01;03

Аналитическое решение задач скольжения с использованием нового кинетического уравнения

© *А.В. Латышев, А.А. Юшканов*

Московский педагогический университет
E-mail: latyshev@orc.ru

Поступило в Редакцию 25 апреля 2000 г.

Предлагается новое кинетическое уравнение, приводящее к правильному (истинному) числу Прандтля. Получено аналитическое решение задач скольжения (о нахождении скоростей изотермического и теплового скольжений). В явном виде выведены формулы для скоростей скольжения. Численные расчеты свидетельствуют о преемственности предлагаемой модели. Сравнение с предыдущими результатами показывает, что полученные в данной статье результаты (для теплового скольжения) лежат между результатами, полученными для Бхатнагар–Гросс–Крук (БГК) модели с постоянной частотой столкновений и результатами, полученными для БГК модели с постоянной длиной свободного пробега. Это соответствует представлению о данной модели как о модели с промежуточным характером частоты столкновений. Важное премущество предлагаемой модели в том, что она содержит параметр и, как следствие, истинное число Прандтля. Отметим, что величины коэффициентов скольжения K_{sl}, K_{Tsl} в новой кинетической модели имеют качественно новый статус. Дело в том, что старые результаты были получены для модели с неправильным числом Прандтля. Поэтому требовалось осуществлять пересчет результатов на истинное число Прандтля. Подобная процедура обладает элементами неоднозначности. Результаты, полученные по новой модели с истинным числом Прандтля, свободны от этого недостатка.

Пусть газ занимает полупространство $x > 0$ над плоской стенкой. Возьмем декартову систему координат с осью x, перпендикулярной стенке, и с плоскостью (y, z), совпадающей со стенкой. Предположим, что вдали от стенки и вдоль оси y задан градиент массовой скорости газа g_v. Задание градиента массовой скорости газа вызывает течение газа вдоль стенки, называемое изотермическим. Это течение рассматривается в отсутствие тангенциального градиента давления. Массовая скорость газа имеет одну тангенциальную составляющую, которая вдали от стенки меняется по линейному закону. Отклонение от линейного распределения происходит вблизи стенки с влое, часто называемом слоем Кнудсена, толщина которого имеет порядок средней длины свободного пробега l. Вне слоя Кнудсена течение газа описывается уравнениями Навье–Стокса, для решения которых требуется поставить граничные условия на стенке. В качестве такого условия принимается экстраполированное значение гидродинамической скорости на стенке — величина U_{sl}. При малых градиентах скорости имеем: $U_{sl} = K_{sl} l g_v$. Задача нахождения скорости изотермического скольжения из решения уравнения Больцмана в слое Кнудсена и называется задачей Крамерса.

Тепловое скольжение — движение газа вблизи неравномерно нагретой стенки. Поток газа возникает в результате столкновений молекул газа с неравномерно нагретой стенкой в пристеночном слое Кнудсена. Вдали от поверхности задан градиент температуры. Искомая скорость скольжения находится как предел

$$U_{sl} = \lim_{x \to \infty} U_y(x).$$

Впервые аналитически задача Крамерса была решена Черчиньяни для БГК-уравнения с постоянной частотой столкновений [1] и с переменной частотой [2] (в том числе и с частотой столкновений, пропорциональной скорости молекул). Тепловое скольжение рассматривалось в [3]. Обе задачи скольжения для модельных кинетических уравнений с частотой столкновений, пропорциональной скорости молекул, рассматривались и в наших работах [4,5]. Численные результаты с использованием нелинейного уравнения Больцмана по задачам скольжения проделаны в [6,7].

В линеаризованном и стационарном случае функция распределения (ФР) представима в виде $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = f_0(y)(1 + \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}))$, где $f_0(y)$ — локально-максвелловская ФР:

$$f_0(y) = n(y) \left(\frac{m}{2\pi k T(y)} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT(y)} \right).$$

Для рассматриваемых задач скольжения линеаризованное стационарное кинетическое уравнение можно записать в следующем виде:

$$\mathbf{C}\nabla\varphi + C_y(C^2 - 5/2)g_t = J[\varphi],$$

где $\mathbf{C} = \sqrt{\beta}\,\mathbf{v}$ — безразмерная скорость молекул, $\beta = m/2kT$, g_t — логарифмический градиент температуры. Для БГК-уравнения с постоянной частотой столкновений интеграл столкновений (ИС) имеет вид:

$$J[\varphi]=\sqrt{\beta}\nu\left[2\mathbf{CU}+\frac{\delta n}{n_0}+\left(C^2-\frac{3}{2}\right)\frac{\delta T}{T_0}-\varphi\right].$$

Здесь

$$\mathbf{U}=\pi^{-3/2}\int\exp\left(-C^2\right)\mathbf{C}\varphi d^3C,$$

$$\frac{\delta n}{n_0}=\pi^{-3/2}\int\exp(-C^2)\varphi d^3C,$$

$$\frac{\delta T}{T_0}=\frac{2}{3}\pi^{-3/2}\int\exp\left(-C^2\right)\left(C^2-\frac{3}{2}\right)\varphi d^3C.$$

Для БГК-уравнения с частотой столкновений, пропорциональной скорости молекул (в этом случае постоянна длина свободного пробега) линеаризованный ИС имеет вид [9]:

$$J[\varphi]=\sqrt{\beta}\nu\left[\frac{3}{4}\sqrt{\pi}\mathbf{CU}_*+\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\delta n_*}{n_0}+\frac{\sqrt{\pi}}{4}\left(C^2-2\right)\frac{\delta T_*}{T_0}-\varphi\right].$$

Здесь

$$\mathbf{U}_*=\pi^{-3/2}\int C'\exp(-C'^2)\mathbf{C}'\varphi d^3C',$$

$$\frac{\delta n_*}{n_0}=\pi^{-3/2}\int C'\exp(-C'^2)\varphi d^3C',$$

$$\frac{\delta T_*}{T_0}=\pi^{-3/2}\int C'\exp(-C'^2)(C'^2-2)\varphi d^3C'.$$

В данной работе рассматривается простейшее нетривиальное обобщение рассмотренных ИС, учитывающее возможность более сложной зависимости частоты столкновений от скорости молекул.

Будем рассматривать следующий линеаризованный ИС:

$$J[\varphi]=\sqrt{\beta}\nu\Big[2\alpha_{11}C\mathbf{CU}_*+2\alpha_{12}\mathbf{CU}_*+2\alpha_{21}C\mathbf{CU}+2\alpha_{22}\mathbf{CU}$$
$$+\frac{\sqrt{\pi}}{2}C\frac{\delta n_*}{n_0}+\frac{\sqrt{\pi}}{4}C(C^2-2)\frac{\delta T_*}{T_0}-C\varphi\Big].$$

Этот ИС содержит как частные случаи, приведенные выше, следовательно он соответствует смешанной зависимости частоты столкновений от скорости молекул.

ИС должен удовлетворять следующему свойству [8]:

$$\int \exp(-C^2)\varphi J[\psi] d^3C = \int \exp(-C^2)\psi J[\varphi] d^3C. \tag{1}$$

Из свойства (1) следует симметрия двух коэффициентов $\alpha_{12} = \alpha_{21}$. Кроме того, ИС должен удовлетворять законам сохранения числа молекул, импульса и энергии [8]. Учет всех этих требований приводит к следующему виду ИС:

$$J[\varphi] = \sqrt{\beta}\nu C\left[\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\delta n_*}{n_0} + \frac{\sqrt{\pi}}{2}(C^2-2)\frac{\delta T_*}{T_0}\right.$$
$$\left. + 2a_2\mathbf{CU}_* + 2a\frac{\mathbf{CU}}{C} + 2a_1\frac{\mathbf{CU}_*}{C} + 2a_1\mathbf{CU}\right]. \tag{2}$$

Здесь $a_1 = -2\alpha a$, $a_2 = 2\alpha(1+2\alpha a)$, $\alpha = 3\sqrt{\pi}/16$. Параметр a связан с числом Прандтля соотношением

$$\Pr = \frac{8\alpha(1+2a) - 2a}{9\alpha - 2a(1-9\alpha^2)}.$$

В задачах скольжения [8] ФР можно представить в виде $\varphi = C_y h$. Ввиду симметрии задач функция h зависит только от модуля скорости и косинуса угла между направлением движения молекулы и нормалью к поверхности $\mathbf{n}$: $\mu = (\mathbf{Cn})/C$, и от одной пространственной координаты x, т. е. $h = h(x, C, \mu)$. Тогда стационарное кинетическое уравнение с ИС (2) будет иметь следующий вид:

$$\mu\frac{\partial h}{\partial x} + h(x,\mu,C) + g_t\left(C - \frac{5}{2C}\right) = \int k(C,C')h(x,\mu')dm,$$

$$k(C,C') = \frac{a}{C} + a_1 + a_1\frac{C'}{C} + a_2C',$$

$$dm = 2\pi^{-1/2}\exp(-C'^2)C'^4(1-\mu'^2)dC'd\mu'.$$

При $a = 0$ уравнение (3) переходит в известное уравнение (1.2) из [9], которое является БГК-уравнением с частотой столкновений, пропорциональной молекулярной скорости. При получении уравнения (3) было проведено интегрирование по азимуту (углу в плоскости (C_y, C_z)).

Истинному значению числа Прандтля отвечает $a = 3\alpha/(1-6\alpha^2)$.

Граничные условия сформулируются для случая диффузного отражения молекул от стенки:

$$h(0,\mu,C) = 0, \qquad 0 < \mu < 1,$$

$$h(x,\mu,C) = h_{as}(x,\mu,C) + o(1), \quad x \to \infty, \quad -1 < \mu < 0.$$

Здесь

$$h_{as}(x,\mu,C) = 2U_{sl} + 2g_v(x-\mu)g_t(b_0/C + b_1 - C + 5/(2C)),$$

$$b_1 = -\frac{1+2\alpha a}{8\alpha - 2a(1-9\alpha^2)}, \quad b_0 = \frac{a}{8\alpha - 2a(1-9\alpha^2)},$$

причем для истинного значения числа Прандтля ($\Pr \approx 2/3$) $b_1 = -1/2\alpha$, $b_0 = 3/2$.

Разложим задачи скольжения по трем ортогональным направлениям:

$$e_1(C) = 1, \quad e_2(C) = 1/C, \quad e_3(C) = C - x_1 - x_2/C.$$

Числа $x_1 = \alpha/(1-8\alpha^2)$, $x_2 = 2(1-10\alpha^2)/(1-8\alpha^2)$ найдены из соотношений ортогональности

$$\int\limits_0^\infty \exp(-C^2)e_j(C)e_3(C)dC = 0, \qquad j = 1,\ 2.$$

Функцию h будем искать в виде

$$h(x,\mu,C) = \sum_{j=1}^{3} \psi_j(x,\mu)e_j(C).$$

Задачи скольжения теперь эквивалентны двум задачам, одна из которых является векторной (относительно вектора-столбца $\psi = [\psi_1\psi_2]^t$), t — транспонирование, а другая — скалярной (относительно ψ_3). Векторная задача состоит из уравнения

$$\mu\frac{\partial\psi}{\partial x} + \psi(x,\mu) = \frac{3}{4}K\int\limits_{-1}^{1}(1-\mu'^2)\psi(x,\mu')d\mu', \tag{4}$$

где

$$K = \begin{bmatrix} 1 & \gamma_1 \\ 0 & \gamma_2 \end{bmatrix}, \quad \gamma_1 = 2\alpha - \frac{1}{2}a\beta, \quad \gamma_2 = \frac{4a\beta}{3\sqrt{\pi}}, \quad \beta = 1 - \alpha^2,$$

и граничных условий:

$$\psi(0,\mu) = \mathbf{0}, \qquad 0 < \mu < 1, \qquad \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{5}$$

$$\psi(x,\mu) = \psi_{as}(x,\mu) + o(1), \qquad x \to \infty, \qquad -1 < \mu < 0. \tag{6}$$

Здесь

$$\psi_{as}(x,\mu) = \begin{bmatrix} 2U_{sl} + 2g_v(x-\mu) + g_t(b_1 - x_1) \\ g_t(5/2 + b_2 - x_2) \end{bmatrix}.$$

Опуская решение граничной задачи (4)–(6), известное по работам [4,5], приведем формулу для вычисления скорости скольжения:

$$U_{sl} = V_1 g_v + \frac{1}{4(4\alpha - a\beta)} g_t. \tag{7}$$

При $g_t = 0$ из формулы (7) получаем решение задачи Крамерса

$$U_{sl} = 0.58195 g_v. \tag{8}$$

Формула (8) в точности совпадает [4] с формулой для скорости изотермического скольжения газа с частотой, пропорциональной скорости молекул.

При $g_v = 0$ из формулы (7) получаем решение задачи о тепловом скольжении:

$$U_{sl} = \frac{1}{16\alpha - 4a\beta} g_t. \tag{9}$$

Из формулы (9) при $a = 0$ получаем: $U_{sl} = (1/3\sqrt{\pi})g_t = 0.18806 g_t$, что в точности совпадает [4] со скоростью теплового скольжения газа с частотой столкновений, пропорциональной скорости молекул.

Для истинного числа Прандтля из формулы (9) имеем:

$$U_{sl} = \frac{1 - 6\alpha^2}{4\alpha} g_t = 0.25375 g_t.$$

Приведем результаты для газа с постоянной частотой столкновений: $U_{sl} = 1.0161 g_v$, $U_{sl} = 0.3881 g_t$.

Если перейти к размерным переменным, определяя длину свободного пробега согласно Черчиньяни [8] $l = (\eta/\rho)\sqrt{\pi m/2kT}$, то для коэффициентов изотермического и теплового скольжений соответственно получаем

$$K_{sl} = \frac{15}{8} V_1 = 1.09115, \qquad K_{Tsl} = \frac{15}{8}\sqrt{\pi}(0.25375) = 0.84330.$$

Здесь

$$V_1 = \frac{3}{4}\int\limits_0^1 \frac{x(1-x^2)\left(1 + \frac{7}{2}x^2 + \frac{3}{2}x^3 \ln\frac{1-x}{1+x}\right)}{\left[1 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4}x(1-x^2)\ln\frac{1-x}{1+x}\right]^2 + \left[\frac{3}{4}\pi x(1-x^2)\right]^2}\, dx.$$

Численные расчеты дают для величины V_1 следующее значение: $V_1 = 0.581946$.

Для сравнения приведем численные результаты [6], полученные с использованием уравнения Больцмана: $K_{sl} = 1.11414$ и $K_{Tsl} = 1.00866$.

Сравнение с предыдущими результатами показывает, что полученные в данной статье результаты (для теплового скольжения) лежат между результатами, полученными для БГК-модели с постоянной частотой столкновений и результатами, полученными для БГК-модели с постоянной длиной свободного пробега. Это соответствует представлению о данной модели, как о модели с промежуточным характером частоты столкновений. Важное преимущество предлагаемой модели в том, что она содержит параметр и, как следствие, истинное число Прандтля. Отметим, что величины K_{sl}, K_{Tsl} в новой кинетической модели имеют качественно новый статус. Дело в том, что старые результаты были получены для модели с неправильным числом Прандтля. Поэтому требовалось осуществить пересчет результатов на истинное число Прандтля. Подобная процедура обладает элементами неоднозначности. Результаты, полученные по новой модели с истинным числом Прандтля, свободны от этого недостатка.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (код проекта 99–01–00336).

Список литературы

[1] *Cercignani C.* // Ann. Phys. 1962. V. 20. N 3. P. 219–233.
[2] *Cercignani C.* // Ann. Phys. 1966. V. 40. N 3. P. 469–481.
[3] *Loyalka S.K., Cipolla J.W.* // Phys. Fluids. 1971. V. 14. N 8. P. 1656–1661.
[4] *Латышев А.В., Юшканов А.А.* Точные решения граничных задач для модельных уравнений Больцмана с переменной частотой столкновений. Монография. ОТП РАН. Деп. в ВИНИТИ от 25.04.96. № 1360–В 96. 238 с.
[5] *Латышев А.В., Юшканов А.А.* // ЖВММФ. 1997. Т. 37. № 4. 483–493.
[6] *Ohwada T., Sone Y., Aoki K.* Phys. Fluids A. 1989. V. 1. N 9. P. 1588–1599.
[7] *Loyalka S.K.* // Physica A. 1990. V. 163. P. 813–821.
[8] *Черчиньяни К.* Теория и приложения уравнения Больцмана. М.: Мир, 1978. 496 с.
[9] *Латышев А.В., Юшканов А.А.* // Изв. РАН. Сер. МЖГ. 1996. № 3. С. 140–153.