01;05.4

Нелинейные термомагнитные волны конечной амплитуды в сверхпроводниках

© *Н.А. Тайланов, У.Т. Яхшиев*

Кафедра теоретической физики и НИИ прикладной физики,
Национальный университет Узбекистана
E-mail: taylanov@iaph.silk.org

Поступило в Редакцию 12 мая 2000 г.

Рассмотрен вопрос о динамике тепловых и электромагнитных возмущений в сверхпроводниках. Показано, что при определенных условиях на поверхности образца существуют нелинейные тепловые или электрические диссипативные структуры с конечной амплитудой, которые двигаются с постоянной скоростью. Изучена качественная картина возникновения таких структур и оценена их скорость распространения.

В настоящее время сверхпроводящие системы с высокими критическими полями и высокой критической плотностью тока широко внедряются в различные области современной техники. Успешная эксплуатация сверхпроводящих материалов требует особых мер, предостерегающих от теплового и магнитного разрушения сверхпроводимости и перехода ее в резистивное состояние. По этой причине при изучении свойств сверхпроводников одной из главных проблем является тепловое разрушение сверхпроводящего состояния, обусловленное диссипативными и нелинейными эффектами при вязком движении магнитного потока. В связи с этим в последнее время резко возрос интерес к исследованию диссипативных и нелинейных эффектов в сверхпроводниках.

Данная работа посвящена анализу нелинейной динамики эволюции взаимосвязанных тепловых и электромагнитных возмущений в сверхпроводнике, обусловленных диссипативными эффектами при вязком движении магнитного потока. На основе нелинейных уравнений, описывающих динамику развития неустойчивости, изучена структура и эволюция нелинейных стационарных термомагнитных бегущих волн.

Эволюция тепловых и электромагнитных возмущений в сверхпроводнике описывается одномерным уравнением теплопроводности [1]

$$\nu \frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \mathbf{jE}, \tag{1}$$

уравнением Максвелла

$$\frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2} \tag{2}$$

и связанным с ними уравнением критического состояния

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_c(T, \mathbf{H}) + \mathbf{j}_r(\mathbf{E}). \tag{3}$$

Здесь ν и k — коэффициенты теплоемкости и теплопроводности, $\mathbf{j}_c$ — критическая и $\mathbf{j}_r$ — резистивная плотности тока.

Рассматриваемая модель является существенно нелинейной из-за наличия в правой части (1) члена, описывающего джоулево тепловыделение в области резистивной фазы. Точное решение существенно нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа (1)–(3) отсутствует.

Для автомодельных бегущих волн $\xi(x, t) = x - vt$ исходные дифференциальные уравнения (1)–(3) приобретают следующий вид:

$$-\nu v \frac{\partial T}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left[k \frac{\partial T}{\partial \xi} \right] + jE, \tag{4}$$

$$\frac{\partial E}{\partial \xi} = -\frac{4\pi v}{c^2} j, \tag{5}$$

$$E = \frac{v}{c} H. \tag{6}$$

Соответствующие тепловые и электродинамические граничные условия к уравнениям (4)–(6) имеют вид

$$T(\xi \to +\infty) = T_0, \quad \frac{\partial T}{\partial \xi}(x \to -\infty) = 0,$$

$$E(\xi \to +\infty) = 0, \quad E(\xi \to -\infty) = E_e, \tag{7}$$

где T_0 — начальная температура, E_e — постоянное электрическое поле.

В виду значительных аналитических трудностей, возникающих при решении задачи мы ограничимся рассмотрением модели критического состояния Бина–Лондона и предполагаем, что $\frac{\partial j_c}{\partial H} = 0$ [2]. Характерная зависимость $j_r(E)$ в области достаточно сильных электрических полей $(E > E_f)$ может быть аппроксимирована кусочно-линейной функцией $j_r \approx \sigma_f E$, где σ_f — эффективная проводимость. В области малых полей $(E < E_f)$ справедлива зависимость $j(E) \approx j_1 \ln \frac{E}{E_0}$, где j_1 — характерный разброс локальной плотности тока, связанный с неоднородностью силы пининга, и составляет значение порядка $j_1 \approx 0.01 j_c$, $E_0 = \text{const}$. Отметим, что указанная нелинейная зависимость j от E обусловлена термоактивационным криптом потока, обнаруженным в ранних экспериментах (см. [3]). Область термоактивационного крипа потока является ведущим механизмом диссипации энергии при распространении магнитного потока в глубь образца, что должно сказаться и на характере распространения нелинейной термомагнитной волны в исследуемой системе.

Исключив переменные $T(\xi)$ и $H(\xi)$, с помощью (4) и (6) получим при учете граничных условий (7) уравнение для распределения $E(\xi)$:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + \beta \left[1 + \frac{j_1}{\sigma_d E}\tau\right] \frac{\partial E}{\partial z} + \beta^2 \tau \left[\frac{j_0}{\sigma_d} + \frac{j_1}{\sigma_d} \ln \frac{E}{E_0}\right] = \frac{E^2}{2E_k}. \qquad (8)$$

Здесь введены следующие безразмерные параметры:

$$z = \frac{\xi}{L}, \quad \beta = \frac{v t_k}{L}, \quad t_k = \frac{\nu L^2}{k},$$

$$\tau = \frac{4\pi\sigma_f k}{c^2 \nu}, \quad E_k = \frac{k}{a L^2}, \quad L = \frac{c H_e}{4\pi j_0},$$

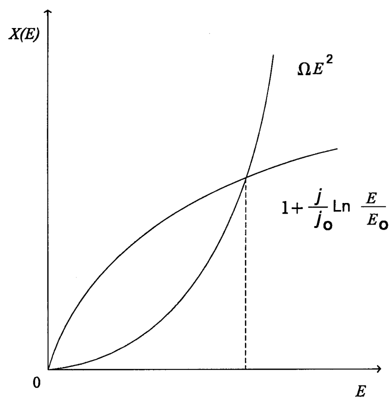
где L — глубина проникновения магнитного потока в глубь образца, σ_d — дифференциальная проводимость, a — постоянный параметр, H_e — внешнее магнитное поле.

Состояния равновесия определяется из уравнения [4]

$$\Omega E^2 = X(E) = 1 + \frac{j_1}{j_0} \ln \frac{E}{E_0}, \qquad (9)$$

где

$$\Omega = \frac{\sigma_d}{2\beta^2 \tau j_0 E_k}.$$



Кривые, описываемые левой и правой сторонами уравнения (9).

Из рисунка видно, что существует только одна точка пересечения кривых $y = \Omega E^2$ и $y = 1 + \frac{j_1}{j_0}\ln\frac{E}{E_0}$, т.е. одно устойчивое состояние равновесия. Устойчивость этого состояния определяется знаком производной $\frac{\partial^2 E}{\partial z^2}$ вблизи точки равновесия. Скорость волны v_E находится из условия (9) с учетом граничных условий и имеет вид

$$v_E = \frac{L}{t_k}E_e\left[2\tau\frac{j_0E_k}{\sigma_d}\left(1 + \frac{j_1}{j_0}\ln\frac{E_e}{E_0}\right)\right]^{-1/2}. \tag{10}$$

Нетрудно получить уравнение, описывающее распределение нелинейной H-волны, воспользовавшись соотношением (6). Тогда скорость v_H волны H дается формулой

$$v_H = \frac{cE}{H_e}\exp\left[\frac{\sigma_d}{2\tau j_1}E_k\left(\frac{LH_e}{ct_k}\right)^2 - \frac{j_0}{j_1}\right]. \tag{11}$$

Скорость волны v_H экспоненциально возрастает с увеличением амплитуды H_e. При $H_e < H_a$, определяемой соотношением

$$H_a = \frac{ct_k}{L}\left[\frac{2\tau j_0E_k}{\sigma_d}\right]^{1/2}, \tag{12}$$

скорость волны пренебрежимо мала, что соответствует крипу потока. При $H_e = H_a$ достигается конечная скорость распространения волны. Максимальная величина разогрева сверхпроводника в области непосредственно перед фронтом волны, при которой выполняется последнее соотношение, есть

$$\frac{T - T_0}{T_0} = \frac{H_e^2}{8\pi\nu T_0}. \qquad (13)$$

В заключение заметим, что учет нелинейной зависимости плотности тока j от напряженности электрического поля E не изменяет основные качественные результаты, поскольку характер состояния равновесия на фазовой плоскости не изменяется существенным образом.

Список литературы

[1] *Максимов И.Л., Мастаков Ю.Н., Тайланов Н.А.* // ФТТ. 1986. Т. 28. С. 2323.
[2] *Bean C.P.* // Phys. Rev. Lett. 1962. V. 8. P. 250.
[3] *Минц Р.Г., Рахманов А.Л.* Неустойчивости в сверхпроводниках. М.: Наука, 1984.
[4] *Карпман В.И.* Нейлинейные волны в диспергирующих средах. М.: Наука, 1973.