Нелинейные термомагнитные волны в резистивном состоянии сверхпроводников

© Н.А. Тайланов, У.Т. Яхшиев

НИИ прикладной физики, Национальный университет Узбекистана,
700095 Ташкент, Узбекистан

(Поступила в Редакцию 12 мая 2000 г.)

Рассмотрен вопрос об эволюции термомагнитных возмущений в резистивном состоянии сверхпроводников. Изучены качественная картина возникновения и дальнейшее развитие нелинейных стационарных структур, описывающих конечную стадию тепловых и электромагнитных возмущений в сверхпроводнике. Дана оценка скорости распространения и ширины фронта волны в сверхпроводнике.

Диссипация энергии при движении вихрей приводит к омическому разогреву сверхпроводника, в результате чего в определенном участке сверхпроводника повышается температура: $T > T_c$, где T_c — критическая температура. Повышение температуры в локальном участке образца приводит к снижению критического тока j_c и появлению в этом же месте вихревого электрического поля E.

Экспериментальное исследование эффекта разрушения сверхпроводимости, обусловленного тепловым разогревом вихревой решетки, ведется уже довольно давно. Возникновение вихревого электрического поля E в сверхпроводнике, по которому течет постоянный ток с плотностью j_c, связанное с джоулевым разогревом, обнаружено в ранних экспериментах (см. [1]). Переход в резистивное состояние в зависимости от баланса между диссипативными и нелинейными эффектами сопровождается появлением различных режимов типа "волны переключения", т.е. режима движения волны, переключающей образец из сверхпроводящего в нормальное состояние. Примерами таких режимов могут служить тепловые волны — установившееся распространение нормальной зоны [2], нелинейные термомагнитные волны [3] в сверхпроводниках.

В данной работе изучены качественная картина возникновения и профиль нелинейных диссипативных структур — бегущих стационарных волн, описывающих конечную стадию эволюции тепловых и электромагнитных возмущений в резистивном состоянии сверхпроводников.

Эволюция тепловых и электромагнитных возмущений в сверхпроводнике описывается нелинейным одномерным уравнением теплопроводности [3]

$$\nu \frac{dT}{dt} = \kappa \frac{d^2T}{dx^2} + \mathbf{J}\,\mathbf{E}, \tag{1}$$

уравнением Максвелла

$$\frac{4\pi}{c^2}\frac{d\mathbf{j}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{E}}{dx^2} \tag{2}$$

и связанным с ними уравнением критического состояния

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_c(T, \mathbf{H}) + \mathbf{j}_r(\mathbf{E}), \tag{3}$$

где ν и κ — коэффициенты теплоемкости и теплопроводности, $\mathbf{j}_c$ и $\mathbf{j}_r$ — плотности критического и резистивного тока соответственно.

Рассматриваемая модель является существенно нелинейной из-за наличия в правой части (1) члена, описывающего джоулево тепловыделение в области резистивной фазы. Точное решение существенно нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа (1)–(3) отсутствует.

Отметим, что динамика эволюции возмущений температуры $T(x,t)$ и полей $E(x,t)$, $H(x,t)$ в основном определяется уравнением критического состояния (3). Ввиду существенных аналитических трудностей мы ограничимся рассмотрением модели Бина [4], предполагая, что плотность критического тока не зависит от внешнего магнитного поля $dj_c/dH = 0$. Для зависимости $j_c(T)$ справедлива формула $j_c(T) = j_0 - a(T - T_0)$, где T_0 — начальная температура сверхпроводника, $a = |dj_c/dT|_{T=T_0}$ описывает термически активируемое ослабление пиннинга абрикосовских вихрей на дефектах решетки. Зависимость в области электрических полей $E > E_f$ (где E_f — граница линейного участка на ВАХ сверхпроводника) может быть аппроксимирована кусочно-линейной функцией $j(E) \sim \sigma_f E$, где σ_f — эффективная проводимость. В области крипа потока $E < E_f$ зависимость $j(E)$ существенно нелинейна (см. [5]). Здесь мы рассмотрим возмущение достаточно большой амплитуды ($E > E_f$) и воспользуемся линейной зависимостью $j_r(E)$.

Будем искать решение исходной системы в виде функции от новой автомодельной переменной $\xi(x,t)$

$$T = \Theta\big[\xi(x,t)\big], \quad E = E\big[\xi(x,t)\big], \quad H = H\big[\xi(x,t)\big];$$

$$\xi = x - vt, \tag{4}$$

описывающей бегущую волну, движущуюся с постоянной скоростью v вдоль оси x [3].

Подставляя (4) в исходную систему, в результате простого дифференцирования получим следующую систему уравнений для переменной $\xi(x,t)$:

$$-\nu v \frac{dT}{d\xi} = \frac{d}{d\xi}\left[\kappa \frac{dT}{d\xi}\right] + jE, \tag{5}$$

$$\frac{dE}{d\xi} = -\frac{4\pi v}{c^2}\, j, \tag{6}$$

$$E = \frac{v}{c} H. \tag{7}$$

Соответствующие тепловые и электродинамические граничные условия к уравнениям (5)–(7) имеют вид

$$T(\xi \to +\infty) = T_0, \qquad \frac{dT}{dx}(\xi \to -\infty) = 0,$$
$$E(\xi \to +\infty) = 0, \qquad E(\xi \to -\infty) = E_e. \tag{8}$$

Заметим, что учет зависимости параметров κ и ν от температуры значительно усложняет аналитические вычисления при изучении динамики эволюции волн, описываемой системой уравнений (5)–(7). В большинстве случаев изменения локального значения этих параметров в образце можно считать малыми по сравнению с характерным масштабом изменения температуры и предположить, что они постоянные величины. Действительно, исследование показывает, что теплопроводность почти не влияет на характер распространения стационарной волны. Это обусловлено обращением в нуль теплового потока $\kappa\,(dT/d\xi)$ в стационарных точках системы при $\xi \to \pm\infty$. Однако учет зависимости теплоемкости от температуры необходим. Такая зависимость в широком интервале температур представляется в виде $\nu \approx \nu_0(T/T_0)$ [5].

Исключив переменные $T(x,t)$ и $H(x,t)$ с помощью (5) и (7), а также используя граничные условия (8), приходим к дифференциальному уравнению для распределения E-волны

$$\frac{d^2E}{dz^2} - 2\pi\frac{\nu T_0}{E_\kappa}\frac{v^2}{c^2}\left[\left(1 + \frac{\sigma_f E}{aT_0} + \frac{c^2}{4\pi a v T_0}\frac{dE}{dz}\right)^4 - 1\right]$$
$$+ \beta\tau\frac{dE}{dz} = \frac{E^2}{2E_\kappa}. \tag{9}$$

Здесь введены следующие безразмерные параметры:

$$z = \frac{\xi}{L}, \qquad L = \frac{cH_e}{4\pi j_0}, \qquad E_\kappa = \frac{\kappa}{aL^2},$$
$$\beta = \frac{vt_\kappa}{L}, \qquad \tau = \frac{4\pi\sigma_f\kappa}{c^2\nu}, \qquad t_\kappa = \frac{\nu L^2}{\kappa},$$

где L — глубина проникновения магнитного поля в глубь образца, t_κ — тепловое время задачи.

Согласно качественной теории [6], состояния равновесия находятся из условия

$$2\pi\nu_0 T_0\frac{v^2}{c^2}\left[\left(1 + \frac{\sigma_f E}{aT_0}\right)^4 - 1\right] = E^2. \tag{10}$$

Очевидным свойством системы (10) является отсутствие на фазовой плоскости $(E,\ dE/d\xi)$ замкнутых кривых, целиком составленных из фазовых траекторий. Доказательство данного утверждения основано на использовании критерия Бендиксона [7]. Число стационарных точек (одна или три) и их тип определяются параметром

$$P = 2\pi\nu_0 T_0\frac{v^2}{c^2}. \tag{11}$$

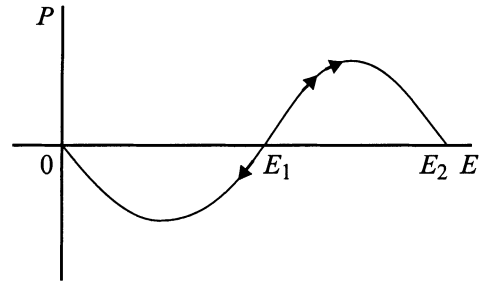

Рис. 1. Фазовый портрет уравнения (10).

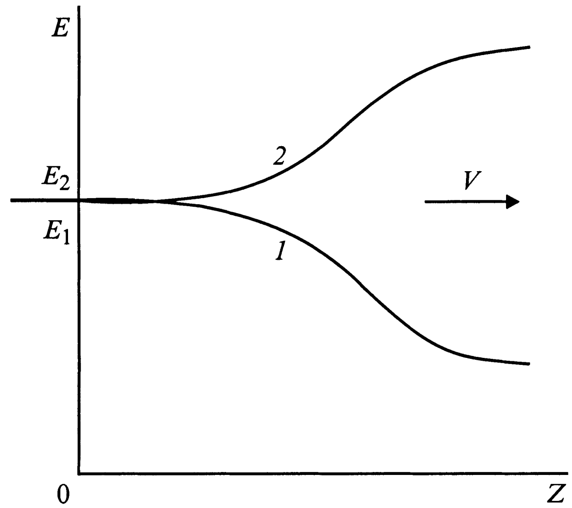

Рис. 2. Нелинейные волны двух типов.

Трем точкам равновесия $E = 0$, $E = E_1$ и $E = E_2$ отвечает условие $P < P_k = 1/2$ (рис. 1). При $P > P_k$ имеется единственная особая точка $E_0 = 0$. Условие $P = P_k$ соответствует касанию параболы и кривой четвертого порядка в (10), т.е. слиянию $E_1 = E_2 = E^* = (6/7)\,(aT_0/\sigma_f)$.

Непосредственное решение уравнения (10) дает следующие волны:

$$1)\quad E_{1,2} = E^*\left[1 + 2.2(P_k - P)^{1/2}\right], \qquad \left(\frac{P_k - P}{P_k}\right) \ll 1;$$

$$2)\quad E_1 = 8\pi\frac{\sigma_f\nu_0}{a}\frac{v^2}{c^2}, \qquad E_2 = (2\pi)^{1/2}\frac{\sigma_f^2\nu_0^2}{a^2}\frac{c}{v} \gg E_1,$$
$$P_k \gg P. \tag{12}$$

Анализ фазовой плоскости показывает, что точки $E_0 = 0$ и $E = E_2$ — устойчивые узлы, $E = E_1$ — седло. Помимо сепаратрисы E_1E_0 у системы (10) существует сепаратриса E_1E_2, соединяющая точки E_1 и E_2 (рис. 2). Это означает возможность существования в сверхпроводнике волн двух типов с амплитудами $\Delta E = E_1$ и $E_2 - E_1$. Волна *1*, очевидно, при $P \to P_k$ имеет амплитуду порядка E_k; ее скорость определяется равенством (10) при $E = E_1$. При $P \ll P_k$ уравнение (10) имеет две стационарные точки: $E_0 = 0$ — устойчивый узел, $E_1 = 2\beta^2\tau E_\kappa$ — седло.

Сепаратриса, соединяющая два эти состояния равновесия, соответствует решению типа "перепада" с амплитудой E_e, связанной со скоростью v_E и шириной фронта Δz волны соотношениями

$$v_E = \frac{L}{t_\kappa}\left[\frac{E_e}{2\tau E_\kappa}\right]^{1/2}, \tag{13}$$

$$\Delta z = 16\,\frac{1+\tau}{\tau^{1/2}}\left[\frac{E_\kappa}{E_e}\right]^{1/2}. \tag{14}$$

Волна *2* при $P \to P_k$ обладает малой амплитудой

$$\frac{\Delta E}{E_k} = 4.4(P_k - P)^{1/2} \ll 1, \tag{15}$$

а в случае $P \ll P_k$ ее скорость обратно пропорциональна амплитуде волны. Столь экзотическая зависимость v_E от $\Delta E = E_e$, скорее всего, означает неустойчивость данного типа волн. Отметим, что наблюдение второго типа волн возможно в образцах конечных размеров с несимметричными граничными условиями.

В заключение отметим, что проведенные нами исследования показывают возможность применения полученных здесь результатов для высокотемпературных сверхпроводников, охлаждаемых до азотных температур ($T = 77\,\mathrm{K}$), при известных значениях физических параметров образца.

Список литературы

[1] В.А. Альтов, В.Б. Зенкевич, М.Г. Кремлев, В.В. Сычев. Стабилизация сверхпроводящих магнитных систем. Энергоатомиздат, М. (1984). 312 с.
[2] А.В. Гуревич, Р.Г. Минц. Тепловые автоволны в нормальных металлах и сверхпроводниках. Наука, М. (1987). 167 с.
[3] И.Л. Максимов, Ю.Н. Мастаков, Н.А. Тайланов. ФТТ **28**, *8*, 2323 (1986).
[4] C.P. Bean. Phys. Rev. Lett. **8**, *6*, 250 (1962).
[5] Р.Г. Минц, А.Л. Рахманов. Неустойчивости в сверхпроводниках. Наука, М. (1984). 264 с.
[6] В.И. Карпман. Нелинейные волны в диспергирующих средах. Наука, М. (1973). 175 с.
[7] А.А Андронов, А.А. Витт, С.Э. Хайкин. Теория колебаний. Наука, М. (1981). 568 с.