01;09

"Осцилляции" римановых инвариантов систем дифференциальных гиперболических уравнений

© Ю.Н. Зайко

Поволжская академия государственной службы, Саратов
E-mail: pags@pags.renet.ru

Поступило в Редакцию 2 марта 2000 г.

Рассмотрены осцилляции волнового числа в волновом пакете, возникающие при распространении радиоимпульса в диспергирующей среде, обнаруженные в результате численного исследования. Предложено объяснение этого явления на основе использования уравнений нелинейной геометрической оптики (НГО), для которых волновое число является римановым инвариантом и сохраняется вдоль характеристик уравнений НГО. Осцилляции возникают в области так называемого пересечения характеристик. Показано, что это пересечение является следствием приближения, в котором пренебрегается взаимодействием спектрально-узких волновых пакетов из спектра импульса друг с другом, а сами характеристики являются прямыми. Учет этого взаимодействия приводит к тому, что характеристики не пересекаются, а их форма значительно отличается от прямой, в результате чего внешний наблюдатель, движущийся с постоянной скоростью, многократно пересекает одну и ту же характеристику и наблюдает осциллирующее поведение волнового числа.

К гиперболическим системам уравнений в частных производных (ЧПУ) относятся уравнения, характеристики которых вещественны и различны. К такому типу принадлежат уравнения нелинейной геометрической оптики:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + v_g \cdot \frac{\partial k}{\partial x} = 0,$$
$$\frac{\partial E_k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(v_g \cdot E_k) = 0, \tag{1}$$

$k = \Phi_x(x,t)$ — волновое число, $v_g = \partial\omega/\partial k$ — групповая скорость, $\omega = -\Phi_t(x,t)$ — частота; $E_k \sim a_k^2$ — спектральная плотность энергии, a_k — амплитуда спектрально-узкого волнового пакета. Уравнения (1) интересны и сами по себе и как хорошее приближение для описания многих систем, допускающих распространение волн. Одним из римановых инвариантов (РИ) (1) является $k(x,t)$, которое сохраняется вдоль характеристики, определяемой уравнением $dx/dt = v_g$. Одним из способов решения гиперболических ЧПУ является интегрирование вдоль характеристик. Напомним, что речь идет о нахождении решения (1) на плоскости x, t при начальном условии $k(x, t = 0) = F(x)$. Такой метод позволяет построить решение (1) вне области так называемого пересечения характеристик. Эта область на плоскости x, t ограничена кривой с особенностью в точке с координатами:

$$t^* = \left[v_g' \cdot \left(\frac{\partial k}{\partial x}\right)_{t=0}\right]^{-1}, \qquad x^* = v_g \cdot t^*. \tag{2}$$

В этой области обычное решение (1) становится неоднозначным, что недопустимо. Обычно поступают так:

1. Строят разрывное решение (1) типа ударной волны без структуры, т.е. с нулевой шириной фронта. Распространение этого разрыва описывается некоторой кривой на плоскости x, t, начинающейся в точке (2) [1].

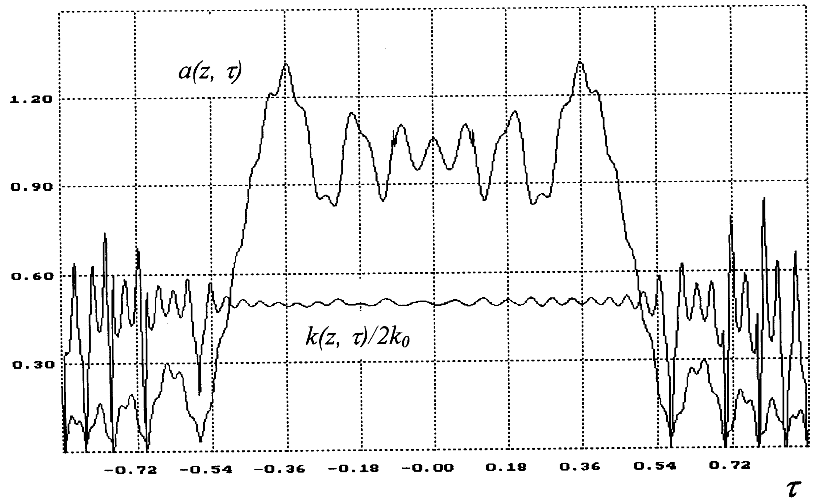
2. Дополняют (1) членами с высшими производными, отвечающими, например, учету вязкости в исходных уравнения. Тогда возникающая ударная волна имеет конечную ширину фронта, в пределах которого решение осциллирует [2].

Однако перечисленные случаи не исчерпывают всего многообразия гиперболических ЧПУ. На рисунке представлены результаты расчета прохождения импульса волны H_{10} с прямоугольной огибающей в металлическом волноводе [3]. Задача сводится к нахождению решения уравнения Клейна–Гордона с соответствующими граничными условиями. Эти уравнения не содержат высших производных, а решение осциллирует. Значит причина осцилляций в другом.

Для объяснения причин такого поведения $k(x,t)$ или $\omega(x,t)$ выделим в спектре импульса два спектрально-узких волновых пакета вблизи k_1 и k_2 и запишем нелинейные дисперсионные уравнения для них:

$$\omega_1 = \omega_0(k_1) + \sigma_1 \cdot a_1^2 + \mu_1 \cdot a_1^2 \cdot a_2^2 + \dots$$

$$\omega_2 = \omega_0(k_2) + \sigma_2 \cdot a_2^2 + \mu_2 \cdot a_2^2 \cdot a_1^2 + \dots \tag{3}$$



Зависимость амплитуды $a(z,\tau)$ и волнового числа $k(z,\tau)$ для радиоимпульса (РИ) волны H_{10} с прямоугольной огибающей, распространяющегося в прямоугольном металлическом волноводе без затухания. $z = x \cdot |k''(\omega_0)|/T^2$, $\tau = (t - x \cdot k'(\omega_0))/T$; $x,\ t$ — координата и время; ω_0, T — несущая частота РИ и его длительность; $k_0 = k(\omega_0)$ — решение дисперсионного уравнения. Параметры импульса: $(\pi \cdot z \cdot |k''(\omega_0)|)^{1/2} = 0.14$; $z \cdot k_0 = 100$; $z \cdot k_0'/T = 0.1$; $a(0,\tau) = 1$ при $|\tau| \leq T/2$; $a(0,\tau) = 0$ при $|\tau| > T/2$. Расчет выполнен во втором приближении теории дисперсии.

Члены $\sim \sigma_{1,2}$ рассматривались Уиземом [1], что привело к расщеплению характеристик $(i = 1, 2)$

$$\frac{dx}{dt} = v_g(k_i) \pm \left[\sigma_i \cdot v_g'(k_i)\right]^{1/2} \cdot a_i. \tag{4}$$

Члены $\sim \mu_{1,2}$ соответствуют учету взаимодействия спектрально-узких волновых пакетов и могут быть получены в рамках гамильтоновского формализма [4] с помощью вычисления двухчастичной функции Грина [5]. Зависимостью величин σ и μ от k, как и в [1], пренебрегаем, т.к. учет этой зависимости приведет лишь к их перенормировке. Выражения (3) подставляем в (1) и ищем решение в виде $k_{1,2}$,

$a_{1,2}^2 \sim \exp(j\Omega t - jqx)$. В результате получаем $(i = 1, 2)$:

$$(K_1 - 1) \cdot (K_2 - 1) = 4\mu_1 \cdot \mu_2 \cdot \frac{a_1^2 \cdot a_2^2}{\sigma_1 \cdot \sigma_2};$$

$$K_i = \frac{1}{\sigma_i \cdot v'_{gi}} \cdot \left(\frac{V - v_{gi}}{a_i}\right)^2, \quad V = \frac{\Omega}{q}. \tag{5}$$

Полученный результат говорит о том, что учет взаимодействия спектрально узких волновых пакетов приводит к непересечению характеристик. В формировании решения принимает участие много таких пакетов. В результате форма характеристики может значительно отличаться от прямой. Внешний наблюдатель, движущийся со скоростью u, которому на плоскости x, t соответствует прямая $dx/dt = u$, многократно пересекает каждую характеристику, вдоль которой значение $k(x, t)$ — римановского инварианта, остается постоянным. Наблюдателю же кажется, что $k(x, t)$ "осциллирует" с частотой

$$f = T \cdot v_g^2 \cdot \left(\frac{\partial k}{\partial x}\right)_{t=0} \cdot \frac{x^*}{x}, \tag{6}$$

T — длительность импульса [3]. Осцилляции параметров волн в различных средах неоднократно обнаруживались различными авторами, исследовавшими решения волновых уравнений, как точные [6], так и численные [7], однако до сих пор им не удавалось найти физического объяснения.

Список литературы

[1] *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны / Пер. с англ. М.: Мир, 1977. 622 с.

[2] *Карпман В.И.* Нелинейные волны в диспергирующих средах. М.: Наука, 1973. 176 с.

[3] *Зайко Ю.Н.*// Изв. вузов. Радиофизика. 1989. Т. 32. № 12. С. 1558–1560.

[4] *Захаров В.Е., Кузнецов Е.А.* // УФН. 1997. Т. 167. № 11. С. 1137–1167.

[5] *Каданов Л.П., Бейм Г.* Квантовая статистическая механика / Пер. с англ. М.: Мир. 1964. 255 с.

[6] *Шварцбург А.Б.* // УФН. 1998. Т. 168. № 1. С. 85–103.

[7] *Вербин Ю.П.* // РЭ. 1995. Т. 40. № 8. С. 1169–1176.