Волны разупрочнения пластической деформации в кристаллах

© Г.Ф. Сарафанов

Нижегородский государственный педагогический университет,
603600 Нижний Новгород, Россия

(Поступила в Редакцию 20 июня 2000 г.)

В рамках системы эволюционных уравнений, описывающих процесс пластической диформации в кристалле, проводится теоретическое описание автоволновых структур. Показано, что в предложенной системе уравнений для скорости и плотности дислокаций возможны два типа неустойчивостей, обусловленных соответственно аномальным торможением дислокаций и структурным разупорядочением. Для этих двух случаев предложены конкретные модели и проведено их теоретическое исследование. Найдены волновые решения в виде бегущих фронтов, солитонов и периодических волн.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 98-02-16976).

Одной из важных проблем физического металловедения является объяснение наблюдающихся на опыте сложных закономерностей возникновения и развития неоднородных дислокационных структур, формирующихся при пластической деформации материала. Несмотря на успехи, достигнутые в области экспериментальных исследований деформируемых твердых тел [1,2], в теоретическом плане остаются во многом неясными явления, сопровождающие процесс пластической деформации. В частности, это относится к нестабильности пластического течения кристалла [3–5], когда деформация приобретает неустойчивый скачкообразный характер, часто сопровождающийся локализацией пластического течения.

Физически понятно, что данное явление тесно связано с разупрочнением материала. Одной из характерных причин разупрочнения, начиная с работ Коттрела [6], полагают аномальный характер торможения дислокаций (отрицательное трение). Наиболее отчетливо это проявляется в сплавах, когда в области повышенных температур наблюдается N-образная зависимость силы торможения дислокаций $F(V)$ от их скорости V. Предполагается, что при некоторой критической скорости, соответствующей максимуму кривой $F(V)$, происходит отрыв движущихся дислокаций от закрепляющих их атмосфер примесных атомов, что и приводит к нестабильности течения на участке отрицательного трения. В области более низких температур данная неустойчивость ($F'(V) < 0$) может иметь динамическую природу и связана, например, при высоких скоростях дислокаций с дисперсией упругих модулей [7] или быть обусловлена термопластической неустойчивостью [8,9]. Кроме этого механизма неустойчивости пластической деформации возможна неустойчивость, обусловленная разупрочнением материала по типу "сухого" трения (структурное разупрочнения). В этом случае дислокации при своем движении разрушают тормозящие дефекты (например, преципитаты [3]), вследствие чего происходит снижение барьерного торможения.

Рассмотрение нестабильных режимов пластической деформации, в основе которых явно или неявно лежат указанные механизмы неустойчивости, проводится в ряде работ [3–5,8–11], однако их последовательный математический анализ в рамках единого описания отсутствует. В связи с этим в настойщей работе на основе общих уравнений динамики дислокаций [4,7] в рамках предлагаемых моделей проводится теоретическое исследование волновых режимов пластической деформации, обусловленных указанными механизмами разупрочнения кристалла.

1. Основные уравнения

Математическая задача теоретического исследования нестабильных режимов пластической деформации может быть сформулирована на основе системы нелинейных эволюционных уравнений для плотности непрерывно распределенных дислокаций. При этом эволюционные уравнения являются следствием фундаментального закона сохранения вектора Бюргерса системы дислокаций, сохраняющим свое значение при различных дислокационных реакциях и размножении [4,7]. Дифференциальной формой закона сохранения вектора Бюргерса в кристалле является уравнение совместимости

$$\partial\alpha_{ik}/\partial t + e_{ilm}\partial j_{mk}/\partial x_l = 0,$$

связывающее тензоры плотности α_{ik} и потока j_{ik} дислокаций [7]. Эти тензоры выражаются через скалярную плотность дислокаций $\rho_a(\mathbf{r}, t)$

$$\alpha_{ik} = \sum_a l_i b_k^a \rho_a, \qquad j_{ik} = e_{ijm} \sum_a l_j b_k^a \rho_a v_m^a,$$

где $\mathbf{v}_a(\mathbf{r}, t)$ — средняя скорость скольжения дислокаций, индекс a нумерует возможное направление вектора Бюргерса дислокации $\mathbf{b}$ по отношению к $\mathbf{l}$ ($\mathbf{l}$ — единичный вектор, касательный к линии дислокации). Для плотности дислокаций $\rho_a(\mathbf{r}, t)$ из уравнения совместимости вытекает система эволюционных уравнений

$$\frac{\partial\rho_a}{\partial t} + \operatorname{div}\rho_a\mathbf{v}_a = G_a(\rho_a), \tag{1}$$

имеющая вид уравнения непрерывности в пренебрежении локальным взаимодействием дислокаций ($G_a = 0$).

Последнее может иметь место, если процесс пластической деформации протекает локализовано в некоторой узкой полосе скольжения и носит выраженный динамический характер. В этом интересующем нас случае уравнение движения дислокаций, определяющее $\mathbf{v}_a(\mathbf{r},t)$, имеет следующий вид [7]:

$$m^*_{ik}\frac{dv^a_k}{dt} = e_{ijm}l_j b^a_k\left\{\sigma^{\text{ext}}_{mk}+\sigma^{\text{int}}_{mk}(\rho_a)-\sigma^{\text{f}}_{mk}(C_j,\alpha_j)\right\} - F_i(\mathbf{v}^a). \tag{2}$$

Первое слагаемое в правой части уравнения (2) есть сила Бича–Келера на единицу длины дислокационной линии, где σ^{ext}_{mk} — компонента тензора внешних напряжений в плоскости скольжения дислокаций; σ^{int}_{mk} — компонента тензора дальнодействующих внутренних напряжений от системы распределенных дислокационных зарядов, функционально зависящих от ρ_a; $\sigma^{\text{f}}_{mk}(C_j,\alpha_j)$ — напряжение "сухого" трения, обусловленное различными локальными препятствиями, распределенными в пространстве с плотностью C_j и имеющими силовые характеристики стопорения α_j; m^*_{ik} — тензор эффективной массы дислокаций; $F_i(\mathbf{v}^a)$ — диссипативная сила трения.

Уравнения (1), (2) сформулированы в приближении, когда радиус кривизны R_c дислокационных линий значительно превышает среднее расстояние $\bar{r}$ между дислокациями. В рамках этого приближения дислокации можно считать в целом прямолинейными, а полный дислокационный ансамбль при исследовании его эволюции можно разбить на подансамбли, каждый из которых представляет собой систему параллельных дислокационных линий. Ограничимся далее анализом динамики одного из таких ансамблей.

Рассмотрим поведение ансамбля дислокаций в полосе скольжения ширины $L > \bar{r}$. Выберем ось $0x$ в направлении заданной системы скольжения дислокаций. Будем считать, что возмущенной является подсистема положительных краевых ($\mathbf{b} \perp \mathbf{l}$) дислокаций, характеризуемых плотностью $\rho_+(\mathbf{r},t) = \rho(\mathbf{r},t)$, причем в равновесии $\rho^0_+(\mathbf{r},t) = \rho_0$. Тогда процесс пластической деформации в выбранной полосе скольжения можно описать следующей системой уравнений:

$$m^*\left(\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x}\right) = b\{\sigma_{\text{ext}} + \sigma_{\text{int}}(\rho) - \sigma_{\text{f}}(C_j,\alpha_j)\} - F(v), \tag{3}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0, \tag{4}$$

где поле напряжений σ_{int}, действующее на дислокации в плоскости их скольжения, может быть определено следующим образом [12,13]:

$$\sigma_{\text{int}}(\mathbf{r},t) = -\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-L/2}^{L/2}\rho(\mathbf{r}')\frac{\partial\psi_{\text{eff}}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{\partial y}d\mathbf{r}'. \tag{5}$$

Здесь $\psi_{\text{eff}}(\mathbf{r}) = D_e r_D \operatorname{sh}(y/r_D)K_0(r/r_D)$ — эффективная функция напряжений Эйри краевых дислокаций, $\mathbf{r} = (x,y)$ — радиус-вектор ($\mathbf{r} \perp \mathbf{l}$), r_D — радиус экранирования упругого поля дислокаций, $K_0(r/r_D)$ — функция Макдональда, $D_e = Gb/2(1-\nu)$ [13].

Напряжение сухого трения σ_{f} можно, как правило, считать параметром задачи, однако, если нас интересует случай структурного разупрочнения кристалла, необходимо учитывать возможную зависимость C_j и α_j от плотности дислокаций ρ, поэтому в общем случае $\sigma_{\text{f}} = \sigma_{\text{f}}(\rho)$.

Система (3),(4) допускает однородное стационарное решение

$$\rho = \rho_0, \qquad v = v_0, \tag{6}$$

в котором v_0 определяется из условия равенства нулю правой части (3)

$$F(v_0) = b\sigma_{\text{ext}} - b\sigma_{\text{f}}(\rho_0) = b\sigma_t, \tag{7}$$

а плотность ρ_0 определяется из заданных граничных условий.

Эффективная функция напряжений Эйри $\psi_{\text{eff}}(\mathbf{r})$, фигурирующая в (5), совпадает на малых расстояниях ($r \ll r_D$) с классическим выражением $\psi(r) = -D_e y\ln(r/r_0)$ [11], а на расстояниях $r \gg r_D$ экспоненциально убывает в направлении скольжения дислокаций ($K_0(r/r_D) \simeq \sqrt{\pi r_D/2r}e^{(-r/r_D)}$). Будем полагать, что стационарная плотность подвижных дислокаций ρ_0 составляет малую часть от общей плотности дислокаций ρ_{tot} ($\rho_0 \ll \rho_{\text{tot}}$). При этом, так как $r_D^{-2} = \mu\rho_{\text{tot}}$, где μ — дислокационный параметр порядка единицы [12], $r_D \simeq \rho_{\text{tot}}^{-1/2} \ll \bar{r} = \rho_0^{-1/2}$. В такой ситуации упругое поле каждой подвижной дислокации экранируется, поэтому реальным является эффективное взаимодействие дислокаций, при котором интегральное выражение (5) можно упростить.

Вводя относительные координаты $\xi = x'-x$, $\eta = y'-y$ и раскладывая функцию $\rho(\mathbf{r}') = \rho(\mathbf{r}+\mathbf{x})$ в ряд по степеням $x = (\xi,\eta)$, в рассматриваемом приближении ($r_D \ll r$) имеем

$$\sigma_{\text{int}}(\mathbf{r},t) = -\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\xi\int\limits_{-L/2-y}^{L/2-y}\rho(\mathbf{r}+\mathbf{x})\frac{\partial\psi_{\text{eff}}(\mathbf{x})}{\partial\eta}d\eta$$

$$\simeq -A_e\frac{\partial\rho(\mathbf{r})}{\partial x}, \tag{8}$$

где A_e определяется следующим образом:

$$A_e = \int\limits_{-\infty}^{\infty}d\xi\int\limits_{-L/2-y}^{L/2-y}\frac{\partial\psi^{\text{eff}}(\xi,\eta)}{\partial\eta}d\eta$$

$$= \pi D_e r_D^2\left[1 - \operatorname{ch}\frac{2y}{r_D}\exp\left(\frac{-L}{r_D}\right)\right] \simeq \pi D_e r_D^2. \tag{9}$$

Принимая во внимание одномерный характер системы (3), (4) и (8), далее будем полагать $\rho = \rho(x,t)$, $v = v(x,t)$.

2. Неустойчивость пластической деформации

Проведем анализ устойчивости однородного стационарного состояния (6) системы (3), (4), учитывая сделанные предположения относительно $\sigma_{\text{int}}(\rho)$ и $\sigma_{\text{f}}(\rho)$. Линеаризуя исходную систему и вводя для удобства безразмерные переменные

$$n(x,t) = \frac{\rho(x,t)}{\rho_0} - 1, \qquad u(x,t) = \frac{v(x,t)}{v_0} - 1, \tag{10}$$

имеем

$$\frac{\partial u}{\partial t'} + \frac{\partial u}{\partial x'} = -\beta\frac{\partial n}{\partial x'} + an - \gamma u, \tag{11}$$

$$\frac{\partial n}{\partial t'} + \frac{\partial n}{\partial x'} + \frac{\partial u}{\partial x'} = 0. \tag{12}$$

Здесь введены безразмерные координаты $x' = x/\tau v_0$, $t' = t/\tau$ и параметры $\beta = bA_e\rho_0/m^*v_0^2$, $\tau = m^*v_0/b\sigma_t$, $a = -\sigma_{\text{f}}'(\rho_0)\rho_0/\sigma_t$, $\gamma = F'(v_0)v_0/b\sigma_t$. Полагая $n,\ u \sim \exp\lambda t' - ikx'$, получаем дисперсионное уравнение

$$\lambda^2 + \lambda(\gamma - 2ik) - ik(\gamma + \alpha) + k^2(\beta - 1) = 0,$$

из которого для неустойчивой ветви $\lambda_+ = \mu + i\omega$ находим

$$\mu = -\frac{\gamma}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \times \left[\gamma^2 - 4k^2\beta + \sqrt{[\gamma^2 - 4k^2\beta]^2 + 16k^2a^2}\right]^{1/2}, \tag{13}$$

$$\omega = k + \frac{ak}{\gamma + 2\mu}, \tag{14}$$

откуда следует, что неустойчивость ($\operatorname{Re}\lambda_+ = \mu > 0$) реализуется в двух случаях

$$\gamma < 0, \tag{15}$$

$$a > \gamma\sqrt{\beta}, \qquad \gamma > 0. \tag{16}$$

Неусточивость первого типа (15) связана с эффектом отрицательного трения ($F'(v) < 0$) в динамике дислокаций, в то время как вторая неустойчивость (16) обусловлена снижением барьерного торможения в полосе скольжения дислокаций с ростом их плотности ($\sigma_{\text{f}}'(\rho_0) < -\gamma\sqrt{\beta}\sigma_{\text{f}}/\rho_0$). Заметим, что во втором случае имеется порог неустойчивости.

Неустойчивости (15), (16), как следует из (13), реализуются в интервале волновых чисел $0 < k^2 < \infty$. То обстоятельство, что в спектре неустойчивых мод присутствуют гармоники с длиной волны, равной нулю, означает, что рассматриваемая система (3), (4) не имеет стационарных неоднородных решений в классе непрерывных функций. Эту трудность удается преодолеть путем учета вязкости дислокационного "газа". Физически введение вызкости можно объяснить тем, что дислокации при своем движении способны переходить в соседние плоскости скольжения, перенося туда дислокационный импульс. Это приводит, как известно, к внутреннему трению слоев газа [14].

Нетрудно показать, что учет в правой части уравнения (3) слагаемого ηv_{xx}, ответственного за вязкость дислокационного газа (η — коэффициент динамической вязкости), приводит к ограничению спектра неустойчивых мод и соответственно к регуляризации задачи. В этом случае выражения для неустойчивой ветви (13), (14) переопределяются путем изменения параметра γ ($\gamma \to \gamma + \nu k^2$, где $\nu = \eta/m^*v_0^2\tau$ — безразмерный коэффициент кинематической вязкости).

Дальнейшее нелинейное рассмотрение системы уравнений (3), (4) будем проводить для каждого типа неустойчивости в отдельности, с учетом соответствующих особенностей пластической деформации и сделанных выше предположений.

3. Волны деформации при аномальном торможении дислокаций

Рассмотрим модель, где реализуется неустойчивость первого типа ($F_v'(v) < 0$). При этом будем пренебрегать возможной зависимостью напряжения сухого трения от плотности дислокаций ($\sigma_{\text{f}} = \text{const}$). В этом случае исходная система (3), (4) с учетом вязкости принимает вид

$$m^*\left(\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x}\right) = -bA_e\frac{\partial\rho}{\partial x} + \eta\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + b\sigma - F(v), \tag{17}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0, \tag{18}$$

где $\sigma = \sigma_t = \text{const}$, а нелинейная функция $F(v)$ имеет характерный N-образный вид, показанный на рис. 1, *a*.

Прямая $b\sigma = b\sigma_t$ может по-разному пересекать кривую $F(v)$. Нас интересует случай, когда пересечение происходит в трех точках, например v_0, v_1 и v_2 ($v_0 < v_1 < v_2$). Тогда система (17), (18) имеет три состояния равновесия: два устойчивых, соответствующих скоростям $v = v_0$ и $v = v_2$, и одно неустойчивое, соответствующее скорости $v = v_1$.

Для нахождения стационарных бегущих решений системы (17), (18) перейдем к автомодельной переменной $\xi = x - ct$, полагая $v = v(\xi)$, $\rho = \rho(\xi)$. Подставляя решение предполагаемого вида в исходную систему и интегрируя (18), получим

$$m^*(v - c)\frac{dv}{d\xi} = -bA_e\frac{d\rho}{d\xi} + \eta\frac{d^2v}{d\xi^2} + b\sigma_t - F(v), \tag{19}$$

$$\rho = \rho_0\frac{c - v_0}{c - v}, \qquad (v < c). \tag{20}$$

Исследование системы (19), (20) будем проводить на фазовой плоскости (v, W), полагая $W = dv/d\xi$. Исключая переменную ρ, имеем

$$\eta\frac{dW}{d\xi} = -m^*\left[c - v - \frac{v_0^2\beta(c - v_0)}{(c - v)^2}\right]W - F(v), \tag{21}$$

$$\frac{dv}{d\xi} = W. \tag{22}$$

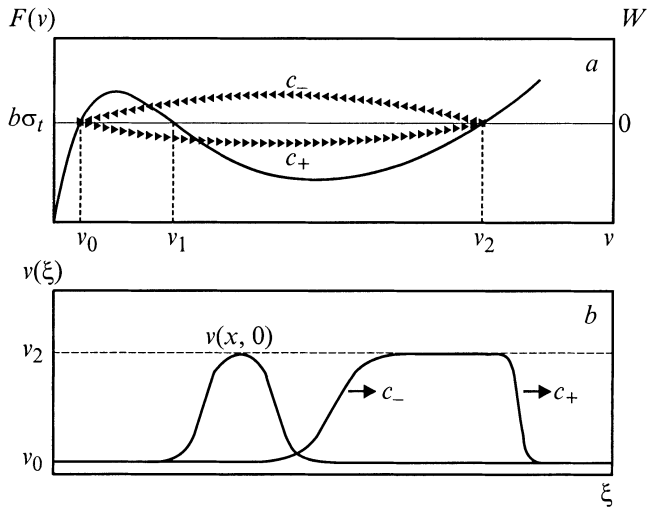

Рис. 1. Схема фазового портрета (a) для системы уравнений (21), (22) на плоскости переменных (v, W) и процесс формирования (b) волн упрочнения ($c = c_-$) и разупрочнения ($c = c_+$) от локального возмущения $v(x, 0)$.

Данная система имеет на фазовой плоскости три неподвижные точки $(v_0, 0)$, $(v_1, 0)$ и $(v_2, 0)$. Состояние $(v_1, 0)$ является фокусом, а особые точки $(v_0, 0)$ и $(v_2, 0)$, через которые проходит по две траектории, — седловыми. Единственные устойчивые стационарные решения описываются сепаратрисами, идущими из седла в седло, которым соответствуют определенные значения скорости волн $c_\pm$ (рис. 1, a).

Систему (21), (22) можно свести к краевой

$$\eta W \frac{dW}{dv} + m^* \left[c - v - \frac{v_0^2 \beta (c - v_0)}{(c - v)^2} \right] W + F(v) = 0 \quad (23)$$

с граничными условиями $W(v_0) = W(v_2) = 0$.

Для получения результатов в аналитическом виде предположим, что $v \ll c$ (справедливость этого неравенства будет обоснована далее). Тогда аппроксимируя $F(v)$ кубичным трехчленом $F(v) = \kappa(v - v_0)(v - v_1)(v - v_2)$ и полагая $W = \delta(v - v_0)(v - v_2)$, находим

$$c = c_\pm = V_\delta/2 + \sqrt{V_\delta^2/4 + \beta v_0^2}, \quad (24)$$

$$\delta = \delta_\pm = \frac{m^*}{4\eta} \left(1 \pm \sqrt{1 + 8\eta\kappa/m^{*2}} \right), \quad (25)$$

где $V_\delta = v_1 + (\delta\eta/m^*)(v_0 + v_2 - 2v_1)$.

Поскольку вид волновых решений зависит от параметра δ, то, как следует из (24), (25), существует два вида уединенных волн, соответствующих двум значениям параметра δ ($\delta_+ > 0$, $\delta_- < 0$) и имеющих различные скорости распространения фронтов c_+ и c_-. Определим профиль этих волновых решений. Интегрируя $W = dv/d\xi = \delta(v - v_0)(v - v_2)$, находим

$$v(x, t) = v_0 + (v_2 - v_0) \left[1 + C_0 \exp\left(z_\delta \frac{x - ct}{\Lambda_\delta} \right) \right]^{-1}, \quad (26)$$

где $\Lambda_\delta = |\delta(v_2 - v_0)|^{-1}$ — характерная ширина фронта волны, $z_\delta = |\delta|/\delta$, C_0 — константа интегрирования.

Из вида решения (26) следует, что положительному значению $\delta = \delta_+$ соответствует волна переключения из состояния v_0 в состояние v_2 (волна разупрочнения), а отрицательному ($\delta = \delta_-$) — волна перепада из состояния v_2 в состояние v_0 (волна упрочнения). Ширина фронта волны разупрочнения при $\eta \to 0$ стремится к нулю, так как в этом случае $\Lambda_+ \simeq 2\eta/m^*(v_2 - v_0)$, в то время как для волны упрочнения имеем $\Lambda_- \simeq m^*/\kappa(v_2 - v_0)$. Поэтому в этом случае $\Lambda_- \gg \Lambda_+$.

Рассмотрим теперь возможные волновые картины, которые возникают в рамках полученных решений (26). Пусть в начальный момент времени в некоторой области Ω полосы скольжения возникло возмущение плотности дислокаций $\rho(x, 0)$ ($x \in \Omega$). Возникшие при этом поля внутренних напряжений $\sigma_{\text{int}} \sim \partial\rho/\partial x$ создают в области Ω возмущения скорости $v(x, 0) \approx v_2$. Тогда от правой границы возмущения начнет распространяться со скоростью $c = c_+$ волна разупрочнения, а от левой со скоростью $c = c_-$ — волна упрочнения (рис. 1, b).

Оценим скорость распространения фронта волны разупрочнения. Полагая, что движение дислокаций носит нерелятивистский характер, т. е. скорость дислокаций v много меньше скорости звука c_t, для параметра β имеем

$$\beta = \frac{bA_e\rho_0}{m^* v_0} \simeq (c_t/v_0)^2 (\rho_0/\rho_{\text{tot}}),$$

откуда следует, что параметр β может быть достаточно большой величиной. Соответственно скорость уединенной волны, согласно (24), стремится к значению $c \sim c_t\sqrt{\rho_0/\rho_{\text{tot}}} \gg v$, т. е. растет с увеличением плотности дислокаций в полосе скольжения как $\sqrt{\rho_0}$. Физически этот результат понятен. Дислокации во фронте волны разупрочнения создают большое поле внутренних напряжений $\sigma_{\text{int}} > 0$, которое перебрасывает дислокации из медленного состояния в быстрое и обеспечивает высокое значение фазовой скорости волны переключения, близкое к скорости звука при достаточно большой плотности ρ_0. Аналогичные рассуждения и оценки имеют место для волны упрочнения (при этом $\sigma_{\text{int}} < 0$).

Скорость волны разупрочнения c_+ больше скорости волны упрочнения c_- при условии $v_0 + v_2 - 2v_1 > 0$. В этом случае происходит разбегание фронтов с относительной скоростью

$$\Delta c = c_+ - c_- \simeq \frac{\sqrt{1 + 8\eta\kappa/m^{*2}}}{4} \times (v_0 + v_2 - 2v_1)(1 + 2v_1/v_0\sqrt{\beta}). \quad (27)$$

В случае $v_0 + v_2 - 2v_1 < 0$ волна разупрочнения не возникает, поскольку гасится волной упрочнения. Таким образом, существует некоторое критическое значение напряжения течения $\sigma = \sigma_c$, соответствующее условию $\Delta c = 0$, ниже которого ($\sigma < \sigma_c$) возмущение затухает и деформирование материала происходит макроскопически гладко без возникновения неоднородных волновых структур. При критическом значении нагрузки ($\sigma = \sigma_c$) становится возможным распространение своеобразного диссипативного солитона, когда передний и задний фронты импульса движутся с одинаковой скоростью $c_+ = c_- = v_1/2 + \sqrt{v_1^2/4 + \beta v_0^2}$. Ширина такого солитона определяется условиями его возникновения.

Для рассмотренной начальной задачи предполагалось, что граничные условия имеют вид $v(\pm\infty, t) = v_0$. Однако, например, при активном нагружении кристалла, когда скорость пластической деформации поддерживается постоянной, граничные условия в рамках рассматриваемой задачи необходимо задать в виде $v(-\infty, t) = v_2$, $v(\infty, t) = v_0$. Этим условиям отвечает лишь волна разупрочнения, которая при прохождении через весь кристалл создает локализованную зону пластической деформации с повышенной в ней скоростью движения дислокаций v_2.

4. Стационарные волны структурного разупрочнения

Рассмотрим теперь модель, где реализуется неустойчивость второго типа, обусловленная структурным разупрочнением ($a > \gamma\sqrt{\beta}$). Для определенности будем считать, что диссипативное торможение дислокаций в полосе скольжения имеет чисто вязкий характер, т.е. $F(v) = Bv$ (где B — константа вязкого торможения). В этом случае параметр γ, фигурирующий в условии неустойчивости, равен единице. Будем также полагать, что зависимость напряжения сухого трения от плотности дислокаций имеет вид $\sigma_{\mathrm{f}} \sim (K + \rho)^{-1}$ (где K — некоторая постоянная), известный в литературе как закон Михаэлиса–Ментен [15]. В рассматриваемой задаче его можно получить, например, из следующих рассуждений.

Допустим, что дислокации при своем движении перерезают тормозящие их структурные образования (например, преципитаты) таким образом, что каждая последующая дислокация, движущаяся в той же плоскости скольжения, испытывает уже меньшее блокирующее сопротивление со стороны дефектов. Тем самым силовая характеристика стопорения α_j такого дефекта уменьшается. С другой стороны, деформирование (перерезание) дефектов дислокациями приводит к увеличению его поверхностной энергии. Последнее обусловливает механизм релаксации к исходной форме дефектов с начальной характеристикой стопорения α_{0j}. С учетом этих процессов можно записать кинетическое уравнение для переменной α_j

$$\frac{\partial \alpha_j}{\partial t} = \frac{\alpha_{0j} - \alpha_j}{\tau_\alpha} - \kappa \alpha_j \rho, \tag{28}$$

которое совместно с уравнениями (3), (4) образует полную систему. Здесь τ_α — характерное время установления равновесного состояния α_{0j}, $\kappa(C_{0j})$ — постоянная, характеризующая процесс взаимодействия дислокаций со стопорами. Предположим, что восстановление формы дефектов происходит достаточно быстро ($\tau_\alpha \ll \tau$). Тогда переменную α_j можно адиабатически исключить из рассмотрения, предполагая в (28) $\partial\alpha_j/\partial t = 0$ и соответственно получая $\alpha_j(\rho) = \alpha_{0j}/(1+\kappa\tau_\alpha\rho)$. Далее, полагая $\sigma_{\mathrm{f}} \sim \alpha_j$, окончательно имеем $\sigma_{\mathrm{f}}(\rho) = \sigma_{0\mathrm{f}}/(1+\kappa\tau_\alpha\rho)$, где $\sigma_{0\mathrm{f}}$ — напряжение трения в отсутствие разупрочнения. Отметим, что рассмотренный механизм деформационного разупрочнения является одним из возможных, при котором плотность структурных дефектов C_j постоянна.

С учетом сделанных предположений исходные уравнения принимают следующий вид:

$$m^* \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right) = -bA_e \frac{\partial \rho}{\partial x} + \eta \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + b\sigma_{\mathrm{ext}} \times -\frac{b\sigma_{0\mathrm{f}}}{1 + \kappa\tau_\alpha\rho} - Bv, \tag{29}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0. \tag{30}$$

Из уравнения (29) нетрудно определить стационарное значение скорости $v_0 = b[\sigma_{\mathrm{ext}} - \sigma_{0\mathrm{f}}/(1 + \kappa\tau_\alpha\rho_0)]/B$. Это значение может существенно отличаться от скорости $V = b(\sigma_{\mathrm{ext}-\sigma_{0\mathrm{f}}})/B$ в отсутствие эффекта разупрочнения. Так, если упрочнение в кристалле лимитируется напряжением трения, то $\sigma_{\mathrm{eff}} = \sigma_{\mathrm{ext}} - \sigma_{0\mathrm{f}} \ll \sigma_{\mathrm{ext}}$. В этом случае $V \ll v_0 \simeq b\sigma_{\mathrm{ext}}/B(1 + p)$, где параметр $p = (\kappa\tau_\alpha\rho_0)^{-1}$ меньше или порядка единицы.

Неоднородные волновые решения системы (29), (30) будем искать в классе автомодельных решений, полагая $v = v(\xi)$, $\rho = \rho(\xi)$, где $\xi = x - ct$. Подставляя решение предполагаемого вида в исходную систему, получим

$$\eta \frac{d^2 v}{d\xi^2} + R(v)\frac{dv}{d\xi} + = -Q(v) = -\frac{\partial U}{\partial v}, \tag{31}$$

$$\rho = \rho_0 \frac{c - v_0}{c - v}, \qquad (v < c), \tag{32}$$

где

$$R(v) = -m^* \left[v - c + \frac{\beta(c - v_0)v_0}{(c - v)^2} \right],$$

$$Q(v) = B(v - v_0) \left[\frac{a(1 + p)v_0}{p(c - v) + c - v_0} - 1 \right].$$

Уравнение (31) имеет вид нелинейного осциллятора с силой трения $R(v)v'_\xi$. Таким образом, задача сводится к исследованию поведения частицы в некоторой потенциальной яме эффективного потенциала $U(v)$,

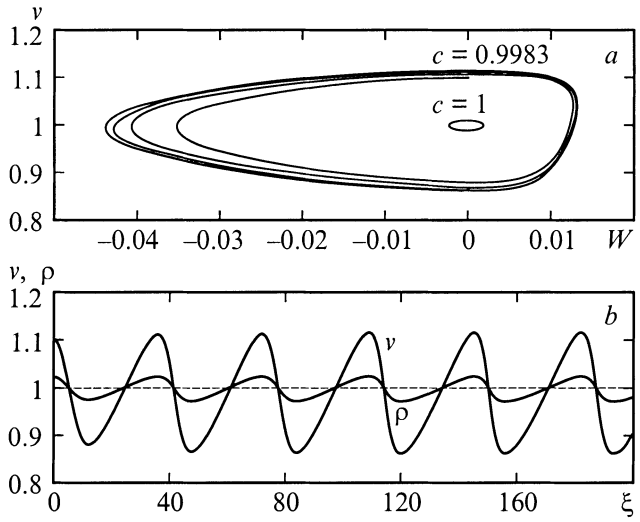

Рис. 2. Стационарные периодические решения системы уравнений (29), (30) как решения системы (31), (32): a — фазовые траектории, выходящие за предельный цикл, на плоскости (W, v) в случае малых ($c = 1$) и кноидальных ($c = 0.9983$) колебаний; b — форма кноидальных волн для плотности $\rho(x, t)$ и скорости $v(x, t)$ дислокаций, распространяющихся с фазовой скоростью $c = 0.9983c_0$. Вычисления проводились при значениях параметров $a = 5.2$, $\beta = 25$, $\nu = 0.1$. На графиках переменные v, ρ, W и ξ нормированы соответственно на значения v_0, ρ_0, τ^{-1} и $v_0\tau$, фазовая скорость c — на значение $c_0 = v_0(1 + \sqrt{\beta})$.

определяемого как интеграл от $Q(v)$. Функция $Q(v)$ принимает нулевые значения в особых точках $v = v_0$ и $v = v_0[1 + (c/v_0 - 1 - a(1 + p))/p] = v_c$, которым соответствуют экстремальные значения потенциала $U(v)$. При этом максимум U достигается при $v = \min\{v_0, v_c\}$, а минимум — при $v = \max\{v_0, v_c\}$. Состояние равновесия $v = v_c$, появившееся в системе при переходе к автомодельной переменной, является глобально неустойчивым при любых условиях в отличие от физически реализуемого состояния $v = v_0$. Это означает, что финитные решения для уравнения (31) могут существовать только в окрестности минимума потенциала $U = U(v_0)$ при $c < v_0(1 + a)$. (Нетрудно заметить, что $v_c < v_0$ при $c < v_0(1 + a)$). Возможные же инфинитные решения должны удовлетворять условию $v(\pm\infty) = v_0$, что может иметь место только при $c > v(1 + a)$, когда движение на фазовой скорости (v, v'_ξ) происходит по сепаратрисе, выходящей и входящей в седло $(v_0, 0)$.

Рассмотрим сначала возможные финитные решения уравнения (31), которым соответствуют автоколебания переменной v. Чтобы колебания происходили без затухания, работа силы трения, очевидно, в среднем должна быть равна нулю. Последнее достигается при условии

$$c \leqslant c_0 = v_0(1 + \sqrt{\beta}).$$

Максимальное значение скорости волны ($c = c_0$) соответствует малым колебаниям $|v - v_0| \ll v_0$. В этом случае уравнение (31) можно записать в приближенном виде

$$\eta\frac{d^2v}{d\xi^2} - 3m^*(v-v_0)\frac{dv}{d\xi} + B(v-v_0)(a/\sqrt{\beta}-1) = 0, \quad (33)$$

которое легко проинтегрировать, полагая $dv/d\xi = W$. В результате получаем

$$\left(\frac{v}{v_0} - 1\right)^2 - \left(\frac{v_w}{v_0} - 1\right)^2 = \frac{2\nu}{3} \times \left[W\tau + \frac{a - \sqrt{\beta}}{3\sqrt{\beta}} \ln\left(1 - \frac{3W\tau\sqrt{\beta}}{a-\sqrt{\beta}}\right)\right],$$

где v_w — значение v при $W = 0$, $\nu = \eta/m^* v_0^2\tau$.

Данное уравнение задает на фазовой плоскости переменных v и W семейство замкнутых траекторий. Им соответствуют волновые решения малой амплитуды распределенной системы (29), (30). Стационарные волны с относительно большой амплитудой распространяются со скоростью c, несколько меньшей c_0. В этом случае стационарные волновые решения системы (29), (30) соответствуют предельному циклу для уравнения (31) на фазовой плоскости переменных v и W (рис. 2, a). При этом заданные начальные условия определяют амплитуду волны, с которой однозначно связана скорость волны c. Соответствующие волновые решения для плотности и средней скорости дислокаций показаны на рис. 2, b.

Рассмотрим теперь уединенные решения системы (31), (32). Как указывалось выше, уравнение (31) совпадает с движением частицы массы η в поле потенциала $U(v)$ при наличии силы трения $R(v)v'_\xi$, которая

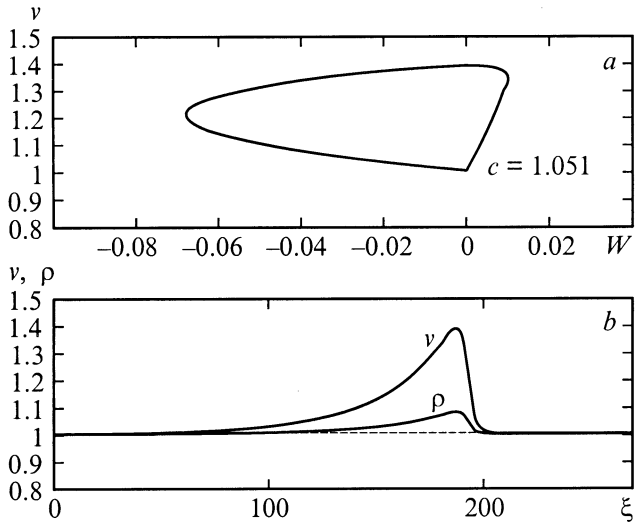

Рис. 3. Стационарные уединенные решения системы уравнений (29), (30) как решения системы (31), (32): a — фазовая траектория вдоль сепаратрисы седла (0,1) на плоскости (W, v); b — форма уединенных волн в виде солитонов для плотности $\rho(x, t)$ и скорости $v(x, t)$ дислокаций, распространяющихся с фазовой скоростью $c = 1.051c_0$. Вычисления проводились при тех же значениях параметров, представленных на рис. 2.

зависит от скорости распространения уединенной волны c. Возможные значения скорости c лежат в интервале $c_{\min} < c < c_{\max}$. Нижняя граница $c_{\min} = v_0(1 + a)$ обусловлена граничными условиями $v(\pm\infty) = v_0$, а верхняя $c_{\max} = v_0[1+a(1+p)]$ вытекает из условия $v_c < c$ (32), т. е. из условия положительности плотности ρ.

При заданном потенциале $U(v)$ существует единственное значение скорости c, при котором потери энергии на трение при инфинитном движении частицы (соответствующем движению по сепаратрисе на фазовой плоскости) строго равны нулю. Как показывают результаты численного исследования уравнения (31) для этого случая, движению замкнутой траектории на фазовой плоскости соответствует решение в виде солитона (рис. 3). При этом скорость распространения солитона c близка к минимальному значению $c_{\min} = v_0(1 + a)$.

Полученные инвариантные решения в рамках уравнения (31) являются основными элементами решения задачи Коши для распределенной системы (29), (30). Как показали численные расчеты задачи Коши для этой системы, они описывают асимптотику решений для широкого класса начальных данных. На развитой стадии процесса волна состоит из двух частей: "головной" и "хвостовой". Головная часть представляет собой уединенную волну в виде солитона, хвостовая — периодическую, которая постепенно отстает от головной. При этом скорость отставания определяется величиной $\Delta c \simeq v_0(a - \sqrt{\beta})$.

Список литературы

[1] Б.И. Смирнов. Дислокационная структура и упрочнение кристаллов. Наука, Л. (1981). 275 с.
[2] В.И. Трефилов, В.Ф. Моисеев, Э.П. Печковский и др. Деформационное упрочнение и разрушение поликристаллических материалов. Наук. думка, Киев (1987). 245 с.
[3] Б.И. Смирнов, В.И. Николаев. ФТТ **35**, *7*, 1840 (1993).
[4] Г.А. Малыгин. ФТТ **37**, *1*, 3 (1995).
[5] Ш.Х. Ханнанов. ФММ **57**, *4*, 14 (1992).
[6] А.Х. Коттрелл. Дислокации и пластическое течение в кристаллах. Металлургиздат, М. (1958). 267 с.
[7] А.М. Косевич. Дислокации в теории упругости. Наук. думка, Киев (1978). 220 с.
[8] Н.Н. Давиденков. ФТТ **3**, *8*, 2458 (1961).
[9] Г.А. Малыгин. ФММ **40**, *1*, 21 (1975).
[10] И.Л. Максимов, Г.Ф. Сарафанов. Письма в ЖЭТФ **61**, *5*, 405 (1995).
[11] Дж. Хирт, И. Лоте. Теория дислокаций. Атомиздат, М. (1972). 599 с.
[12] Г.Ф. Сарафанов. ФТТ **39**, *9*, 1575 (1997).
[13] Г.Ф. Сарафанов. Вестник ННГУ. Математическое моделирование и оптимальное управление. Изд-во Нижегородского ун-та, Н. Новгород. (1999). В. *1*(*20*). С. 101.
[14] Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский. Физическая кинетика. Наука, М. (1979). 528 с.
[15] Д. Марри. Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. Мир, М. (1982). 430 с.