05;12

Развитие неустойчивости при движении фазовой границы металл–изолятор

© Ю.Б. Кудасов, И.В. Макаров

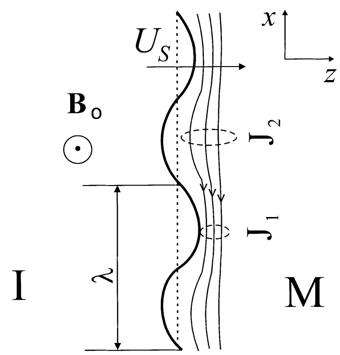
Российский федеральный ядерный центр (ВНИИЭФ), Саров

Поступило в Редакцию 3 мая 2000 г.

Рассмотрена диффузия магнитного поля в проводник, в котором под действием джоулева разогрева происходит фазовый переход в диэлектрическое состояние. Исследовано развитие термомагнитной неустойчивости границы в режиме быстрой волны в зависимости от волнового числа на линейной стадии. Оценено влияние неустойчивости фазовой границы на работу быстродействующего размыкателя электрического тока на основе твердого раствора $(V_{1-X}Cr_X)_2O_3$.

В работе [1] исследовалось проникновение магнитного поля в вещество, в котором под действием джоулева разогрева происходит фазовый переход металл–изолятор I-рода. Для плоского одномерного случая были найдены дозвуковые стационарные решения, когда профиль магнитного поля, границы фаз и т.д. движутся с постоянной скоростью U_s. Конкретные вычисления были выполнены для твердого раствора $(V_{1-X}Cr_X)_2O_3$. Данное явление может использоваться в мощных импульсных твердотельных размыкателях нового типа [1,2]. Наиболее перспективным является режим быстрой волны [1], когда U_s меньше скорости звука в металлической или диэлектрической фазах, но больше адиабатической скорости звука в смешанной (гетерогенной) фазе. Тогда гетерогенная область отсутствует и формируется резкая граница металл–изолятор [1].

С точки зрения практического применения важным вопросом является устойчивость фазовой границы металл–изолятор, движущейся по мере прогрева среды. Обычные гидродинамические неустойчивости в данном случае практически не развиваются, поскольку разница плотностей фаз очень мала (порядка 1%) и малы массовые скорости движения среды. Поэтому доминирует неустойчивость термомагнитного типа. На рисунке показана картина неоднородного распределения тока вблизи фазовой границы с учетом возмущения границы. Вблизи впадин



Движение возмущенной фазовой границы металл–изолятор: **I** — изолятор, **M** — металл, **J** — линии тока при неоднородном прогреве металлической фазы.

(изолирующая фаза вдается в металлическую) линии тока сгущаются, а в горбах (металлическая фаза вдается в изолирующую) линии тока разрежены. Сгущение и разрежение линий тока приводит к неоднородному прогреву металлической фазы $(V_{1-X}Cr_X)_2O_3$ и росту возмущения.

В [1] показано, что при диффузии магнитного поля в $(V_{1-X}Cr_X)_2O_3$ массовые скорости движения малы и магнитное число Рейнольдса мало, т. е. движением среды можно пренебречь. Нас будет интересовать быстрый режим движения волны перехода, когда имеется резкая граница фаз. Проводимость в каждой из фаз считается постоянной, поэтому запишем уравнение диффузии магнитного поля в виде

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \chi \Delta B, \tag{1}$$

где $\chi = \frac{c^2}{4\pi\mu\sigma}$ — коэффициент магнитной диффузии, c — скорость света в вакууме, μ — магнитная проницаемость и σ — проводимость металлической фазы $(V_{1-X}Cr_X)_2O_3$, а $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$. Поскольку фазовый переход происходит вследствие джоулева разогрева среды, скорость движения фазовой границы определяется уравнением теплового баланса

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \sigma E^2, \tag{2}$$

где Q — удельное количество теплоты, E — напряженность электрического поля.

На рисунке схематично изображено движение фазовой границы металл–изолятор в веществе под действием магнитного поля напряженностью B_0 со скоростью U_s. Магнитное поле перпендикулярно плоскости рисунка и считается постоянным в диэлектрической фазе. Предположим, что граница между фазами слабо возмущена. С течением времени фазовая граница смещается в сторону металлической фазы вследствие джоулева разогрева.

Будем считать, что в линейной стадии роста возмущение границы металл–изолятор имеет вид

$$a = a_0 e^{\omega t} \cos kx, \tag{3}$$

где a_0 — начальная амплитуда возмущения границы (малый параметр), k — волновое число. Для линейного случая должно выполняться условие $a \gg \lambda$, где λ — длина волны возмущения и ω — инкремент нарастания амплитуды возмущения. Решение уравнения диффузии в металлической фазе ищем в виде

$$B(x,z,t) = B_0 \left(e^{-\frac{z-U_s t}{\delta_1}} + \frac{a_0 e^{\omega t}\cos(kx)}{\delta_1} e^{-\frac{z-U_s t}{\delta_2}} \right), \tag{4}$$

где δ_1 — глубина скин-слоя невозмущенной границы металл–изолятор, δ — глубина скин-слоя для неоднородной, т.е. зависящей от x, составляющей магнитного поля, B_0 — магнитное поле в изоляторе. Подвижное граничное условие определяется условием $B(x,z,t) = B_0$. Разложим левую часть этого уравнения в ряд Тейлора вблизи точки $z = U_s t$ и удержим только линейные по a_0 члены. Тогда видно, что подвижное граничное условие имеет вид $z_{MI} - U_S t = a$. Кроме того, имеются два других граничных условия: $B(x,-\infty,t) - = B_0$ и $B(x,\infty,t) = 0$.

Подставив решение (4) в уравнение (1), получим уравнение для нахождения коэффициентов

$$\frac{U_s}{\delta_1} e^{-\frac{z-U_s t}{\delta_1}} + \left(\omega + \frac{U_s}{\delta_2}\right) \frac{a_0}{\delta_1} e^{\omega t}\cos(kx) e^{-\frac{z-U_s t}{\delta_2}}$$
$$= \frac{\chi}{\delta_1^2} e^{-\frac{z-U_s t}{\delta_1}} + \left(\frac{\chi}{\delta_2^2} - k^2\chi\right) \frac{a_0}{\delta_1} e^{\omega t}\cos(kx) e^{-\frac{z-U_s t}{\delta_2}}. \tag{5}$$

Поскольку a_0 — произвольное малое число, уравнение (5) разбивается на два независимых уравнения. Первое из них приводит к выражению для глубины скин-слоя невозмущенной границы $\delta_1 = \chi/U_s$, а из второго получаем квадратное уравнение $\chi/\delta_2^2 - U_s/\delta_2 - k^2\chi - \omega = 0$, корни которого есть

$$\delta_2 = \frac{2}{\frac{U_s}{\chi} \pm \sqrt{\left(\frac{U_s}{\chi}\right)^2 + 4\left(k^2 + \frac{\omega}{\chi}\right)}}. \tag{6}$$

Граничным условием удовлетворяет только положительный корень $\delta_2 > 0$. Чтобы связать k и ω, воспользуемся уравнением теплового баланса (2). Выразим $\mathbf{E}$ через $\mathbf{B}$ из уравнения Максвелла $\operatorname{rot}\mathbf{B} = -\frac{4\pi}{c}\sigma\mathbf{E}$ и подставим решение (4) в (2). При возведении компонент вектора $\mathbf{B}$ в квадрат ограничимся членами первого порядка малости по амплитуде возмущения. Затем проинтегрируем полученное выражение по времени от $-\infty$ до t. Тогда выражение для теплоты приводится к виду

$$Q(x,z,t) = \frac{c^2B_0^2}{16\pi^2\sigma\rho}\left(\frac{1}{2U_s\delta_1}\, e^{-\frac{2(z-U_st)}{\delta_1}} + \frac{2a_0\cos(kx)}{\delta_1(\delta_2\delta_1\omega + U_s(\delta_2+\delta_1))}\, e^{-\frac{z(\delta_2+\delta_1)-(\delta_1\delta_2\omega+U_s(\delta_2+\delta_1))t}{\delta_2\delta_1}}\right). \tag{7}$$

На границе температура должна быть равна температуре фазового перехода T_{MI}. В работе [1] показано, что теплоемкость можно считать постоянной. Тогда условие на границе [1] можно переписать с учетом возмущения фазовой границы как

$$Q(x,z,t) = Q_{MI} = c_V\Delta T. \tag{8}$$

Отсюда получим следующее соотношение:

$$1 = e^{-\frac{2(z-U_st)}{\delta_1}} + \frac{c^2a_0\cos(kx)}{\pi\sigma\delta_1(\delta_2\delta_1\omega + U_s(\delta_2+\delta_1))}\, e^{\omega t}e^{-\frac{(z-U_st)(\delta_2+\delta_1)}{\delta_2\delta_1}}. \tag{9}$$

Экспоненты в правой части этого соотношения разложим в ряд по z и ограничимся членами первого порядка малости по a_0. Далее подставим в правую часть (9) $z = a_0e^{\omega t}\cos kx$ и δ_2 из (6), получим квадратное уравнение

$$\frac{4\delta_1^2\omega^2}{\chi^2} - \frac{4\omega}{\chi} + \left(\frac{1}{\delta_1} - \frac{1}{\delta_1^2} - 4k^2\right) = 0, \tag{10}$$

корни которого есть

$$\omega_{1,2} = \pm\frac{\chi k}{\delta_1}. \tag{11}$$

Начальная амплитуда возмущения предполагалась малой, поэтому следует отбросить решение с отрицательным инкрементом (11), так как оно ведет к неограниченному росту амплитуды возмущения при $t \to -\infty$.

В [1] показано, что для $B_0 = 60\,\mathrm{T}$ скорость движения стационарной волны U_s составляет примерно $3 \cdot 10^5\,\mathrm{cm/s}$. Тогда получаем для $(V_{1-X}Cr_X)_2O_3$, считая проводимость в металлической фазе равной $10^3\,(\Omega\cdot\mathrm{cm})^{-1}$, $\delta_1 \approx 0.27\,\mathrm{cm}$. Отсюда видно, что для процессов длительностью порядка нескольких микросекунд неустойчивости с $k > 1\,\mathrm{cm}^{-1}$ успевают сильно развиться. Рост неустойчивостей при больших k может быть ограничен теплопроводностью. Так, характерное время переноса тепла между впадиной и горбом можно оценить как $(\pi/k)^2 C_p\rho/\alpha$, где $C_p\rho$ — изобарная теплоемкость единицы объема, α — теплопроводность. Характерное время, за которое происходит неоднородный прогрев, составляет δ_2/U_s. Когда эти два времени становятся соизмеримыми, теплопроводность начинает ограничивать скорость роста амплитуды. Но для $(V_{1-X}Cr_X)_2O_3$ мы получаем очень большие значения k, при которых рост амплитуды прекращается ($\sim 10^8\,\mathrm{cm}^{-1}$), т.е. теплопроводность практически не ограничивает роста амплитуды возмущения даже для очень больших k. Отсюда видно, что термомагнитная неустойчивость может оказать сильное влияние на работу размыкателя типа [2].

Работа выполнена при поддержке Международного научно-технического центра (проект # 829).

Авторы признательны профессору Дж. Бруксу и доктору В. Левису за неоценимую поддержку.

Список литературы

[2] *Кудасов Ю.Б.* // ЖТФ. 1998. Т. 68. № 12. С. 43.
[3] *Кудасов Ю.Б.* Патент РФ 2121725 МПК 6H01F7/06, 6H01H36/00. 1998.