

Энергия основного состояния X^- - и X^+ -трионов в двумерной квантовой яме при произвольном отношении масс

© Р.А. Сергеев, Р.А. Сурис

Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе Российской академии наук,
194021 Санкт-Петербург, Россия

E-mail: rinat@theory.ioffe.rssi.ru

(Поступила в Редакцию 27 июля 2000 г.)

Предлагается простая модельная вариационная функция, позволяющая единым образом хорошо описывать двумерные X^+ - и X^- -трионы во всем диапазоне отношений масс электрона и дырки, используя минимальное количество варьируемых параметров.

Работа частично поддержана грантами РФФИ № 99-02-16796 и "Научная школа" 00-15-96812.

Трионами называются связанные электрон-дырочные комплексы, состоящие либо из двух электронов и дырки (трион X^-), либо из двух дырок и одного электрона (трион X^+). X^- и X^+ — образования, состоящие из двух одинаковых Ферми-частиц, связанных кулоновскими силами на третьей частице, обладающей таким же по величине, но противоположным по знаку, зарядом. Масса третьей частицы не обязательно должна совпадать с массами двух других частиц. Зависимость энергии комплекса от отношения масс входящих в него частиц как раз и есть предмет нашей задачи. Разумная модель триона должна описывать комплекс при любом отношении масс входящих в него частиц и давать в пределах такие известные объекты как ион водорода H^- , молекулу водорода H_2^+ , D^- -центр в полупроводнике (два электрона, связанные на положительно заряженном центре) ион позитрония (два электрона + позитрон) и т. д.

Впервые практическая потребность в изучении подобных объектов возникла в химии в конце 20-х годов для описания гидрида лития, в частности взаимодействия ионов Li^- и H^- (Хилераас [1]). Первый теоретический расчет иона H^- был проделан Бете [2] в 1929 г.; в этой работе был применен вариационный метод с тремя варьируемыми параметрами.

В сороковые годы свойства отрицательного иона водорода привлекались для объяснения непрозрачности атмосферы Солнца и солнцеподобных звезд. В связи с этим, возникла необходимость существенно уточнить полученный ранее результат Бете. Главным образом, предпринимались попытки просто увеличить количество вариационных параметров [3–5], но также шел поиск и более точных вариационных функций; здесь определенного успеха добился в 1945 г. Чандрасекар [6].

Трехчастичные электрон-дырочные комплексы в полупроводниках (трионы) были предсказаны в 1958 г. Лампертом [7]. Экспериментальное изучение трионов было сильно затруднено в связи с низкой характерной энергией связи этого комплекса (десятые доли meV), что ставило жесткие требования на температуру, при которой их можно было наблюдать (~ 1 К).

Интерес к трионам возродился в связи с развитием гетероструктур и появлением возможности инженерии молекул — создания искусственных объектов или управления параметрами существующих за счет использования квантоворазмерных структур (ям, нитей, точек). В частности, проведенные в 80-х годах теоретические расчеты [8–10] показали возможность значительного (на порядок) увеличения энергии связи триона в полупроводниковой структуре с квантовой ямой. Это дало возможность провести экспериментальное наблюдение триона в такой структуре, что и было проделано Кхенгом [11] в 1992 г.

С тех пор трионы обоих видов многократно наблюдались в различных гетероструктурах при низких температурах. С появлением возможности практического изучения этих объектов возрос и теоретический интерес к ним.

Отличие триона от иона H^- или молекулы H_2^+ состоит в том, что отношение эффективных масс электрона и дырки, составляющих комплекс, не является малой величиной и волновые функции электронов и дырок невозможно разделить. Интересно то, что в различных полупроводниках возможна реализация различных отношений масс электрона и дырки, отчего структуры и свойства X^- и X^+ -комплексов могут качественно меняться от иона позитрония в одном пределе (при равных массах электрона дырки) до иона H^- или молекулы H_2^+ в другом пределе (при массе электрона \ll массы дырки). Фактически трионы представляют собой природный промежуточный объект между H^- и H_2^+ . Изучая X^- и X^+ -комплексы при различных отношениях масс электрона и дырки, можно плавно перейти от отрицательного иона к положительно заряженной молекуле, что, учитывая огромное различие этих двух объектов, представляет большой теоретический и экспериментальный интерес.

В последние годы опубликовано значительное количество работ по расчетам энергии и волновой функции трионов при различных отношениях масс [12–15]. Изучались также зависимости параметров этих комплексов от ширины ямы [16,17] и величины магнитного поля [18–21].

Данная работа посвящена исследованию X^- - и X^+ -трионов при всех отношениях масс в бесконечно глубокой квантовой яме (в двумерном приближении) в отсутствие внешнего магнитного поля. Одна из проблем существующих на данный момент расчетов трионов — это плохое поведение исследовавшихся пробных вариационных функций X^+ -триона при стремлении отношения масс электрона и дырки к нулю, т.е. в пределе молекулы H_2^+ . Проблема заключается в том, что в этом пределе в комплексе присутствуют две бесконечно тяжелые частицы, следовательно, волновая функция такой системы должна принимать δ -функциональный вид от расстояния между этими частицами. В связи с этим именно при малом отношении масс начинают резко меняться волновая функция и энергия X^+ -триона. Известно, что энергия образования молекулы H_2^+ ($H + p$) почти в 4 раза превышает аналогичную энергию образования иона H^- ($H + e$). Расчеты [8,10,12] показывают, что характерное для триона отношение его энергии связи к энергии связи соответствующего экситона практически не зависит от отношения масс электрона и дырки (μ) в случае X^- -комплекса и медленно возрастает для X^+ -комплекса при изменении отношения масс μ от иона позитрония ($\mu = 1$) до молекулы H_2^+ ($\mu = 0$). При этом основное изменение энергии связи X^+ -триона происходит при малых значениях отношения масс ($\mu < 0.1$). В этом диапазоне отношений масс энергия связи триона изменяется почти в 2 раза. Фактически при отношении масс в диапазоне $\mu \in 0.1-0.3$ происходит качественный переход от структуры волновой функции аналогичной иону H^- к структуре подобной молекуле H_2^+ .

Во всех проводившихся расчетах использовались пробные функции, основанные на структуре иона H^- и практически не обеспечивающие возможности описания двух бесконечно тяжелых частиц в молекуле H_2^+ . При приближении к H_2^+ они либо переставали давать приемлемый результат, либо вынуждали использовать большое количество вариационных параметров для приближения упоминавшейся ранее δ -функциональной зависимости. В связи с этим использование таких пробных функций становилось по меньшей мере малоэффективным.

В данной работе предлагается сравнительно простая вариационная функция, зависящая от небольшого количества параметров, которая хорошо описывает как X^- , так и X^+ -комплексы при любых отношениях эффективных масс электрона и дырки в строго двумерном случае.

1. Модели и волновая функция

Качественно можно рассматривать две модели триона.

1) В пределе H^- — модель тяжелого ядра, около которого, сильно экранируя друг друга, локализованы два легких электрона. В этой модели трион хорошо описывается двумерным аналогом вариационной функции,

предложенной Чандрасекаром [6],

$$\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = (\exp(-ar_1 - br_2) + \exp(-br_1 - ar_2))(1 + c|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|). \quad (1)$$

Она состоит из симметризованной экситоноподобной части с различными радиусами орбит электронов и поляризации множителя. Величины $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ — 2D-векторы от ядра к электронам. Вариационные параметры a и b имеют смысл радиусов орбит двух электронов, а параметр c обеспечивает рост волновой функции при увеличении расстояния между электронами, т.е. учитывает поляризационные эффекты. Данная волновая функция хорошо описывает синглетное состояние трионов во всем диапазоне отношений масс, за исключением трионов, близких по структуре к молекуле H_2^+ , т.е. X^+ -комплексов с отношением масс $\mu < 0.1$. Несмотря на малое число вариационных параметров (всего 3), известно [22], что в случае трех измерений эта функция дает энергию иона H^- с точностью до 10%.

2) В пределе H_2^+ — модель молекулы, т.е. двух тяжелых ядер и электрона, находящегося на связывающей орбитали. В основном состоянии эта система хорошо описывается волновой функцией вида

$$\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = (\exp(-ar_1) + \exp(-ar_2))\mathfrak{R}(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|), \quad (2)$$

состоящей из суммы двух водородоподобных волновых функций [23], умноженной на волновую функцию относительного движения ядер $\mathfrak{R}(R)$, где $R = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$.

В пределе бесконечной массы ядер функция $\mathfrak{R}(R)$ должна переходить в δ -образную функцию от $R - R_0$, где R_0 — минимум связывающего потенциала. Если массы ядер велики, но не бесконечны, то при больших R функция $\mathfrak{R}(R)$ должна убывать как $\exp(-sR)$, где $s = \sqrt{-2m_h E/\hbar^2}$, E — энергия связи данного триона относительно распада на свободный экситон и дырку, m_h — масса дырки. Вблизи R_0 , функция $\mathfrak{R}(R)$ должна вести себя как $\mathfrak{R}(R) \sim \exp(-d(R - R_0)^2)$, причем при стремлении отношения масс электрона и ядра к нулю параметр d стремится к бесконечности.

2. Основное состояние X^+ - и X^- -трионов

Основным состоянием X^+ - и X^- -комплексов в отсутствие магнитного поля является их синглетное состояние, т.е. состояние с антипараллельной ориентацией спинов двух одинаковых Ферми-частиц (электронов для X^- , дырок для X^+). В настоящее время считается, что для триона X^- это основное состояние является также и единственным. Во всяком случае, нет никаких теоретических или экспериментальных указаний на существование возбужденных состояний этого комплекса. Для X^+ ситуация иная, так как получающаяся в пределе $\mu \rightarrow 0$ молекула H_2^+ при бесконечной массе

ядер, обладает бесконечным дискретным спектром как колебательных, так и вращательных уровней.

”Хорошую” функцию для описания основного состояния обоих трионов при любых массах составляющих их частиц будем строить следующим образом.

1) Разобьем весь диапазон отношений масс на два интервала, в каждом из которых трион можно описывать относительно простыми, приведенными выше моделями. Иначе говоря, будем считать, что при любом отношении масс электрона и дырки трион описывается волновой функцией по структуре либо близкой к иону H^- (две частицы ”вращаются” вокруг одной), либо аналогичной молекуле H_2^+ (одна частица связывает две другие). Причем условное деление на эти две области вовсе не соответствует делению трионов на X^- и X^+ -трионы. Как уже говорилось, условная граница проходит при отношениях масс $\mu \sim 0.1-0.3 X^+$ -комплекса.

2) В рамках каждой модели выберем простейшую (с минимальным количеством варьируемых параметров) волновую функцию, хорошо описывающую трион в этом приближении. При этом волновые функции триона, соответствующие разным моделям должны иметь максимально схожую между собой структуру и максимально большое количество вариационных параметров одной волновой функции должно использоваться в другой. Такими волновыми функциями являются предложенные выше функции (1) и (2). Легко заметить, что бесполяризационная часть волновой функции (1) ($\exp(-ar_1 - br_2) + \exp(-br_1 - ar_2)$) структурно соответствует электронной части функции (2) ($\exp(-ar_1) + \exp(ar_2)$) и, наоборот, часть функции (2), отвечающая за относительное движение ядер в (2) ($\Re(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)$), соответствует поляризационному члену в (1) ($1 + c|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$).

3) Искомую пробную функцию получим объединением выбранных в предыдущем пункте двух волновых функций. Сходство структур выбранных волновых функций позволяет уменьшить суммарное количество варьируемых параметров в итоговой функции.

Приведенная далее пробная вариационная функция как раз и представляет собой искомый продукт объединения приведенных выше функций (1) и (2)

$$\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = (\exp(-ar_1 - br_2) + \exp(-br_1 - ar_2)) \times \frac{1 + cR}{1 + d(R - R_0)^2} \exp(-sR), \quad (3)$$

где $R = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$, a, b, c, d, R_0, s — вариационные параметры.

Физический смысл этих параметров прозрачен: a и b являются обратными радиусами двух одинаковых частиц, локализованных на третьей с учетом их взаимного экранирования, c учитывает поляризационные эффекты, d — продольные колебания двух одинаковых частиц друг относительно друга, R_0 — среднее расстояние между ними, s оптимизирует волновую функцию на бесконечности.

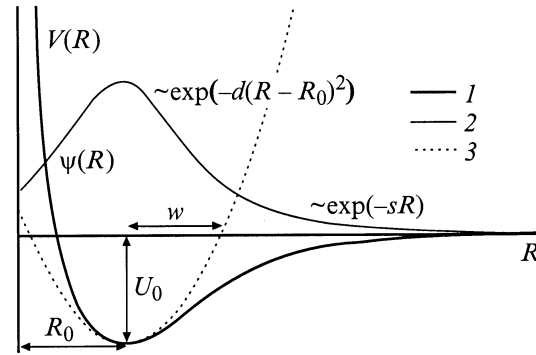


Рис. 1. Структура молекулы H_2^+ . 1 — качественный вид связывающего потенциала ядер в H_2^+ , 2 — параболическая аппроксимация связывающего потенциала вблизи дна потенциальной ямы, 3 — качественная зависимость волновой функции H_2^+ от расстояния между ядрами.

Легко видеть, что указанная волновая функция включает в себя как волновую функцию (1) отрицательного иона H^- (при $d, s = 0$), так и функцию (2) положительной молекулы H_2^+ (при $b, c = 0$), а дополнительные параметры только улучшают результат в обоих предельных случаях. Также несложно обосновать выбор множителя $(1 + d(R - R_0)^2)^{-1}$ в функции (3), отвечающего за продольные колебания комплекса.

Заметим, что в случае если связь между двумя одинаковыми частицами триона можно описать с помощью параболического потенциала (рис. 1), то волновая функция (3) должна зависеть от R (расстояния между этими двумя частицами) по Гауссу, $\psi(R) \sim \exp(-d(R - R_0)^2)$. На чисто параболическом потенциале можно описывать лишь очень малые колебания комплекса X^+ и только в пределе молекулы H_2^+ . Реально потенциал, связывающий две одинаковые частицы в трионе, на больших расстояниях гораздо слабее параболического и гауссовское приближение волновой функции триона приводит к гораздо более быстрому ее убыванию с расстоянием, чем это есть в действительности. Поэтому была взята более слабая зависимость, $\psi(R) \sim 1/(1 + d(R - R_0)^2)$, которая неплохо описывает первое приближение колебаний триона вблизи $R = R_0$, а поведение функции $\psi(R)$ на бесконечности было задано более слабым, чем гауссовская функция, множителем $\exp(-sR)$.

В результате получена волновая функция (3), которая в обоих пределах даст результаты не худшие, чем функции (1) и (2), и, хотим надеяться, позволит получить хорошее приближение для энергии триона во всем диапазоне отношений масс электрона и дырки при минимуме вариационных параметров.

3. Результаты и обсуждение

На рис. 2 приведена зависимость энергии связи триона от отношения масс электрона и дырки, нормированная на энергию соответствующего двумерного экситона (далее

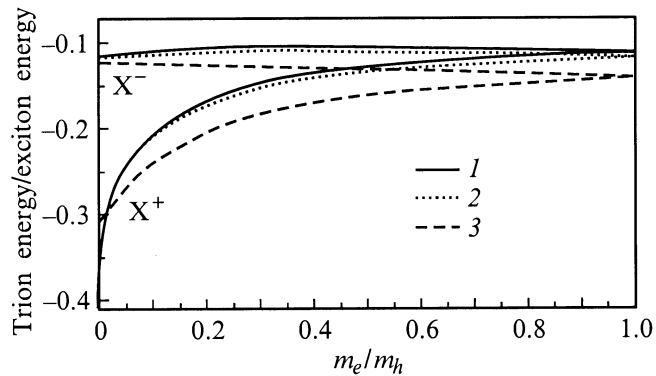


Рис. 2. Зависимость энергии связи триона от отношения масс электрона и дырки. 1 — наши результаты, 2 — вариационный расчет с 22 варьируемыми параметрами [10]; 3 — приближение модельного потенциала триона [12].

под энергией связи триона будем подразумевать именно это), полученная с использованием нашей вариационной функции (3). Для сравнения на том же рисунке приведена пересчитанная в те же переменные зависимость, полученная в [10], с использованием вариационного метода с 22 параметрами.

Несмотря существенное различие в количестве подгоночных параметров (6 и 22), хорошо заметно близкое соответствие между этими зависимостями. Во всем диапазоне отношений масс, за исключением предела H_2^+ (при $\mu < 0.1$), наши результаты воспроизводят результаты [10] с точностью лучшей чем 5%. Заметим, что полученная ошибка оказалась даже меньше, чем дает отдельно взятая волновая функция Чандрасекара (1) в пределе иона H^- ($\sim 10\%$). Это иллюстрация того, что при проделанном выше объединении функций (1) и (2) в функцию (3) эти функции заметно улучшили и дополнили друг друга. Заслуживает внимания то, что получившаяся ошибка в энергии триона ($< 5\%$) приблизительно постоянна для всех отношений масс. Это позволяет говорить, что наша вариационная функция (3), которую мы сконструировали из волновых функций иона H^- и молекулы H_2^+ , позволяет описывать одинаково хорошо весь диапазон отношений масс, а не только эти предельные случаи.

Особого отношения заслуживает предел H_2^+ ($\mu < 0.1$). Проблема, как уже упоминалось в начале статьи, состоит в том, что при этих массах трион X^+ приобретает ярко выраженную молекулярную структуру. Именно в связи с этим волновые функции, основанные только на структуре иона H^- (а одной из таких и была функция, использовавшаяся в [10]), перестают давать хороший результат даже при использовании большого числа вариационных параметров. Поэтому на рис. 1 зависимость, полученная в [10], обрывается при отношении масс $\mu = 0.1$. Наша функция, как мы полагаем, даже в этом случае продолжает давать результат с точностью, не меньшей, чем ранее. Для

сравнения укажем, что полученная нами энергия триона при $\mu = 0$ (0.41) полностью совпадает с приведенной в [24].

На рис. 2 также проведено сравнение наших результатов с теоретической зависимостью, полученной в [12] с использованием усредненного связывающего потенциала триона. Отметим, что в отличие от результатов, полученных вариационными методами, энергия связи триона, приведенная в [12], вовсе не обязательно должна быть меньше точной энергии комплекса. Тем не менее качественное сравнение нашей зависимости и зависимости [12] позволяет прийти к тому же выводу: имеется качественное совпадение зависимостей во всем диапазоне отношений масс, кроме уже упомянувшегося предела H_2^+ ($\mu < 0.1$). В этом пределе энергия триона, полученная в модели [12], почти на четверть меньше, чем у нас. Это объясняется тем, что при получении зависимости [12] использовалась модель триона, хорошо применимая к комплексам, имеющим структуру аналогичную иону H^- , но дающая сбои при переходе к структуре H_2^+ (см. также [24,25]). Это еще один пример того, что многие модели и приближения, хорошо описывающие X^- - и X^+ -трионы в широком диапазоне масс, неприменимы в пределе молекулы H_2^+ . Именно поэтому для нас важен учет модели H_2^+ при построении общей модели триона.

Обратим внимание на то, что энергия триона (нормированная на энергию экситона) практически постоянна для X^- (≈ 0.12) и не зависит от отношения масс электрона и дырки, в то время как для X^+ она растет по мере приближения к H_2^+ , причем основной рост приходится как раз на менее исследованный ранее диапазон $\mu \leq 0.1$. На этом участке энергия триона возрастает с 0.22 (при $\mu = 0.1$) до 0.41 (при $\mu = 0.0$) почти в 2 раза.

Проведем обоснование этого факта в рамках наших моделей. Заметим, что диапазон масс $\mu \leq 0.1$ соответствует случаю двух тяжелых дырки и ядра, связанных в молекулу электроном. Можно считать, что волновая функция электрона успевает адиабатически подстраиваться под медленное движение дырок и для последних становится применимо приближение связывающего межатомного потенциала [23]. В этом случае задача сводится к движению дырки с приведенной массой $m_h/2$ в двумерном потенциале $V(R)$, образованном суммой связывающего потенциала электрона и потенциала кулоновского отталкивания дырок. Качественный вид потенциала $V(R)$ приведен на рис. 1. При больших массах дырки можно считать, что ее волновая функция сосредоточена в окрестности R_0 — минимума потенциала $V(R)$. В этом случае в приближении параболического потенциала

$$V(R) \approx V(R_0) + \frac{\kappa}{2}(R - R_0)^2. \quad (4)$$

Тогда энергия связи триона в этом приближении

$$E_{tr}(\mu) \approx V(R_0) + \frac{\hbar\omega}{2}, \quad (5)$$

а величина $\hbar\omega$ равна

$$\hbar\omega = \hbar\sqrt{\frac{\kappa}{m_h}} = \sqrt{\frac{\hbar^2}{m_h} \frac{\partial^2 V(R)}{(\partial R)^2} \Big|_{R=R_0}}. \quad (6)$$

Величину $\partial^2 V(R)/(\partial R)^2 \Big|_{R=R_0}$ можно оценить, используя глубину U_0 потенциальной ямы, образованной потенциалом $V(R)$, и ее полуширину w ,

$$\frac{\partial^2 V(R)}{(\partial R)^2} \Big|_{R=R_0} \sim 2 \frac{U_0}{w^2}. \quad (7)$$

Очевидно, глубина ямы $U_0 = V(R_0) = E_{\text{tr}0}$ (энергии связи триона при $\mu = 0$). Для оценки полуширины ямы заметим, что $w < 2R_0$, так как при стремлении $R \rightarrow 0$ потенциал $V(R) \rightarrow +\infty$ за счет кулоновского отталкивания дырок. С другой стороны, можно положить, что $w > R_0/2$, так как и кулоновский потенциал отталкивания дырок, и связывающий потенциал электрона заметно спадают только на расстояниях $R > 2R_0$. Отсюда

$$\frac{1}{2} \frac{E_{\text{tr}0}}{R_0^2} < \frac{\partial^2 V(R)}{(\partial R)^2} \Big|_{R=R_0} < \frac{8E_{\text{tr}0}}{R_0^2}. \quad (8)$$

Примем в качестве оценки

$$\frac{\partial^2 V(R)}{(\partial R)^2} \Big|_{R=R_0} \approx \frac{2E_{\text{tr}0}}{R_0^2}. \quad (9)$$

Оптимальное межатомное расстояние R_0 в двумерной молекуле H_2^+ составляет

$$R_0 \approx 0.5a_0, \quad (10)$$

где a_0 — трехмерный боровский радиус. Тогда, учитывая, что зависимость энергии связи экситона от отношения масс

$$E_{\text{ex}}(\mu) = -\frac{2}{1+\mu} \frac{\hbar^2}{m_e a_0^2}, \quad (11)$$

из формул (5)–(11) получаем

$$\begin{aligned} \frac{E_{\text{tr}}(\mu)}{E_{\text{ex}}(\mu)} &= (1+\mu) \frac{E_{\text{tr}}(0)}{E_{\text{ex}}(0)} + \sqrt{\mu}(1+\mu) \sqrt{\frac{E_{\text{tr}}(0)}{E_{\text{ex}}(0)}} \\ &\approx 0.41(1+\mu) - 0.64\sqrt{\mu}(1+\mu). \end{aligned} \quad (12)$$

Как видно, в пределе молекулы H_2^+ (малые μ) энергия триона корневым образом зависит от отношения масс. Если при отношении масс электрона и дырки $\mu = 0$ отношение энергии триона к энергии экситона составляет

$$\frac{E_{\text{tr}}(0.0)}{E_{\text{ex}}(0.0)} \approx 0.41,$$

то уже при отношении масс $\mu = 0.1$ формула (12) дает уменьшение отношения энергии связи триона к энергии

экситона почти в 2 раза,

$$\frac{E_{\text{tr}}(0.1)}{E_{\text{ex}}(0.1)} \approx 0.23.$$

Этот результат с учетом приближенности проделанных оценок очень хорошо совпадает с полученным из расчетов значением 0.22.

В заключение отметим, что с помощью проведенных простых качественных рассуждений на основе волновых функций иона H^- и молекулы H_2^+ удалось сконструировать пробную функцию, позволяющую хорошо описывать оба триона во всем диапазоне отношений масс, с использованием не очень большого числа варьируемых параметров. Напомним, что результат [10] был получен с использованием 22 варьируемых параметров, в то время как мы использовали только 6. Это дает возможность на основе предложенных моделей конструировать пробные функции для вариационного расчета более сложных случаев, в частности триона в яме конечной ширины или в присутствии магнитного поля.

Список литературы

- [1] E.A. Hylleraas. Z. Phys. **63**, 771 (1930).
- [2] H.A. Bethe. Z. Phys. **57**, 815 (1929).
- [3] E.A. Hylleraas. Z. Phys. **63**, 291 (1930).
- [4] L.R. Henrich. Astrophys. J. **99**, 59 (1944).
- [5] E.A. Hylleraas, J. Midtdal. Phys. Rev. **103**, 829 (1956).
- [6] S. Chandrasekhar. Astrophys. J. **100**, 176 (1944).
- [7] M.A. Lampert. Phys. Rev. Lett. **1**, 12, 450 (1958).
- [8] B. Stebe, C. Comte. Phys. Rev. **B15**, 8, 3967 (1977).
- [9] R. Schilling, D.C. Mattis. Phys. Rev. Lett. **49**, 11, 808 (1982).
- [10] B. Stebe, A. Ainane. Superlatt. Microstruct. **5**, 4, 545 (1989).
- [11] K. Kheng, R.T. Cox, Y.M. d'Aubigne, F. Bassani, K. Saminadayar, S. Tatarenko. Phys. Rev. Lett. **71**, 11, 1752 (1993).
- [12] A. Thilagam. Phys. Rev. **B55**, 12, 7804 (1996).
- [13] K. Varga, Y. Suzuki. Phys. Rev. **A53**, 3, 1907 (1996).
- [14] Y.K. Ho. Phys. Rev. **48**, 6, 4780 (1993).
- [15] N.P. Sandler, C.R. Proetto. Phys. Rev. **B46**, 12, 7707 (1992).
- [16] B. Stebe, G. Munschy, L. Stauffer, F. Dujardin, J. Murat. Phys. Rev. **B56**, 19, 12454 (1997).
- [17] C. Riva, F.M. Peeters, K. Varga. Phys. Stat. Solid. **A178**, 1, 513 (2000).
- [18] B. Stebe, E. Feddi, G. Munschy. Phys. Rev. **B35**, 9, 4331 (1987).
- [19] B. Stebe, A. Ainane, F. Dujardin. J. Phys-condens mat. **8**, 29, 5383 (1996).
- [20] J.J. Quinn, A. Wojs, I. Szlufarska, K.S. Yi. Phys. Rev. **B60**, 16, 11273 (1999).
- [21] A.B. Dzyubenko. Solid State Commun. **113**, 12, 683 (2000).
- [22] H. A. Berhe, E.E. Salpeter. Quantum mechanics of one- and two-electron atoms. Springer Verlag, Berlin-Cottingen-Heidelberg (1957).
- [23] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Квантовая механика. Наука, М. (1974). Задачи к пп. 81, 82.
- [24] K. Varga. Phys. Rev. **B57**, 20, 13305 (1998).
- [25] A. Thilagam. Phys. Rev. **B57**, 20, 13307 (1998).