

# Нелинейные стационарные волны с транспортным током в сверхпроводниках

© Н.А. Тайланов, У.Т. Яхшиев

Научно-исследовательский институт прикладной физики Государственного университета Узбекистана, 700174 Ташкент, Узбекистан

(Поступила в Редакцию 13 ноября 2000 г.)

Изучен профиль нелинейной стационарной термомагнитной волны в резистивном состоянии сверхпроводников при разных значениях транспортного тока. Показано, что при относительно больших значениях транспортного тока в образце термомагнитная волна имеет осциллирующий профиль. При сравнительно малых значениях транспортного тока мы имеем ударную волну с монотонной структурой. Дана оценка для скорости распространения и ширины фронта волны.

При использовании сверхпроводящих магнитных систем в прикладных целях достаточно важным и актуальным является вопрос о тепловом разрушении сверхпроводящего состояния в присутствии транспортного тока (см. [1]). При внешних флуктуациях различной физической природы (тепловые, магнитные, механические и т.д.) в сверхпроводнике могут возникать участки, находящиеся в резистивной фазе. Джоулев разогрев этих участков транспортным током, с плотностью  $j_{tr}$  может привести к повышению температуры  $T$  выше критической  $T > T_c$  и появлению в образце вихревого электрического поля  $\mathbf{E}$ . В [2] было показано, что в сочетании с дисперсионными и нелинейными эффектами диссипативные процессы в сверхпроводнике, связанные с джоулевым разогревом, приводят к формированию устойчивых структур — термоэлектромагнитных  $\mathbf{E}$ - и  $\mathbf{H}$ -волн в зависимости от условий на поверхности образца.

В данной работе изучена качественная картина динамики нелинейных термомагнитных диссипативных структур в сверхпроводнике, находящемся в резистивном состоянии.

Динамика термомагнитных волн в сверхпроводнике, движущихся с постоянной скоростью  $v$  вдоль оси  $x$ , в автомодельных переменных  $\xi(x, t) = x - vt$  описывается нелинейным уравнением теплопроводности [2–4]

$$-\nu v \frac{dT}{d\xi} = \frac{d}{d\xi} \left[ \kappa \frac{dT}{d\xi} \right] + jE, \quad (1)$$

системой уравнений Максвелла

$$\frac{dE}{d\xi} = -\frac{4\pi v}{c^2} j, \quad (2)$$

$$E = \frac{v}{c} H \quad (3)$$

и связанным с ними уравнением критического состояния

$$j = j_c(T, H) + j_r(E) + j_{tr}, \quad (4)$$

где  $\nu$  и  $\kappa$  — коэффициенты теплоемкости и теплопроводности,  $j_c(T) = j_0 - a(T - T_0)$  — критическая плотность тока в модели Бина ( $\frac{dj_c}{dT} = 0$ ) [5],  $T_0$  и  $T_c$  — начальная и

критическая температура сверхпроводника,  $a = \left| \frac{dj_c}{dT} \right|_{T=T_0}$  описывает термически активируемое ослабление абрикосовских вихрей на дефектах кристаллической решетки,  $j_r(E)$  — резистивная плотность тока,  $j_{tr}$  — плотность транспортного тока.

В приближении слабого разогрева  $(T - T_0) \ll (T_c - T_0)$  для области вязкого течения потока ( $E > E_f$ , где  $E_f$  — граница линейного участка на ВАХ жестких сверхпроводников [6]) зависимость плотности резистивного тока  $j_r$  от электрического поля  $E$  линейна, т.е.  $j_r \approx \sigma_f E$  ( $\sigma_f$  — эффективная проводимость). В области слабых полей ( $E < E_f$ ) зависимость  $j_r(E)$  существенно нелинейна и, по-видимому, обусловлена термоактивационным движением магнитного потока (крип потока [6]). Здесь нас будет интересовать возмущение достаточно большой амплитуды ( $E > E_f$ ) и мы воспользуемся линейной зависимостью  $j_r(E)$ .

Соответствующие тепловые и электродинамические граничные условия к уравнениям (1)–(4) имеют вид

$$T(\xi \rightarrow +\infty) = T_0, \quad \frac{dT}{d\xi}(\xi \rightarrow -\infty) = 0,$$

$$E(\xi \rightarrow +\infty) = 0, \quad E(\xi \rightarrow -\infty) = E_e. \quad (5)$$

$E_e$  — постоянное внешнее электрическое поле.

Решая совместно системы (1)–(4) с учетом граничных условий (5), получим уравнение для распределения нелинейной  $E$ -волны

$$\frac{d^3 E}{dz^3} + \beta(1 + \tau) \frac{d^2 E}{dz^2} + \beta^2 \tau \left[ \frac{dE}{dz} + \frac{E_j}{E_\kappa} E \right] = 0. \quad (6)$$

Здесь  $z = \frac{\xi}{L}$ ,  $\beta = \frac{v\kappa}{L}$ ,  $\tau = \frac{4\pi\kappa\sigma_f}{c^2\nu}$ ,  $E_j = \frac{j_{tr}}{\sigma_f}$ ,  $E_\kappa = \frac{\kappa}{aL^2}$ ,  $L = \frac{cH_e}{4\pi j_0}$  — глубина проникновения магнитного потока в глубь сверхпроводника,  $t_\kappa = \frac{\nu L^2}{\kappa}$  — тепловое время задачи,  $H_e$  — внешнее магнитное поле.

Исследуя корни характеристического уравнения [7]

$$\lambda(\lambda + \beta)(\lambda + \beta\tau) = -\beta^2 \tau \frac{E_j}{E_\kappa}, \quad (7)$$

нетрудно убедиться, что в рассматриваемой задаче возникают решения, осциллирующие вокруг нача-

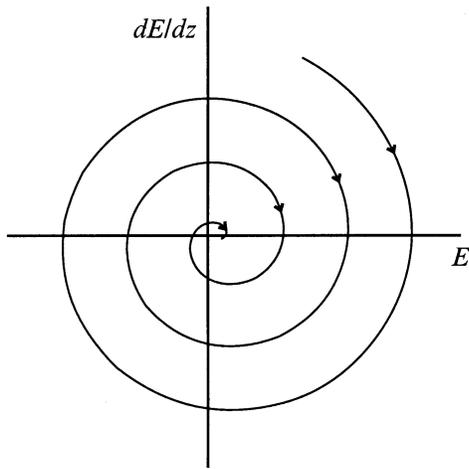


Рис. 1. Фазовый портрет уравнения (7) при  $\beta(1 + \tau)E_\kappa > E_j$ .

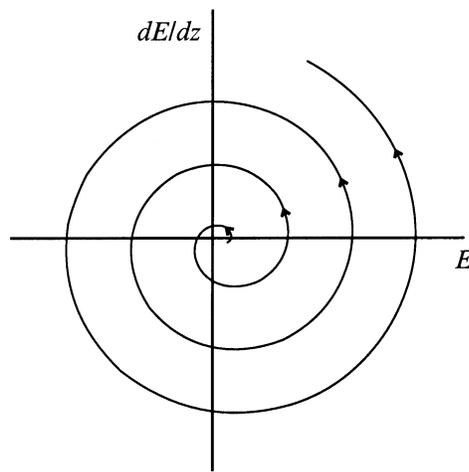


Рис. 2. Фазовый портрет уравнения (7) при  $\beta(1 + \tau)E_\kappa < E_j$ .

ла координат ( $E_0 = 0$ ) фазовой диаграммы с затуханием или нарастанием их амплитуды. Осцилляции появляются при  $E_j > \frac{\beta\tau}{2(1+\tau)}E_\kappa$ , затухают при  $\beta(1 + \tau)E_\kappa > E_j > \frac{\beta\tau}{2(1+\tau)}E_\kappa$ , а при  $\beta(1 + \tau)E_\kappa < E_j$  — нарастают. Это означает, что при достаточно большом значении транспортного тока  $j_{tr}$  корни характеристического уравнения (7) являются комплексными, интегральные кривые будут спиралевидными кривыми, а начало координат  $E_0 = 0$  — особой точкой типа фокус. Если предположить, что коэффициенты  $\beta$ ,  $\tau$  всегда положительны, то изображающая точка будет приближаться по траектории к началу координат, которое будет устойчивым положением равновесия (рис. 1). В обратном случае, когда  $\beta(1 + \tau)E_\kappa < E_j$ , фокус становится неустойчивым и изображающая точка уходит на бесконечность (рис. 2). Отметим, что конечное значение величины транспортного тока  $j_{tr}$  приводит к смещению особых точек и соответственно граничных условий.

При значительно малых значениях транспортного тока, когда выполняется условие  $\frac{dE}{dz} \gg \beta^2\tau E_j$  (волны большой амплитуды), уравнение (6) интегрируется, и соответствующую модель можно рассматривать как линейный осциллятор с затуханием при наличии силы трения

$$F_t = -\beta(1 + \tau)\frac{dE}{dz}, \quad (8)$$

где  $z$  — аналог времени,  $E$  — координата "материальной" точки. Уравнение "потенциальной ямы" имеет вид

$$U(E) = -\frac{E^3}{6E_\kappa} + \beta^2\tau\frac{E^2}{2}. \quad (9)$$

Исследование фазовой плоскости  $(\frac{dE}{dz}, E)$  уравнения (6) показывает, что в нем имеются две точки равновесия:  $E_0$  — устойчивый узел и  $E_1 = 2\beta^2\tau E_\kappa$  — седло. Два состояния равновесия ( $E_0, E_1$ ) разделены на фазовой плоскости сепаратрисой АВ (рис. 3). При  $z \rightarrow \infty$  материальная точка находится в точке  $E_1$ , а при  $z \rightarrow -\infty$  она переходит в точку  $E_0$ . Переход из одного состояния равновесия в другое происходит только монотонно.

В приближении  $\tau \ll 1$  решение (6) представляется в виде

$$E(z) = \frac{E_1}{2} \left[ 1 - \text{th} \left( \frac{\beta}{2}(z - z_0) \right) \right]. \quad (10)$$

Условие  $\tau = \frac{D_i}{D_m} \ll 1$  означает, что перераспределение магнитного потока происходит значительно быстрее, чем происходит перенос тепла, где  $D_i = \frac{\kappa}{\nu}$  и  $D_m = \frac{c^2}{4\pi\sigma_j}$  — коэффициенты тепловой и магнитной диффузии соответственно [6]. Поэтому пространственный масштаб проникновения магнитного потока  $L_E$  будет существенно больше, чем соответствующий тепловой масштаб  $L_T$ , и, следовательно, пространственные производные  $\frac{d^n E}{dz^n}$  будут содержать малый параметр  $\left[ \frac{L_T}{L_E} \right] \ll 1$ . Непосредственно дифференцированием уравнения (6) легко проверить справедливость данного приближения

$$\frac{d^2 E}{dz^2} \left( \beta \frac{dE}{dz} \right)^{-1} = \tau \ll 1. \quad (11)$$

Максимальная погрешность данной аппроксимации порядка  $\frac{\tau}{(1+\tau)^2}$ . Например, для  $\tau = 1$  она составляет

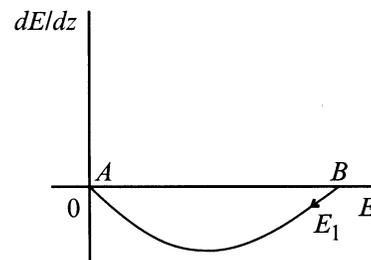


Рис. 3. Фазовый портрет уравнения (7) при малых значениях транспортного тока  $\frac{dE}{dz} \gg \beta^2\tau E_j$ .

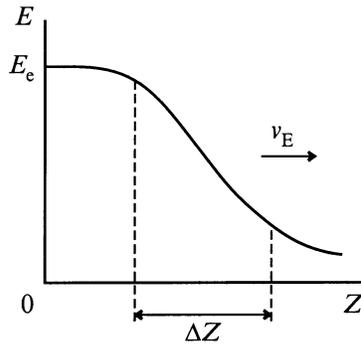


Рис. 4. Структура ударной термомагнитной волны.

25%, в предельном случае  $\tau \rightarrow 0$  исчезающе мала. Выражение (10) описывает профиль ударной термомагнитной волны, распространяющейся в глубь сверхпроводника. Структура волны изображена на рис. 4. Используя граничное условие  $E(z \rightarrow -\infty) = E_e$ , нетрудно определить скорость волны  $v_E$

$$v_E = \frac{L}{t_\kappa} \left[ \frac{E_e}{2\tau E_\kappa} \right]^{1/2} \quad (12)$$

с амплитудой  $E_e$ , а также ширины фронта  $\delta z$  в виде

$$\delta z = 16 \frac{1 + \tau}{\tau^{1/2}} \left[ \frac{E_\kappa}{E_e} \right]^{1/2}. \quad (13)$$

Численные оценки дают значение  $v_E = 1 - 10^2$  cm/s и  $\delta z = 10^{-1} - 10^{-2}$  для  $\tau = 1$ .

В заключение заметим, что полученные результаты позволяют описать нелинейную стадию эволюции термомагнитной неустойчивости в резистивном состоянии сверхпроводников. На начальном этапе наблюдается экспоненциальный рост возмущений  $T$ ,  $E$  и  $H$  с инкрементом  $\lambda$ , определяемым из линейной теории (см. [8]). Эта линейная стадия неустойчивости длится в течение интервала времени  $t_j = \frac{t_\kappa}{\lambda}$ . На более поздней стадии развития неустойчивости в глубь образца распространяется стационарная **E**- или **H**-волна в зависимости от того, какая из этих величин задается фиксированной на поверхности образца в процессе движения волны. Скорость волны определяется формулой (12), а время ее движения в образце толщиной  $2l$  есть

$$\Delta t = \frac{l}{v_E}. \quad (14)$$

Отсюда следует, что переход из сверхпроводящего состояния в нормальное может происходить путем распространения стационарной термомагнитной волны, структура которой существенно зависит от дисперсионных и диссипативных эффектов.

### Список литературы

- [1] В.Р. Романовский. ДАН **365**, 1, 44 (1999).
- [2] И.Л. Максимов, Ю.Н. Мастаков, Н.А. Тайланов. ФТТ **28**, 8, 2323 (1986).
- [3] Н.А. Тайланов. Металлофизика **13**, 9, 713 (1991).
- [4] Н.А. Тайланов, С. Кучкаров. ФТТ **33**, 6, 1873 (1991).
- [5] С.Р. Bean. Phys. Rev. Lett. **8**, 6, 250 (1962).
- [6] Р.Г. Минц, А.Л. Рахманов. Неустойчивости в сверхпроводниках. Наука, М. (1984).
- [7] В.И. Карпман. Нелинейные волны в диспергирующих средах. Наука, М. (1973).
- [8] В.А. Альтов, В.Б. Зенкевич, М.Г. Кремлев, В.В. Сычев. Стабилизация сверхпроводящих магнитных систем. Энергоатомиздат, М. (1984).