01;09

Оценка амплитуд составляющих спектров колебаний и постоянной Фейгенбаума в решениях системы уравнений Ресслера

© В.А. Двинских, С.В. Фролов

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

Поступило в Редакцию 16 декабря 1999 г.

Для оценки параметров составляющих спектра колебаний использована методика, основанная на аппроксимации последовательности отсчетов тригонометрическим полиномом первого порядка с изменяющимися частотами его гармонических функций. Произведена оценка параметров бифуркации удвоения периодов и постоянной Фейгенбаума в решениях системы уравнений Ресслера. Рассмотрена возможность ослабления уровня боковых составляющих интенсивного колебания при оценке амплитуды слабой составляющей путем использования разностного спектра.

В [1] рассмотрена процедура построения бифуркационных линий периода повторения циклов одной из модельных систем Ресслера

$$x = -y - z, \qquad y = x + ey, \qquad z = b + xz - \mu z$$

с параметрами $e = b = 0.2$. При этом для $\mu = 2.5$ имеет место устойчивый предельный цикл с периодом T_0, а для $\mu = 2.83$ этот цикл претерпевает бифуркационное удвоение периода.

Известно [2], что классический метод вычисления параметров составляющих спектра цифровых сигналов, основанный на использовании дискретного преобразования Фурье, обладает низкой разрешающей способностью. Ограниченность интервала наблюдения приводит к искажению вычисленного спектра из-за взаимного просачивания его составляющих. Для уменьшения уровня боковых лепестков используются различные окна, имеющие по сравнению с прямоугольным окном более широкий главный лепесток, что снижает частотную избирательность. Поэтому в работе используется методика вычисления параметров составляющих спектра, основанная на аппроксимации последовательности отсчетов тригонометрическим полиномом первого порядка [3] и позволяющая повысить разрешающую способность. Аппроксимируем последовательность отсчетов $x(n)$, $n = 0, 1, \dots, N-1$ для фиксированного частотного множителя h выражением вида

$$v(n) = G + S\sin(hn) + C\cos(hn), \qquad n = 0, 1, \dots, N-1.$$

По методу наименьших квадратов [4] составляются суммы

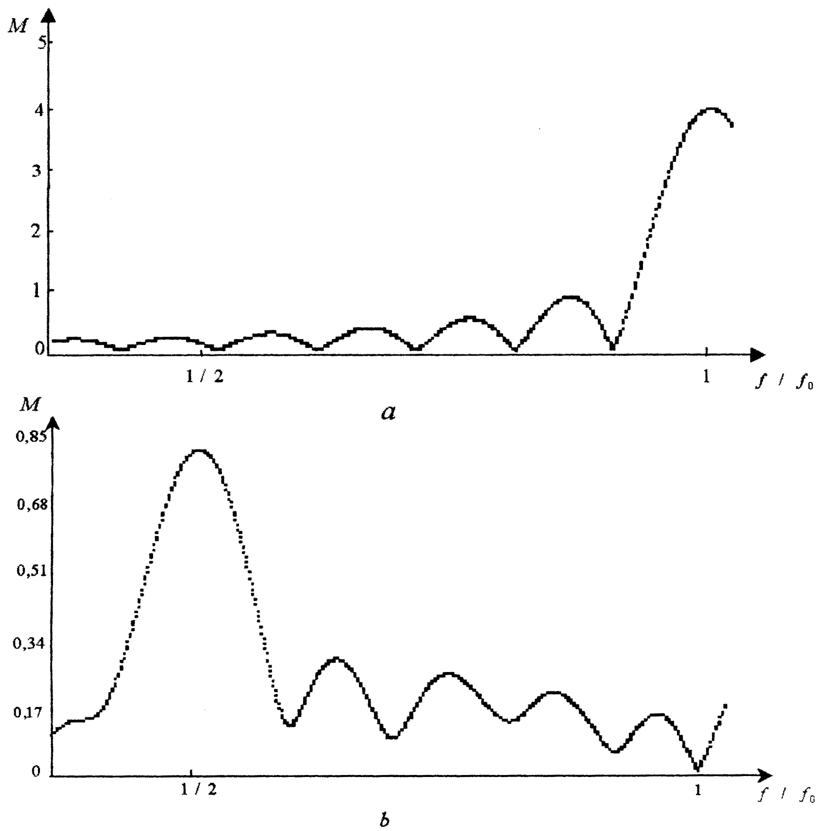
$$\sum_{n=0}^{N-1}[x(n) - v(n)]^2$$

из условий равенства нулю частных производных по G, S, C с последующим вычислением их значений из системы линейных алгебраических уравнений. В результате выявляется, если она существует в исследуемом процессе, составляющая с частотой, равной h или близкой к ней. Следовательно, задача состоит в выборе значений h, обеспечивающих оценку параметров составляющих в квазипериодическом процессе. Из физических соображений может быть задан частотный диапазон ожидаемых периодических составляющих, число которых P и их частоты неизвестны. Разобьем этот диапазон на L интервалов, каждому из которых соответствуют частотные множители h_j, а также значения G_j, S_j, C_j, $j = 1, 2, \dots, L$ и тем самым устанавливаются границы этих интервалов. С учетом известной связи h_j с периодом из N_j отсчетов за этот период имеем

$$h_j = (2\pi/N_j), \qquad j = 1, 2, \dots, L.$$

При этом число частотных интервалов может быть выбрано достаточно большим, что обеспечивает выявление мелких деталей спектра. Модуль спектра колебаний вычисляется по формуле

$$M_j = \sqrt{S_j^2 + C_j^2}, \qquad j = 1, 2, \dots, L.$$



Спектры колебаний, где по оси абсцисс отложено относительное значение частоты при f_0 — частоте основного колебания, а по оси ординат — модуль амплитуды.

Решение приведенной выше системы уравнений для $\mu = 2.8$ выполнено по методу Рунге–Кутта четвертого порядка с шагом 0.05 при начальных условиях $x_0 = 2.8$, $y_0 = z_0 = 0$, числе отсчетов, равном 985, при интервале по частоте 0.0025.

В результате решения данной системы уравнений получены следующие параметры бифуркации: $\mu_2 = 2.625$, $\mu_4 = 3.837$, $\mu_8 = 4.184$,

$\mu_{16} = 4.269$. При этом значения константы Фейгенбаума возрастают: $\delta_1 = 3.49$; $\delta_2 = 4.08$. Это находится в удовлетворительном соответствии с теорией Фейгенбаума.

Отношение амплитуды основного колебания M_0 у границ бифуркации удвоения периода к амплитуде колебаний удвоенного периода M_2 определяется выражением $k = 20\lg\frac{M_0}{M_2}$.

Значение M_0 определяется из рисунка, a и равно 4.244.

Для вычисления амплитуды удвоенного периода необходимо уменьшить амплитуду боковых составляющих. С этой целью предлагается методика вычитания, в которой запоминаются параметры основного колебания в виде значений G_k, S_k, C_k и частотного множителя b_k. Предполагая, что влияние составляющей удвоенного периода на основное колебание пренебрежимо мало, примем

$$q_k = G_k + S_k \sin(b_k i) + C_k \cos(b_k i), \qquad i = 0, 1, \dots, N-1.$$

Затем определяются зависимости $Z1_j$, $Z2_j$, $j = 1, 2, \dots, L$ коэффициентов при синусе и косинусе спектра от основного колебания. Далее осуществляется последовательное вычитание

$$W1_j = S_j - Z1_j, \qquad W2_j = C_j - Z2_j, \qquad j = 1, 2, \dots, L$$

и вычисляется зависимость модуля

$$MR_j = \sqrt{W1_j^2 + W2_j^2}, \qquad j = 1, 2, \dots, L,$$

представленная на рисунке, b, из которого вычислено значение $M_2 = 0.8339$. Значение k составляет 14.13 dB, что находится в хорошем соответствии с работой [1] ($k \approx 13$ dB).

Список литературы

[1] *Анищенко В.С.* Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990. 312 с.

[2] *Марпл С.Л.* Цифровой спектральный анализ и его приложения / Пер. с англ. М.: Мир, 1990. 584 с.

[3] *Двинских В.А.* // ЖТФ. 1992. Т. 62. В. 12. С. 168–170.

[4] *Шуп Т.Е.* Прикладные численные методы в физике и технике. М.: Высш. школа. 1990. 255 с.