

01;03;04

Об одном возможном способе раскрытия математической неопределенности ближнего волнового поля расширяющегося цилиндра

© В.С. Крутиков, А.Г. Лопатнев

Институт импульсных процессов и технологий НАН Украины, Николаев
Украинский государственный
морской технический университет, Николаев

Поступило в Редакцию 3 апреля 2000 г.

Методом обратных задач с учетом взаимодействия нелинейных аргументов впервые получено точное аналитическое решение волнового уравнения цилиндрической симметрии в областях с подвижными границами. Решения универсальны, пригодны для обратных и прямых задач при произвольных величинах начального радиуса и перемещений, решения описывают ближнее поле расширяющегося плазменного поршня, в том числе и самые первые, начальные мгновения импульсного процесса.

Характерной особенностью импульсных процессов (электрический разряд, лазерный импульс, взрыв взрывчатых веществ или газовых смесей и т.д.) в сжимаемой среде является наличие подвижных границ раздела фаз плазма–жидкость, газ–жидкость. Учет влияния этой особенности, а также величины начального радиуса r_0 , необходим, например, при изучении плазмы канала электрического разряда, лазерного импульса и т.д. в жидкости; при исследовании волновых процессов, в том числе ближней зоны расширяющейся границы плазменной полости; решении вопросов управления импульсными процессами; моделировании пробоя межэлектродного промежутка, что является отдельной сложной проблемой.

Обычно при моделировании и, как правило, численной реализации расширения плазменного поршня, в начальный момент времени плазменный канал с радиусом r_0 и температурой T_0 полагается сформированным. Исходя из экспериментальных данных величины r_0 и T_0 принимают в определенном диапазоне изменения для импульсных

процессов в воздухе [1–3] и в воде [4,5]. Варьирование начальных условий в диапазоне разброса их экспериментально определенных значений оказывает несущественное влияние на результаты расчетов. Решения быстро выходят на близкие режимы.

Однако, как следует отметить, при этом из возможного рассмотрения исключаются изменения исследуемых функций давления, скорости частиц и т. д. в самые первые мгновения процесса, без которых невозможно, например, осмысление и моделирование пробоя межэлектродного промежутка и многих других физических процессов предпробойной и пробойной стадии.

В настоящей работе делается попытка количественной оценки кинематических и динамических параметров расширяющегося цилиндрического плазменного поршня в сжимаемой среде, в том числе и в самые первые, начальные мгновения импульсного процесса.

Для случая расширения плазменного поршня в безграничной сжимаемой жидкости, если при этом возмущения плотности невелики, движение среды описывается волновым уравнением. Цилиндрическая симметрия относится к случаю особой сложности. До настоящего времени не было ни одного точного аналитического решения волнового уравнения в областях с подвижными границами, подобные задачи математической физики не рассматривались.

Пусть известен закон изменения давления $P(r_1, t) = f(r_1, t)$ в фиксированной точке r_1 волновой зоны — обратная задача. Необходимо определить исследуемые функции в других точках, включая подвижные границы, при этом закон движения границы неизвестен и подлежит определению.

Решение волнового уравнения (начальные условия нулевые), полученное методом обратных задач с учетом взаимодействия нелинейных аргументов [6–9], имеет вид:

$$\bar{\varphi} = -\frac{\bar{f}(r_1, s)K_0(\mu r)}{s\rho K_0(\mu r_1)}, \quad (1)$$

здесь $\mu = s/a$, s — параметр преобразования Лапласа; a , ρ — скорость распространения возмущений и плотность покоящейся среды; K_0 , K_1 — модифицированные функции Бесселя; φ — потенциал скорости.

Переход к оригиналам в (1) может быть осуществлен рациональным способом в каждом конкретном случае в зависимости от формы

функции f . Представим вид $P(r_1, t)$ в классе функций Бесселя, тогда соответствующие решения будут иметь вид:

$$\begin{aligned}
 P(r_1, t) &= A \left[t^2 - \frac{(r_1 - r_0)^2}{a^2} \right]^{-1/2}, & P(r, t) &= A \left[t^2 - \frac{(r - r_0)^2}{a^2} \right]^{-1/2}, \\
 & & t &> (r - r_0)/a, \\
 v(r, t) &= \frac{A \cdot t}{(r - r_0)\rho} \left[t^2 - \frac{(r - r_0)^2}{a^2} \right]^{-1/2}, \\
 P(R(t), t) &= A \left[t^2 - \frac{(R(t) - r_0)^2}{a^2} \right]^{-1/2}, \\
 v(R(t), t) &= \frac{A \cdot t}{(R(t) - r_0)\rho} \left[t^2 - \frac{(R(t) - r_0)^2}{a^2} \right]^{-1/2} = \frac{dR(t)}{dt}, \\
 (R(t) - r_0)^2 &= \frac{2A}{\rho} \sqrt{t^2 - \frac{(R(t) - r_0)^2}{a^2}} \\
 &+ \frac{2A^2}{\rho^2 a^2} \ln \left| \sqrt{t^2 - \frac{(R(t) - r_0)^2}{a^2}} - \frac{A}{\rho a^2} \right|. \quad (4)
 \end{aligned}$$

При

$$a \rightarrow \infty \quad R(t) - r_0 = \left(\frac{2A \cdot t}{\rho} \right)^{1/2}.$$

При $r_0 = 0$ формулы (4) переходят в полученные ранее в [6,9].

Соотношение (4) наглядно показывает, сколь существенно нелинейна связь между законом изменения радиуса подвижной границы и исследуемыми функциями. Для случая $P(r_1, t) = f(r_1, t)$ — произвольной функции, соответствующие решения представлены в [6,9]. Полученные соотношения являются точными, подстановка их в волновое уравнение превращает его левую часть в нуль. Проведено сравнение с результатами численного решения методом характеристик полной системы уравнений (1) [11], определены впервые границы применимости волнового уравнения и его точных решений в задачах импульсной гидродинамики и акустики. Они находятся в пределах $M = v/a \leq 0.2$ [11], v — скорость расширения поршня. При этом ударная волна сразу отходит от

расширяющейся полости со скоростью $a_0 = \text{const}$. В некоторых случаях ввод энергии в канал может привести к интенсивному "испарению" среды, превращению ее в пар, плазму с внутренней подвижной поверхности плазменной полости. Это приводит к существенному изменению гидродинамической картины расширения плазменного канала как в начальные моменты расширения, так и в последующие. Подобные явления могут быть описаны математической моделью с подвижной проницаемой границей [8].

Как видим в (4), при $t \rightarrow 0$ $R(t) = r_0$, $P(R(t), t)$ и $v(R(t), t)$ стремятся к бесконечности. Для раскрытия этой неопределенности используем [10] следующее представление для функции Макдональда:

$$K_0(x) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \left(1 - \frac{1}{8x} + \dots \right),$$

$$K_1(x) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \left(1 + \frac{1}{8x} + \dots \right), \quad x \rightarrow \infty.$$

Тогда с учетом (1) при $f(r_1, t) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \left(t - \frac{r_1 - r_0}{a} \right)^m$ можно получить

$$\varphi(r, t) = -\frac{1}{\rho} \sqrt{\frac{r_1}{r}} \int_0^t f(t - \tau) \sigma_0 \left(\tau - \frac{r - r_0}{a} \right) d\tau,$$

$$P(r, t) = \sqrt{\frac{r_1}{r}} \sum_{m=0}^{\infty} A_m \xi^m = F_1, \quad \xi = t - \frac{r - r_0}{a},$$

$$v(r, t) = \frac{1}{\rho} \sqrt{\frac{r_1}{r}} \left[\frac{1}{2r} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m}{m+1} \xi^{m+1} + \frac{1}{a} \sum_{m=0}^{\infty} A_m \xi^m \right] = F_2, \quad (5)$$

где A_m — коэффициенты полинома Лагранжа степени m , σ_0 — единичная разрывная функция нулевого порядка.

На подвижных границах $r = R(t)$:

$$P(R(t), t) = F_1(R(t), t), \quad v(R(t), t) = F_2(R(t), t),$$

$$\frac{2}{5} \frac{[R^{5/2}(t) - r_0^{5/2}]}{\sqrt{r_1}} \rho = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m}{(m+1)(m+2)} \xi^{m+2} + \frac{R(t)}{a} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m}{m+1} \xi^{m+1}. \quad (6)$$

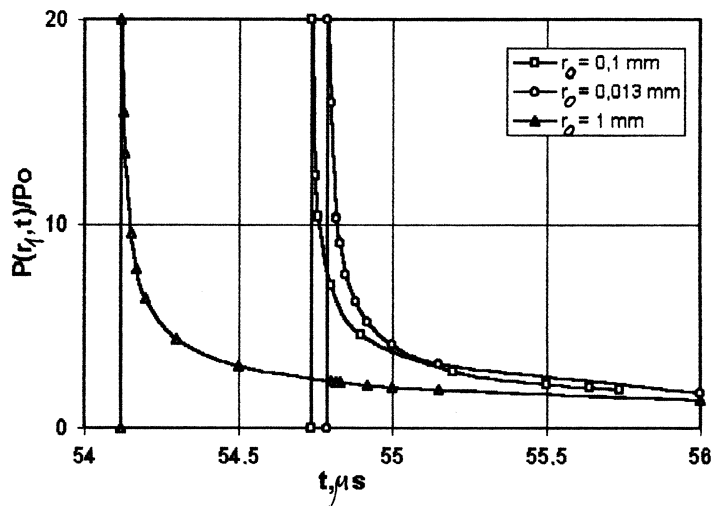


Рис. 1. Исходные для реконструкции изменения давления в точке волновой зоны в зависимости от времени для трех значений величин начального радиуса.

При $r = R(t)$ и $t \rightarrow 0$ из (5) получаем: $R(t) = r_0$,

$$P(R(t), t) = \sqrt{\frac{r_1}{r_0}} A_0, \quad v(R(t), t) = \frac{1}{\rho a} \sqrt{\frac{r_1}{r_0}} A_0. \quad (7)$$

Анализ (5), (7) и сравнение с точным численным решением методом характеристик полной системы (1) [11] уравнений движения сплошности и состояния в форме Тэта показывает, что получить приемлемые значения удастся при решении обратных задач: для давлений в точке волновой зоны, а на подвижной границе поршня — только в начальный момент времени (движения). При решении прямой задачи (по известной скорости расширения поршня) определить давления и скорости частиц в точках волновой зоны по формулам (5), (6) не представляется возможным [10].

На рис. 1–4 показаны результаты вычислений по формулам (4) при $A = 20 \cdot 10^{-6} \text{ kgf} \cdot \text{s} / \text{cm}^2$, $\rho = 102 \text{ kgf} \cdot \text{s} / \text{m}^4$, $a = 1460 \text{ m/s}$ и трех значениях величин начального радиуса $r_0 = 0.013, 0.1, 1 \text{ mm}$; $r_1 = 0.08 \text{ m}$,

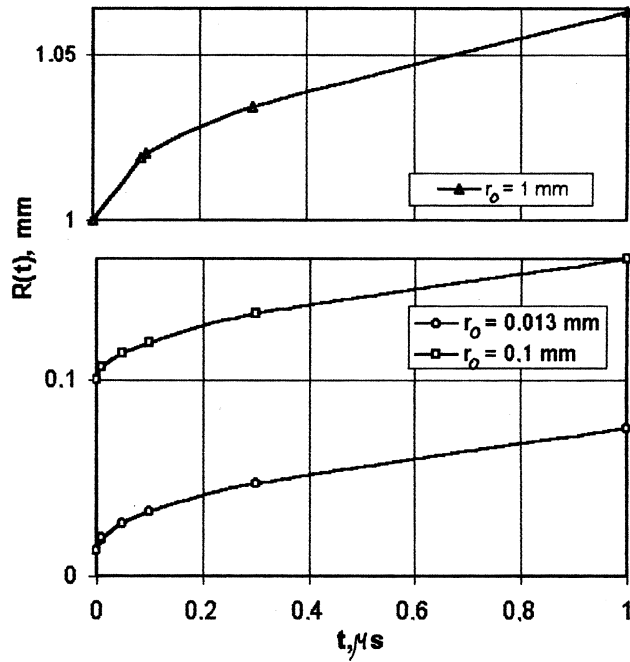


Рис. 2. Восстановление законов изменения радиуса подвижной границы плазменного поршня в зависимости от времени для различных величин начального радиуса.

$A_0 = 20 \text{ kgf/cm}^2$; значения давлений и скоростей при $t \rightarrow 0$ на подвижной границе плазменной полости определялись по формулам (7).

Как видим на рис. 3, 4, в начальные мгновения $t = 0 \div 0,1 \mu s$ импульсного процесса значения давления и скорости на подвижной границе плазменного поршня, во-первых, существенно отличаются, в некоторых случаях на порядок от значений для времен $t > 0,1 \mu s$; во-вторых, $P(R(t), t)$ и $v(R(t), t)$ существенно зависят от величины начального радиуса r_0 ; давления и скорости в начальные мгновения могут в несколько раз отличаться для разных значений r_0 .

При $t > 0,1 \mu s$ давления и скорости на подвижной границе практически не зависят от величины начального радиуса r_0 для принятых

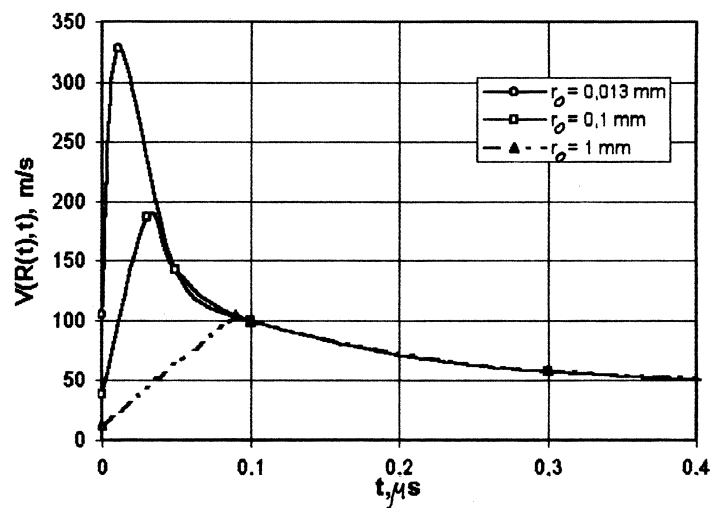


Рис. 3. Восстановление законов изменения скорости подвижной границы в зависимости от времени для различных величин начального радиуса.

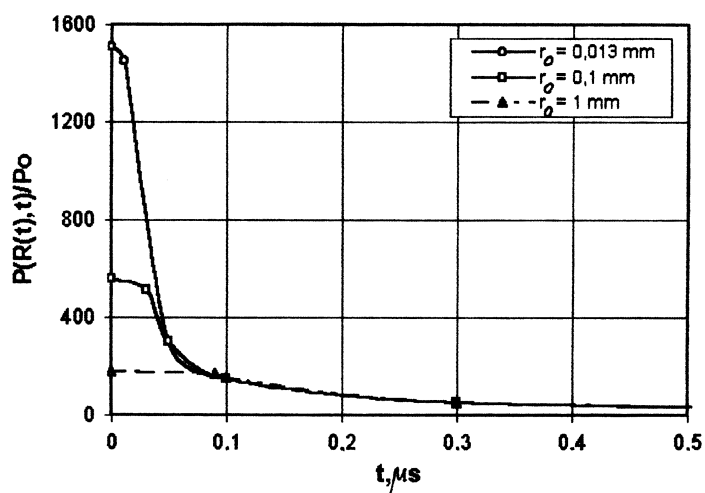


Рис. 4. Реконструкция законов изменения давления на подвижной границе плазменного поршня с учетом нелинейного члена интеграла Коши–Лагранжа [12] в зависимости от времени для различных значений величин начального радиуса по заданному давлению в точке волновой зоны рис. 1.

значений — все три кривые на рис. 3, 4 совпадают. Полученные результаты могут быть использованы при исследовании ближней зоны расширяющейся границы плазменной полости, решении вопросов управления импульсными процессами, моделировании пробоя межэлектродного промежутка, изучении плазмы канала.

Список литературы

- [1] Басов Н.Г., Борович Б.П., Стойлов В.С. и др. // ЖТФ. 1970. Т. 40. № 3. С. 516–522.
- [2] Александров А.Ф., Зосимов В.В., Курдюмов С.П. и др. // ЖЭТФ. 1971. Т. 61. № 5. С. 1841–1855.
- [3] Дубовенко В.К. // Электронная обработка материалов. 1990. № 2 (152). С. 62–65.
- [4] Наугольных К.А., Рой Н.А. Электрические разряды в воде. М.: Наука, 1971. 151 с.
- [5] Лямшев Л.М. // Успехи физических наук. 1987. Т. 151. № 3. С. 479–527.
- [6] Крутиков В.С. // Письма в ЖТФ. 1988. Т. 14. В. 6. С. 510–514.
- [7] Крутиков В.С. // Прикладная математика и механика. 1991. Т. 55. № 6. С. 1058–1062.
- [8] Крутиков В.С. // Докл. АН. 1993. Т. 333. № 4. С. 512–514.
- [9] Крутиков В.С. // Докл. АН. 1999. Т. 364. № 1. С. 17–20.
- [10] Крутиков В.С. Одномерные задачи механики сплошной среды с подвижными границами. Киев: Наук. думка, 1985. 125 с.
- [11] Крутиков В.С. // Акустический журнал. 1996. Т. 42. № 4. С. 534–540.
- [12] Слепян Л.И. // Докл. АН СССР. 1985. Т. 282. № 4. С. 809–813.