01;08

Параболические уравнения с зависимостью от времени для двумерных акустических волноводов

© *М.Ю. Трофимов*

Тихоокеанский океанологический институт ДВО РАН, Владивосток
E-mail: root%dan86@poi.marine.su

Поступило в Редакцию 9 марта 2000 г.

Методом многих масштабов получены параболические уравнения с зависимостью от времени для амплитуды пакета быстро осциллирующих волн, распространяющихся в двумерном нестационарном волноводе. Производится сравнение с другими известными уравнениями.

В работах [1,2] методом формальной факторизации оператора Гельмгольца и методом многих масштабов были выведены параболические уравнения с зависимостью от времени, описывающие распространение звука в двумерных и трехмерных волноводах. В отличие от стационарных параболических уравнений [3,4] они не имеют вид амплитудных уравнений для огибающих волновых пакетов и содержат трудно трактуемые члены с интегральными операторами. Методы решения таких уравнений по необходимости сложны.

В настоящей работе с помощью обобщенного метода многих масштабов [5] выведены параболические уравнения с зависимостью от времени, имеющие амплитудный характер. Эти уравнения свободны от предположений о малом отличии показателя преломления от константы и независимости плотности от горизонтальной переменной, сделанных в [1–4], и после приведения к характеристическим переменным решаются разработанными для стационарных уравнений средствами.

Мы будем исходить из волнового уравнения для двумерных нестационарных сред [6], которое в медленных переменных $T = \epsilon t$, $X = \epsilon x$,

$Z = \epsilon^{1/2}z$ записывается как

$$\epsilon^2 \left(\frac{1}{\rho} p_X\right)_X + \epsilon \left(\frac{1}{\rho} p_Z\right)_Z - \epsilon^2 \left(\frac{1}{\rho} n^2 p_T\right)_T = 0, \qquad (1)$$

где ϵ — малый параметр, p — акустическое давление, ρ — плотность, $n = 1/c$ — показатель преломления, c — скорость звука. Переменные обезразмерены с использованием шкалы длины $\bar{l}$, шкалы времени $\bar{l}/\bar{c}$ (где $\bar{c}$ — типичное значение скорости звука) и шкалы плотности $\bar{\rho}$ (типичное значение плотности).

Уравнение (1) обычно рассматривается в полосе $-H \leqslant z \leqslant 0$, конкретный вид граничных условий для настоящей работы несуществен.

Следуя обобщенному методу многих масштабов [5], введем быструю переменную $\eta = (1/\epsilon)\theta(X, Z, T)$ и постулируем разложения

$$n = n_0(X, T) + \epsilon n_1(X, T, z) + \ldots,$$

$$p = p_0(X, T, Z, \eta) + \epsilon p_1(X, T, Z, \eta) + \ldots,$$

где явно указана зависимость членов разложений от независимых переменных. Относительно ρ мы предположим только, что оно не зависит от η, $\rho = \rho(X, T)$.

Подставим эти разложения в уравнение (1), одновременно преобразуя частные производные по правилу:

$$\frac{\partial}{\partial X} \to \frac{\partial}{\partial X} + \frac{1}{\epsilon}\theta_X \frac{\partial}{\partial \eta},$$

аналогично для переменных Z, T. Отделяя в полученных соотношениях множители при разных степенях ϵ, получаем индексированное порядками ϵ семейство краевых задач.

В порядке $O(\epsilon^{-1})$ получается соотношение $(\theta_Z)^2 p_{0\eta\eta} = 0$, которое мы удовлетворим, положив, что θ не зависит от Z.

В порядке $O(\epsilon^0)$ получаем уравнение Гамильтона–Якоби

$$(\theta_X)^2 - \eta_0^2(\theta_T)^2 = (\theta_X + n_0\theta_T)(\theta_X - n_0\theta_T) = 0. \qquad (2)$$

Далее, рассматривая волны, распространяющиеся в положительном направлении, будем принимать в качестве уравнения Гамильтона–Якоби первый сомножитель в (2).

Уравнение в порядке $O(\epsilon^1)$ не содержит p_1 в силу (2). Подстановка в это уравнение решения вида $p_0 = A(X, T, Z)\phi(\eta)$ показывает, что без потери общности можно положить $\phi(\eta) = \exp(i\eta)$, $\mathrm{Im}\eta \geqslant 0$, после чего мы получаем уравнение для амплитуды A:

$$2in_0\omega\frac{1}{\rho}[A_X + n_0A_T] + \left(\frac{1}{\rho}A_Z\right)_Z + \chi A = 0, \tag{3}$$

где $\omega = -\theta_T$ — локальная частота.

$$\chi = \left\{\left[\left(\frac{1}{\rho}n_0\right)_X + n_0\left(\frac{1}{\rho}n_0\right)_T\right]\omega i + 2\frac{1}{\rho}n_0n_1\omega^2\right\}. \tag{4}$$

Аналогичные рассмотрения в порядке $O(\epsilon^2)$ дают уравнение

$$2in_0\omega\frac{1}{\rho}[B_X + n_0B_T] + \left(\frac{1}{\rho}B_Z\right)_Z + \chi B + \mathcal{F} = 0, \tag{5}$$

где

$$\mathcal{F} = \left(\frac{1}{\rho}A_X\right)_X - \left(\frac{1}{\rho}n_0^2A_T\right)_T,$$

B — амплитуда для p_1, $p_1 = B(X, T)\exp(i\eta)$.

Сравним полученные уравнения с широкоугольным параболическим уравнением [4]. Рассмотим стационарный случай с гармонической зависимостью от времени $\omega = \mathrm{const}$, $A_T = B_T = 0$. Параметры среды также полагаем не зависящими от времени. Кроме того, примем использованные в [3,4] предположения $n_0 = \mathrm{const} = 1$, $\rho = \mathrm{const}$. Уравнения (3), (5) принимают вид

$$2\omega iA_X + A_{ZZ} + 2n_1\omega^2A = 0, \tag{6}$$

$$2\omega iB_X + B_{ZZ} + 2n_1\omega^2B + A_{XX} = 0. \tag{7}$$

Введем амплитуду $C = A + \epsilon B$. Сложим уравнение (6) с умноженным на ϵ уравнением (7), выражая A_{XX} с помощью продифференцированного по X уравнения (6). После некоторых преобразований получим, пренебрегая величинами порядка $O(\epsilon^2)$:

$$\left(1 + \frac{1}{4}\epsilon Q\right)C_X - i\omega\frac{1}{2}QC + \frac{1}{2}\epsilon n_{1X}C = 0, \tag{8}$$

где

$$Q = 2n_1 + \frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2}{\partial Z^2}.$$

Малый параметр ϵ убирается из уравнения (8) после возвращения к исходным переменным $z = (1/\sqrt{\epsilon})Z$, $x = (1/\epsilon)X$ и введения величины $n_1 = \epsilon n_1$, после чего это уравнение только членом $(1/2)n_{1x}C$ отличается от широкоугольного параболического уравнения с дробно-линейной аппроксимацией Паде корня квадратного из Q [4]. Отметим, что этот член не может быть получен методом формальной факторизации оператора Гельмгольца, примененным в [4], вследствие обычного для этого метода предположения о коммутируемости Q и дифференцирования по x.

Для уравнения (2), (3) и (5) в задачах подводной акустики обычно ставится задача Коши с переменной X как эволюционной, которую удобно решать с помощью перехода к характеристическим переменным s, τ, задаваемым условиями [7]:

$$s = X, \quad \frac{dT}{ds} = n_0(s, T(s)), \quad \tau = T(0).$$

В этих переменных задача Коши с начальными условиями при $X = 0$ сводится к соотношениям

$$\theta(s,\tau) = \theta(0,\tau) = \theta_0(\tau),$$

$$\omega(s,\tau) = \omega(0,\tau)\exp\left(\int_0^s n_{0T}\,ds\right)$$

и последовательному решению семейства зависящих от τ как от параметра задач Коши

$$2in_0\omega\frac{1}{\rho}A_s + \left(\frac{1}{\rho}A_Z\right)_Z + \chi A = 0,$$

$$A(0,\tau,Z) = A_0(\tau,Z), \tag{9}$$

$$2in_0\omega\frac{1}{\rho}B_s + \left(\frac{1}{\rho}B_Z\right)_Z + \chi B + \mathcal{F} = 0,$$

$$B(0,\tau,Z) = B_0(\tau,Z). \tag{10}$$

Как легко показать, последующие по порядку ϵ приближения имеют такой же вид, и поэтому схема решения задачи (2), (3), (5) может быть использована для дальнейшего уточнения решения. Для решения задач (9), (10) годятся средства, разработанные для решения классического стационарного узкоугольного параболического уравнения [3].

Работа поддержана РФФИ, проект 99–05–39140.

Список литературы

[1] *Collins M.D.* // J. Acoust. Soc. Amer. 1988. V. 84. P. 2114-2125.
[2] *Orchard B.J., Siegmann W.L., Jacobson J.* // J. Acoust. Soc. Amer. 1992. V. 91. P. 788–801.
[3] *Tappert F.* Wave Propagation and Underwater Acoustics/ Ed. J.B. Keller, J.S. Papadakis. Lecture Notes in Physics. V. 70. Berlin: Springer-Verlag. 1977.
[4] *Green R.R.* // J. Acoust. Soc. Amer. 1984. V. 76. P. 1764–1772.
[5] *Nayfeh A.H.* Perturbation methods. N.Y.: John Wiley & Sons, 1973.
[6] *Бреховских Л.М., Годин О.А.* Акустика слоистых сред. М.: Наука, 1989. 416 с.
[7] *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М.: Наука, 1964. 830 с.