01;09

Поле и входная проводимость вертикального магнитного диполя над плоским сетчатым экраном

© В.П. Акимов, Л.А. Бабенко

С.-Петербургский государственный технический университет

Поступило в Редакцию 23 марта 2000 г.

Приводится решение задачи о поле излучения вертикального магнитного диполя, расположенного над плоским сетчатым экраном. Показано, что применение метода мнимых изображений и метода усредненных граничных условий позволяет существенно упростить как собственно решение, так и вычислительную процедуру. Полученные результаты могут быть использованы при расчете электромагнитных экранов, в состав которых входят металлические сетки.

Для получения однонаправленного излучения простейших антенн (диполей, рамок) и антенных решеток на их основе обычно применяют сплошные или сетчатые металлические экраны. В случае сплошного экрана процедура расчета характеристик антенны, расположенной над ним, весьма проста, если использовать метод зеркальных отражений. Сетчатые же экраны не обладают идеальными отражательными свойствами, и в этом случае метод зеркальных отражений не применим.

Для расчета характеристик излучения антенн, расположенных над сетчатыми экранами, обычно применяют численные методы [1], которые требуют сравнительно большого времени вычислений даже при использовании современных вычислительных средств. Однако для решения подобных задач можно воспользоваться методом усредненных граничных условий [2] и методом мнимых изображений [3], что существенно упрощает вычислительную процедуру. В работах [4] и [5] такой подход применяется для решения задач о поле вертикального и горизонтального электрических диполей, расположенных над плоской металлической сеткой.

Переходя к решению поставленной задачи, обратимся к рис. 1. Вертикальный магнитный диполь длиной L с током I^m расположен на

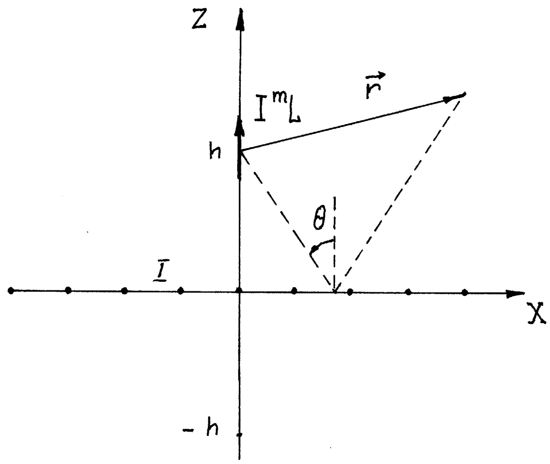

Рис. 1. Магнитный диполь над сетчатым экраном.

высоте h от поверхности плоской сетки (I) с ячейками квадратной формы. Период сетки $a \ll \lambda$ (λ — длина волны), радиус проводников $r_0 \ll a$, контакты между проводниками — идеальные. При таких параметрах сетки ее можно рассматривать как некую сплошную поверхность, на которой выполняются усредненные граничные условия [2]. Для описания поля в верхнем и нижнем полупространствах введем компоненту магнитного вектора Герца $M_z = M$, которая удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$(\nabla^2 + k^2)M_1(\mathbf{r}) = \frac{i}{\omega\mu_0} I^m L \delta(\mathbf{r} - \mathbf{z}_0 h), \quad z \geq 0, \tag{1}$$

$$(\nabla^2 + k^2)M_2(\mathbf{r}) = 0, \quad z \leq 0, \tag{2}$$

где $k^2 = \omega^2\varepsilon_0\mu_0$, ε_0, μ_0 — диэлектрическая и магнитная проницаемости свободного пространства, $\mathbf{r}$ — координаты точки наблюдения, $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{z}_0 h)$ — дельта-функция.

После применения к уравнениям (1) и (2) преобразования Фурье в плоскости XY получим

$$\tilde{M}_1'' + \gamma^2 \tilde{M}_1 = \frac{iI^m L}{\mu_0\omega}\delta(z - h), \quad z \geq 0, \tag{4}$$

$$\tilde{M}_2'' + \gamma^2 \tilde{M}_2 = 0, \quad z \leq 0, \tag{5}$$

где $\tilde{M}'' = \frac{d^2\tilde{M}}{dz^2}$, $\gamma^2 = k^2 - \alpha^2 - \beta^2$, α и β — переменные преобразования Фурье, $\mathcal{J}m\gamma < 0$.

Уравнения (4), (5) по виду совпадают с уравнениями линии передачи вдоль оси Z с постоянной распространения γ. Решения этих уравнений можно записать в виде

$$\tilde{M}_1 = Ce^{-i\gamma z} - \frac{I^m L}{2\gamma\omega\mu_0} e^{-i\gamma|z-h|}, \quad z \geq 0,$$

$$\tilde{M}_2 = De^{i\gamma z}, \quad z \leq 0. \tag{6}$$

Постоянные C и D определяются из граничных условий на поверхности сетки, которые представляют собой условие непрерывности касательных составляющих напряженности электрического поля и усредненное граничное условие

$$\mathbf{E}_{\tau_1} = \mathbf{E}_{\tau_2}|_{c=0}, \tag{7}$$

$$\mathbf{E}_{\tau_1} = i\eta\varkappa \left(\mathbf{j}_\tau + \frac{1}{2k^2} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{j}_\tau) \right) \Big|_{z=0}, \tag{8}$$

где $\eta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi$, $\varkappa = \frac{a}{\lambda} \ln \frac{a}{2\pi r_0}$ — параметр сетки, $\mathbf{j}_\tau = \mathbf{z}_0 \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1)$ — усредненная плотность тока на поверхности сетки.

Учитывая, что векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ связаны с вектором Герца соотношениями

$$\mathbf{E} = -i\omega\mu_0 \nabla \times \mathbf{M}, \quad \mathbf{H} = k^2 \mathbf{M} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{M}),$$

граничные условия (7) и (8) могут быть записаны через преобразованные по Фурье функции $\tilde{M}$ в виде

$$\tilde{M}_1 = \tilde{M}_2, \tag{9а}$$

$$\tilde{M}_1 = \frac{\eta}{\omega\mu_0} \varkappa (\tilde{M}_1' - \tilde{M}_2'), \tag{9б}$$

где $\tilde{M}' = \frac{d\tilde{M}}{dz}$.

На основании соотношений (6), (9) находим

$$C = -A\frac{k}{k+2i\gamma\varkappa}e^{-i\gamma h}, \quad D = A\frac{2i\gamma\varkappa}{k+2i\gamma\varkappa}e^{-i\gamma h}, \quad A = -\frac{I^m L}{2\gamma\omega\mu_0}.$$

Теперь преобразованные по Фурье функции $\tilde{M}_1$ и $\tilde{M}_2$ запишутся в форме

$$\tilde{M}_1 = A(e^{-i\gamma|z-h|} + R(\gamma)e^{-i\gamma(z+h)}), \quad z \geq 0, \tag{10}$$

$$\tilde{M}_2 = A(1 + R(\gamma)e^{i\gamma(z-h)}), \quad z \leq 0, \tag{11}$$

$$R(\gamma) = -\frac{k}{k+2i\gamma\varkappa}. \tag{12}$$

Нетрудно заметить, что первое слагаемое в (10) представляет собой падающую волну, а второе — отраженную, причем $R(\gamma)$ имеет смысл коэффициента отражения. Для того чтобы перейти от преобразованных по Фурье функций к физическому пространству, надо выполнить обратное преобразование Фурье. Однако можно пойти по другому пути и найти выражение для вектора Герца, обязанного своим происхождением токам сетки, введя в рассмотрение некий фиктивный источник — изображение, подобно тому как это делается в случае идеально проводящей плоскости.

Будем считать, что $R(\gamma)$ является преобразованием Лапласа функции $f(s)$, т.е.

$$R(\gamma) = \int\limits_0^\infty f(s)e^{-\gamma}ds. \tag{13}$$

Из соотношений (12) и (13) следует

$$f(s) = \frac{ik}{2\varkappa}e^{i\frac{k}{2\varkappa}s}. \tag{14}$$

С учетом (13) и (14) выражение (10) запишется в форме

$$\tilde{M}_1 = A\left(e^{-i\gamma|z-h|} + \left(\int\limits_0^\infty \frac{ik}{2\varkappa}e^{i\frac{k}{2\varkappa}s}e^{-\gamma s}ds\right)e^{-i\gamma(z+h)}\right) = \tilde{M}_1^0 + \tilde{M}_1^1, \tag{15}$$

где $\tilde{M}_1^0$ и $\tilde{M}_1^1$ — преобразованные по Фурье векторы Герца поля диполя и поля токов сетки соответственно.

В физическом пространстве вектор Герца поля диполя определяется соотношением

$$M_1^0(\mathbf{r}) = -\frac{iI^m L}{4\pi\mu_0\omega} G(\mathbf{r} - \mathbf{z}_0 h), \qquad (16)$$

где $G(\mathbf{r} - \mathbf{z}_0 h) = \frac{e^{-ikd}}{d}$ — функция Грина для свободного пространства. По аналогии с (16) для M_1^1 можно написать

$$M_1^1(\mathbf{r}) = -\frac{iI^m L}{4\pi\mu_0\omega} \frac{ik}{2\varkappa} \int\limits_0^\infty e^{i\frac{k}{2\varkappa}s} G(\mathbf{r} - \mathbf{z}_0(-h + is))ds, \qquad (17)$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, определяющий координаты точки наблюдения, $(-h + is)$ — координаты точек фиктивного источника, заменяющего влияние сетчатого полотна. Выражение (17) может рассматриваться как вектор Герца мнимого источника, расположенного в комплексном пространстве. Этот источник является линейным магнитным током, полубесконечным, протяженным вдоль мнимой оси s от 0 до ∞. Ток этого источника зависит от координаты мнимой оси s и равен

$$I^{m'}(s) = -\frac{iI^m L}{4\pi\mu_0\omega} \frac{ik}{2\varkappa} e^{i\frac{k}{2\varkappa}s}. \qquad (18)$$

Функция Грина в соотношении (17) имеет вид

$$G(x, y, z, s) = \frac{\exp(-ik\sqrt{x^2 + y^2 + (z + h - is)^2})}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + h - is)^2}} = \frac{e^{-ikd}}{d},$$

т.е. в нее входит комплексное расстояние, впервые введенное Уэйтом (Wait) при трансформации известного решения Зоммерфельда для источника, расположенного вблизи границы раздела сред.

Интеграл в выражении (17) сходится, если при его вычислении для комплексного расстояния d выбрать ветвь $\mathcal{J}m\, d < 0$. Рассмотрим два предельных случая: отсутствие сетки и переход от сетки к идеально проводящей плоскости. Если положить $r_0/a \to 0$ за счет уменьшения радиуса проводников сетки, то, очевидно, $\varkappa \to \infty$, что соответствует "исчезновению" сетчатой поверхности. В этом случае из (17) видно, что $M_1^1(\mathbf{r}) \to 0$, т.е. диполь расположен в свободном пространстве. Если "густота" сетки велика, т.е. $1/2\varkappa \to \infty$, то, проведя интегрирование по частям в (17), получаем

$$M_1^1(\mathbf{r}) = \frac{iI^m L}{4\pi\mu_0\omega} G(\mathbf{r} + \mathbf{z}_0 h),$$

что соответствует вектору Герца магнитного диполя с током противоположного направления, расположенному в зеркальной (относительно плоскости сетки) точке, т. е. приходим к обычному методу зеркальных отражений.

Таким образом, для определения поля при $z > 0$ вертикального магнитного диполя, расположенного над сеткой, надо сложить поле реального диполя и поле его мнимого изображения (18). Поле в нижнем полупространстве определяется в соответствии с соотношением (11).

Если точка наблюдения находится в верхнем полупространстве ($z > 0$) на большом расстоянии от диполя и поверхности сетки, то, выполнив соответствующие предельные переходы, получаем известное соотношение для коэффициента отражения плоской TE-волны от сетки с квадратными ячейками

$$R^{TE} = -\frac{1}{1 + i2\varkappa\cos\theta}.$$

Применяя изложенный метод и метод наводимых магнитодвижущихся сил, можно получить соотношение для определения относительного изменения входной проводимости магнитного диполя, связанного с наличием сетчатого экрана

$$\frac{\Delta Y}{Y_0} = -\frac{3}{4\pi\varkappa} e^{-i4\pi h/\lambda} \times \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{2\pi(2h/\lambda - i\tau)^3} + \frac{i}{(2h/\lambda - i\tau)^2} \right\} e^{\pi(i/\varkappa - 2)\tau} d\tau, \qquad (19)$$

где λ — длина волны, $Y_0 = \frac{2\pi}{3}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}(L/\lambda)^2$ — проводимость излучения магнитного диполя в свободном пространстве.

Формула (19) удобна для расчета, так как интеграл хорошо сходится благодаря быстрому убыванию подынтегрального выражения. На рис. 2 приведена зависимость вещественной и мнимой частей входной проводимости диполя от h/λ для двух значений a/λ.

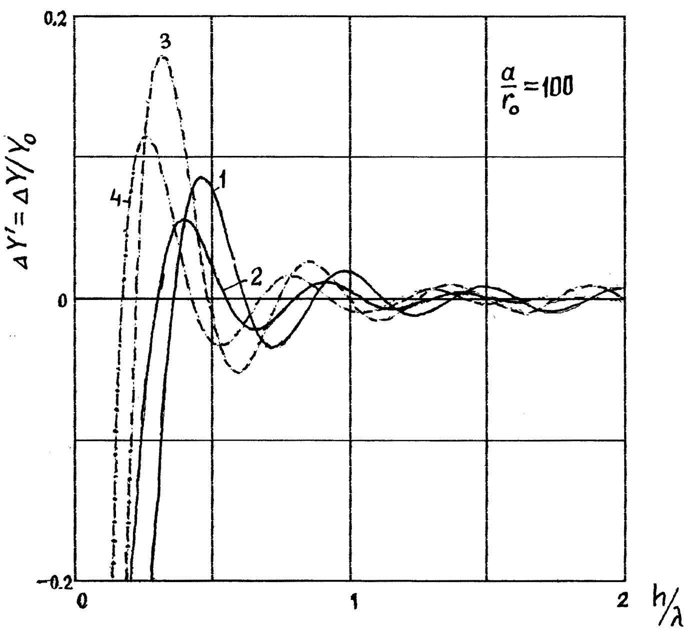

Рис. 2. *1* — Re $(\Delta Y')$, $a/\lambda = 0.001$; *2* — Re $(\Delta Y')$, $a/\lambda = 0.25$; *3* — Im $(\Delta Y')$, $a/\lambda = 0.001$; *4* —Im $(\Delta Y')$, $a/\lambda = 0.25$.

Как известно, физической реализацией магнитного диполя является рамка малого радиуса b с электрическим током I^e, причем магнитный ток диполя I^m выражается через ток рамки посредством соотношения [6]

$$I^m = i\omega\mu_0 I^e S/L,$$

где $S = \pi b^2$ — площадь рамки.

Изменение входного сопротивления рамки ΔZ_p, связанное с влиянием сетчатого экрана, может быть выражено через ΔY:

$$\Delta Z_p = \frac{\omega^2\mu_0^2 S^2}{L^2}\Delta Y \qquad \text{или} \qquad \frac{\Delta Z_p}{R_{0p}} = \frac{\Delta Y}{Y_0},$$

где $R_{0p} = Y_0 \frac{\omega^2\mu_0^2 S^2}{L^2}$ — сопротивление излучения рамки в свободном пространстве [6].

В заключение следует отметить, что полученные результаты могут быть использованы и при расчете сетчатых электромагнитных экранов, предназначенных для защиты физических установок и объектов.

Список литературы

[1] *Wait J.R.* Antenna Theory. N.Y.: McGraw-Hill, 1969.
[2] *Конторович М.И., Астрахан М.И., Акимов В.П., Ферсман Г.А.* Электродинамика сетчатых структур. М.: Радио и связь, 1987. 134 с.
[3] *Lindell I.V.* Methods for Electromagnetic Field Analysis. Clarendon Press, Oxford, 1992.
[4] *Lindell I.V., Akimov V.P., Alanen E.* // IEEE Trans. Electromagnetic Compatibility. 1986. V. EMC-28. N 2. P. 107–109.
[5] *Акимов В.П.* // Волны и дифракция-90. АН, 1990. Т. 3. С. 101–104.
[6] *Марков Г.Т.* Антенны. М.: Госэнергоиздат, 1960. 535 с.