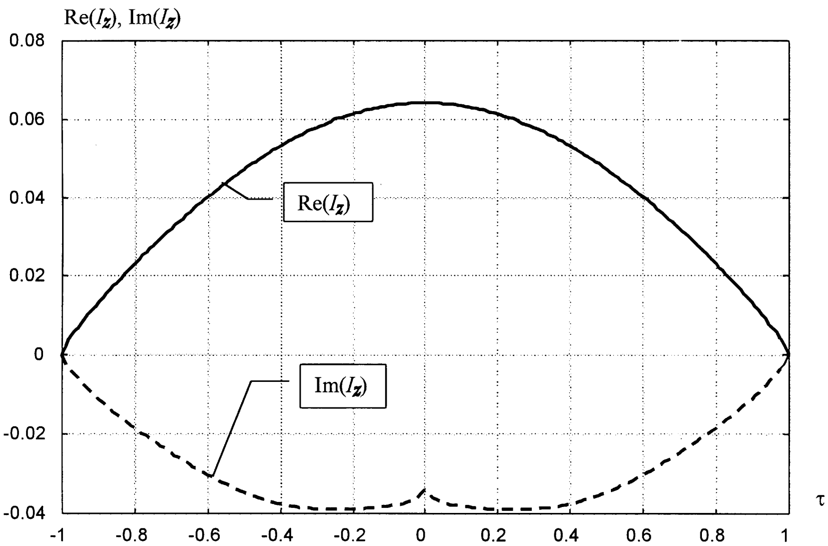

Рис. 2.

3. Решение СИУ. Численные результаты

Рассмотрим симметричный случай вибратора: $l_0 = 0$.

Для решения СИУ перейдем к новым переменным τ и τ': $z = l\tau$, $z' = l\tau'$ и перепишем уравнение (13) в виде $(J(\tau') = I'_z(l\tau'))$:

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{J(\tau')}{\tau'-\tau}d\tau' = 4i\omega\varepsilon_0\varepsilon E^{\text{ст}}(\tau) - l\int\limits_{-1}^{1}J(\tau')K(\tau,\tau')d\tau' \equiv F(\tau), \quad (15)$$

где

$$K(\tau,\tau') = \frac{i}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{ihl(\tau'-\tau)}\Delta g(h)dh. \quad (16)$$

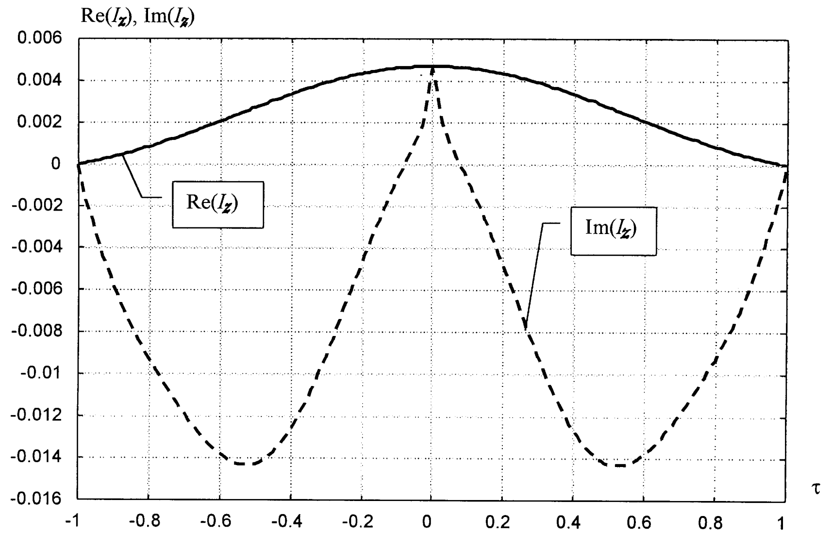

Рис. 3.

Для решения СИУ (15) воспользуемся формулой обращения интеграла Коши. В результате имеем [6]

$$J(\tau) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-\tau^2}}\left[a_0\pi - \int\limits_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-\tau'^2}}{\tau'-\tau}F(\tau')d\tau'\right], \qquad (17)$$

где a_0 — неизвестная постоянная, которая определяется из условия обращения в нуль тока I_z на концах вибратора, в соответствии с которым

$$\int\limits_{-1}^{1} J(\tau)d\tau = 0.$$

Данное соотношение есть также условие равенства нулю полного заряда на вибраторе. Уравнение (17) есть неоднородное интегральное уравнение Фредгольма второго рода, нахождение численного решения которого не представляет особого труда.

На основе интегрального уравнения (17) была численно рассчитана поверхностная плотность тока и на рис. 2–3 приведены характерные графики распределения действительной $\mathrm{Re}(I_z)$ и мнимой $\mathrm{Im}(I_z)$ составляющей тока на вибраторе при $b/l = 1/100$, $a/\lambda = 1/400$, $l/\lambda = 1/4$ и 1/2 соответственно. Расчеты проводились при условии постоянства стороннего поля $E^{\text{ст}}$ в зазоре и нормировке $\omega\varepsilon_0\varepsilon E^{\text{ст}} = a/\lambda$. Причем сплошными линиями показаны $\mathrm{Re}(I_z)$, а штриховыми линиями — $\mathrm{Im}(I_z)$. Результаты расчетов показали хорошее согласие с результатами работы [11].

Заключение

Таким образом, предложенный подход, базирующийся на использовании математического аппарата теории СИУ, позволил математически корректно подойти к анализу тонкого электрического вибратора. Данный подход позволил существенно улучшить сходимость решений и устранить явление относительной сходимости, имеющее место при решении уравнений Фредгольма первого рода [6,7]. Описанный в статье метод расчета поверхностной плотности тока на вибраторе позволяет, в принципе, определять математические оценки погрешностей полученных решений. Не составляет особого труда обобщение предложенного подхода на случай связанных вибраторов в свободном пространстве, а также на случай вибраторов над проводящими поверхностями.

Список литературы

[1] *Вычислительные* методы в электродинамике / Под ред. Э.П. Бурштейна. М.: Мир, 1977. 488 с.

[2] *Сазонов Д.М.* Антенны и устройства СВЧ: Учебник для радиотехнических специальностей вузов. М.: Высш. школа, 1988. 432 с.

[3] *Антенно-фидерные* устройства и распространение радиоволн: Учебник для вузов / Г.А. Ерохи, О.В. Чернышев, Н.Д. Козырев, В.Г. Кочершевский; под ред. Г.А. Ерохина. М.: Радио и связь. 1996. 352 с.

[4] *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986. 288 с.

[5] *Эминов С.И.* // Радиотехника и электроника. 1993. Т. 38. В. 12. С. 2160–2168.

[6] *Неганов В.А., Нефедов Е.И., Яровой Г.П.* Полосково-щелевые структуры сверх-и крайневысоких частот. М.: Наука. Физматлит, 1996. 304 с.

[7] *Неганов В.А., Нефедов Е.И., Яровой Г.П.* Современные методы проектирования линий передачи и резонаторов сверх- и крайневысоких частот. М.: Педагогика-Пресс, 1998. 328 с.
[8] *Неганов В.А., Матвеев И.В.* Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 1999. Т. 2. № 2. С. 27–33.
[9] *Справочник* по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица и И. Стигана. М.: Наука, Гл. ред. Физматлит, 1979. 832 с.
[10] *Гахов Ф.Д., Черский Ю.И.* Уравнения типа свертки. М.: Наука, Гл. ред. Физматлит, 1978. 296 с.
[11] *Эминов С.И.* Метод собственных функций сингулярных операторов в теории дифракции применительно к электродинамическому анализу вибраторных и щелевых антенн: Автореф. дис. д-ра физ.-мат. наук. Новгород, 1995. 43 с.