

Точное решение задачи о прохождении тока через границу раздела кристаллитов в металле

© А.В. Латышев, А.А. Юшканов

Московский педагогический университет,
107005 Москва, Россия

(Поступила в Редакцию в окончательном виде 20 марта 2001 г.)

Получено аналитическое решение задачи об электрическом сопротивлении плоской границы раздела между двумя кристаллитами поликристаллического металла. Решение проводилось с использованием метода Кейза. Электрическое поле и функция распределения электронов представлены в виде разложения по собственным функциям соответствующего характеристического уравнения. Показано, что электрическое поле на границе раздела резко возрастает для случая, когда дебаевская частота существенно превышает частоту столкновений электронов в объеме металла. Оказалось, что сопротивление границы раздела не зависит от частоты объемных столкновений электронов, т.е. от длины их свободного пробега.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-00336).

Большинство металлов, с которыми приходится иметь дело на практике, имеют поликристаллическую структуру. Для них существенное значение имеет оценка вклада в сопротивление границ кристаллов в общее электрическое сопротивление. Однако вычисление электрического сопротивления, обусловленного плоскостными дефектами, наталкивается на значительные математические трудности.

В настоящей работе рассматривается задача о сопротивлении плоской границы раздела между двумя кристаллитами в случае, когда направление тока перпендикулярно границе раздела. В отличие от работы [1] здесь решение доведено "до числа", в явном виде построены электрическое поле и функция распределения электронов на границе раздела. При этом используется метод разложения решения граничной задачи по регулярным и сингулярным собственным функциям соответствующего характеристического уравнения, предложенный Кейзом для решения задач теории переноса нейтронов (см., например, [2]). Метод Кейза особенно удобен для анализа граничных задач теории переноса, так как позволяет в явном виде выразить все физически значимые моды решения, а также вычислить значение функции распределения и ее интегральных характеристик на границе. В методе Винера–Хопфа для этого приходится использовать специальные процедуры [3,4]. Применительно к твердотельной плазме метод Кейза получил развитие в [5]. Необходимо отметить работу [6], в которой рассмотрение ведется качественным образом и ограничивается преимущественно одномерными системами; в частности, вопрос о поведении электрического поля вблизи границы не рассматривался.

Будем предполагать, что поверхность Ферми для рассматриваемого металла имеет сферическую форму. Пусть граница раздела перпендикулярна направлению электрического поля E . Положим величину электрического поля достаточно малой для того, чтобы было применимо линейное приближение [7]. При этом функцию

распределения электронов можно искать в виде

$$f = f_0 - \psi \frac{\partial}{\partial \varepsilon} f_0.$$

Здесь f_0 — функция распределения Ферми, ε — кинетическая энергия электронов. Во всех практически важных случаях температуру можно положить равной нулю. Тогда

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} f_0 = -\delta(\varepsilon - \varepsilon_F),$$

где ε_F — энергия Ферми, $\delta(x)$ — δ -функция.

Направим ось x вдоль электрического поля, начало координат на оси x поместим на границе раздела. Тогда функция $\psi(x, \mathbf{v})$ удовлетворяет следующему уравнению [8,9]:

$$v_x \frac{\partial}{\partial x} \psi(x, \mathbf{v}) = e_0 v_x E - \nu(\psi - \bar{\psi}). \quad (1)$$

Здесь e_0 — заряд электрона, ν — частота столкновений, $\bar{\psi}$ — избыточная плотность электронов,

$$\bar{\psi} = 2 \int (2\pi\hbar)^{-3} (f - f_0) d^3 p.$$

Поле $E(x)$ удовлетворяет уравнению

$$E'(x) = 4\pi e_0 \bar{\psi}. \quad (2)$$

Поскольку $v_x = v_F \cos \theta$, удобно ввести переменную $\mu = \cos \theta$. Кроме того, введем следующие безразмерные координату, функцию и параметр:

$$x' \equiv x\nu/v_F, \quad e(x) \equiv E(x)/E_0, \quad k^2 \equiv 3(\omega_p/\nu)^2,$$

где ω_p — частота плазменных колебаний, E_0 — поле вдали от границы раздела. Введем функцию $\varphi \equiv \nu(e_0 E_0 v_F)^{-1} \psi$. Тогда для функции φ и e систему уравнений (1) и (2) запишем в виде

$$\mu \frac{\partial}{\partial x} \varphi(x, \mu) + \varphi(x, \mu) = \mu e(x) + \bar{\varphi}(x), \quad (3)$$

$$e'(x) = k^2 \bar{\varphi}(x), \quad (4)$$

где

$$\bar{\varphi}(x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \varphi(x, \mu) d\mu.$$

Ввиду симметрии задачи, ограничимся рассмотрением полупространства $x > 0$. Условие на бесконечности для $e(x)$ следует из ее определения и имеет вид

$$e(\infty) = 1. \quad (5)$$

Будем предполагать, что электроны рассеиваются на поверхности диффузно. При этом вероятность рассеяния вперед для электрона равна α , при рассеянии на поверхности $0 \leq \alpha \leq 1$. Вследствие диффузности рассеяния электронов на границе раздела условие, налагаемое на функцию распределения при $x = 0$, имеет вид

$$\varphi(0, \mu) = a, \quad 0 < \mu < 1. \quad (6)$$

Величина a определяется из условия

$$a = -2(1 - 2\alpha) \int_{-1}^0 \mu \varphi(0, \mu) d\mu. \quad (7)$$

Для случая изотропного рассеяния (когда $\alpha = 1/2$) имеем $a = 0$.

Вдали от поверхности функции распределения переходят в свое асимптотическое распределение

$$\varphi(x, \mu) = \mu + o(1), \quad x \rightarrow +\infty, \quad -1 < \mu < 0. \quad (8)$$

Дополнительное электрическое сопротивление току, оказываемое стенкой, можно найти из условия

$$R = j^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} [E(x) - E_0] dx. \quad (9)$$

Здесь j — плотность тока, а R нормируется на единицу площади поверхности раздела. Ввиду симметрии задачи соотношение (9) можно записать в виде

$$R = 2j^{-1} \int_0^{\infty} [E(x) - E_0] dx.$$

Переходя к безразмерным величинам, получаем

$$R = \left[b \int_0^{\infty} (e(x) - 1) dx \right] \left[\int_{-1}^1 \mu \varphi(0, \mu) d\mu \right]^{-1}, \quad (10)$$

где $b = 4\pi v_F / (3ne_0^2) = 4v_F / (3\sigma\nu)$, σ — электропроводность металла.

1. Собственные значения и собственные функции

Будем искать решение уравнений (3), (4) в виде $\varphi_{\eta}(x, \mu) = \Psi(\eta, \mu) \exp(-x/\eta)$, $e_{\eta}(x) = E(\eta) \exp(-x/\eta)$.

Получим характеристическую систему

$$(\eta - \mu)\Psi(\eta, \mu) = \frac{1}{2} \eta n(\eta) + \mu \eta E(\eta),$$

$$E(\eta) = -k^2 \frac{1}{2} \eta n(\eta),$$

где

$$n(\eta) = \int_{-1}^1 \Psi(\eta, \mu) d\mu.$$

Примем условие нормировки

$$\frac{1}{2} \eta n(\eta) = 1. \quad (11)$$

С его помощью перепишем характеристическую систему в виде

$$(\eta - \mu)\Psi(\eta, \mu) = 1 - k^2 \mu \eta, \quad E(\eta) = -k^2.$$

Из первого уравнения этой системы и условия (11) найдем (см. [10]) обобщенные собственные функции непрерывного спектра

$$\Psi(\eta, \mu) = -k^2 \mu + (1 - k^2 \mu^2) P \frac{1}{\eta - \mu} + 2 \frac{\lambda(\eta)}{\eta} \delta(\eta - \mu), \quad -1 < \eta < 1. \quad (12)$$

Здесь P — символ главного значения при интегрировании, $\lambda(z)$ — дисперсионная функция,

$$\lambda(z) = (1 - k^2 z^2) \lambda_0(z),$$

где $\lambda_0(z)$ есть дисперсионная функция Кейза [2],

$$\lambda_0(z) = 1 + \frac{1}{2} z \int_{-1}^1 \frac{d\tau}{\tau - z}.$$

Дискретный спектр по определению состоит из нулей дисперсионного уравнения $\lambda(z)/z = 0$. Таких нулей три: $\eta_0 = \infty$, $\eta_{\pm 1} = \pm 1/k$ ($k > 0$). Им отвечают следующие собственные функции:

$$\Psi(\eta_0, \mu) = -k^2 \mu, \quad E(\eta_0) = -k^2,$$

$$\Psi(\pm \eta_1, \mu) = \frac{1 \mp k^2 \eta_1 \mu}{\pm \eta_1 - \mu} = \pm k, \quad E(\pm \eta_1) = -k^2.$$

Выпишем соответствующие собственные (частные) решения исходной системы, удовлетворяющие условию (8),

$$\varphi_{\eta_0} = -k^2 \mu, \quad e_{\eta_0} = -k^2;$$

$\varphi_{\eta_1} = k \exp(-kx)$, $e_{\eta_1} = -k^2 \exp(-kx)$ (дебаевская мода). Первая мода φ_{η_0} описывает электрическую проводимость металла, вторая мода φ_{η_1} соответствует дебаевской экранировке электрического поля, при этом дебаевский радиус экранирования $r_D \sim 1/k$.

2. Разложение решения по собственным функциям

Покажем, что решение граничной задачи (3)–(6) можно представить в виде разложения по собственным функциям

$$\varphi(x, \mu) = \mu + A_1 \exp(-kx) + \int_0^1 \exp(-x/\eta) \Psi(\eta, \mu) A(\eta) d\eta, \quad (13)$$

$$e(x) = 1 - A_1 k \exp(-kx) - k^2 \int_0^1 \exp(-x/\eta) A(\eta) d\eta. \quad (14)$$

Здесь A_1 и $A(\eta)$ — соответственно коэффициенты дискретного и непрерывного спектров. Отметим, что разложения (13) и (14) удовлетворяют граничному условию (5).

Подставляя в (13) выражение (12) и используя граничное условие (6), получаем сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши [11]

$$-a + \mu + A_1 - k^2 \mu \int_0^1 A(\eta) d\eta + (1 - k^2 \mu^2) \int_0^1 \frac{A(\eta) d\eta}{\eta - \mu} + 2 \frac{\lambda(\mu)}{\mu} A(\mu) = 0, \quad 0 < \mu < 1. \quad (15)$$

Введем вспомогательную функцию

$$N(z) = \int_0^1 \frac{A(\eta) d\eta}{\eta - z}, \quad (16)$$

аналитическую в комплексной плоскости с разрезом вдоль отрезка $[0, 1]$, граничные значения которой сверху и снизу на разрезе связаны формулами Сохоцкого

$$N^+(\mu) - N^-(\mu) = 2\pi i A(\mu), \quad 0 < \mu < 1, \\ \frac{1}{2}[N^+(\mu) + N^-(\mu)] \equiv N(\mu), \quad (17)$$

где

$$N(\mu) = \int_0^1 \frac{A(\eta) d\eta}{\eta - \mu}, \quad 0 < \mu < 1.$$

Приведем формулы Сохоцкого для функции $\lambda(z)$

$$\lambda^+(\mu) - \lambda^-(\mu) = \pi i \mu (1 - k^2 \mu^2), \quad -1 < \mu < 1, \\ \frac{1}{2}[\lambda^+(\mu) + \lambda^-(\mu)] = \lambda(\mu),$$

где

$$\lambda(\mu) = (1 - k^2 \mu^2) \left(1 + \frac{\mu}{2} \ln \frac{1 - \mu}{1 + \mu} \right), \quad -1 < \mu < 1.$$

Уравнение (15) будем решать способом Карлемана–Векуа [11], считая регулярную часть уравнения $\int_0^1 A(\eta) d\eta$ известной. Обозначим

$$\psi(\mu) = a - \mu - A_1 + k^2 \mu \int_0^1 A(\eta) d\eta$$

и с помощью граничных значений $N(z)$ и $\lambda(z)$ перейдем от уравнения (15) к краевой задаче Римана [11]

$$\lambda_0^+(\mu)[N^+(\mu) - \psi(\mu)/(1 - k^2 \mu^2)] - \lambda_0^-(\mu) \times [N^-(\mu) - \psi(\mu)/(1 - k^2 \mu^2)] \equiv 0, \quad 0 < \mu < 1. \quad (18)$$

В качестве решения соответствующей однородной задачи

$$\frac{X^+(\mu)}{X^-(\mu)} = \frac{\lambda_0^+(\mu)}{\lambda_0^-(\mu)}, \quad 0 < \mu < 1$$

возьмем ограниченное в нуле решение

$$X(z) = \frac{1}{z} \exp V(z), \quad V(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\zeta(\tau)}{\tau - z} d\tau,$$

где $\zeta(\tau) = \theta(\tau) - \pi$, $\theta(\tau) = \arg \lambda_0^+(\tau)$ — регулярная ветвь аргумента функции $\lambda_0^+(\tau)$, фиксированная в нуле условием $\theta(0) = 0$. Нетрудно видеть, что

$$\zeta(\tau) = \operatorname{arctg} \frac{\pi \tau}{2\lambda_0(\tau)} - \pi \theta_+(\tau_0 - \tau),$$

где $\tau_0 = 0.8335565596\dots$ — нуль функции $\lambda_0(\tau)$, $\theta_+(\tau)$ — функция Хевисайда, $\theta_+(\tau) = 1$, $\tau \geq 0$, $\theta_+(\tau) = 0$, $\tau < 0$. Преобразуем неоднородную задачу (18) с помощью однородной в краевую задачу определения аналитической функции по ее нулевому скачку

$$X^+(\mu)[N^+(\mu) - \psi(\mu)/(1 - k^2 \mu^2)] - X^-(\mu)[N^-(\mu) - \psi(\mu)/(1 - k^2 \mu^2)] = 0, \quad 0 < \mu < 1.$$

Ее общее решение имеет вид

$$N(z) = \frac{\psi(z)}{1 - k^2 z^2} + \frac{C}{(1 - k^2 z^2)X(z)}, \quad (19)$$

где C — произвольная постоянная. Чтобы принять общее решение (19) в качестве вспомогательной функции (16), устраним особенности (полюсы) общего решения. Полюс $z = -1/k$ не лежит на разрезе, поэтому для его устранения положим

$$\psi(-1/k) + C/X(-1/k) = 0. \quad (20)$$

Полюс $z = 1/k$ при $k > 1$ лежит на разрезе ($0 < 1/k < 1$), а при $0 < k < 1$ не лежит на нем.

Если этот полюс не лежит на разрезе, то он устраняется аналогичным условием

$$\psi(1/k) + C/X(1/k) = 0. \quad (21)$$

Пусть теперь рассматриваемый полюс лежит на разрезе. В этом случае общее решение имеет вид

$$N(\mu) = \frac{\psi(\mu)}{1 - k^2\mu^2} + \frac{C}{1 - k^2\mu^2} \frac{1}{2} \left[\frac{1}{X^+(\mu)} - \frac{1}{X^-(\mu)} \right]$$

или

$$N(\mu) = \frac{\psi(\mu)}{1 - k^2\mu^2} + \frac{C}{1 - k^2\mu^2} \frac{\cos \zeta(\mu)}{X(\mu)}.$$

Очевидно, что полюс устраняется условием

$$\psi(1/k) + C \cos \zeta(1/k)/X(1/k) = 0. \quad (22)$$

Итак, для нахождения неизвестных постоянных A_1 и C общего решения требуется решить уравнения (20) и (21), если $0 < k < 1$, или уравнения (20) и (22), если $k > 1$. Однако тут есть одна тонкость. Значение интеграла $\int_0^1 A(\eta) d\eta$, входящего в $\psi(z)$, зависит от того, лежит на разрезе полюс $1/k$ или нет. Из выражения (19) находим коэффициент непрерывного спектра

$$A(\eta) = \frac{C}{2\pi i(1 - k^2\eta^2)} \left[\frac{1}{X^+(\eta)} - \frac{1}{X^-(\eta)} \right]. \quad (23)$$

Следовательно,

$$k \int_0^1 A(\eta) d\eta = -C \frac{1}{2} [J(1/k) - J(-1/k)],$$

где

$$J(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \left[\frac{1}{X^+(\eta)} - \frac{1}{X^-(\eta)} \right] \frac{d\tau}{\tau - z}. \quad (24)$$

Согласно [5], если $z \in (0, 1)$, то

$$J(z) = \frac{1}{X(z)} - z + V_1, \quad (25)$$

где

$$V_1 = -\frac{1}{\pi} \int_0^1 \zeta(\tau) d\tau = 0.71045,$$

а если $z \in (0, 1)$, то

$$J(\mu) = \frac{1}{2} [J^+(\mu) + J^-(\mu)] = \frac{\cos \zeta(\mu)}{X(\mu)} - \mu + V_1. \quad (26)$$

Следовательно,

$$k \int_0^1 A(\eta) d\eta = C \left[\frac{1}{k} - \frac{\theta_+(k-1) \cos \zeta(1/k) + \theta_+(1-k)}{2X(1/k)} + \frac{1}{2X(-1/k)} \right].$$

В обоих случаях ($0 < k < 1$ или $k > 1$) из уравнений (20), (21) или (20), (22) получаем, что $C = 1$, а формулы для A_1 можно объединить в одну

$$A_1 = a + \frac{\theta_+(k-1) \cos \zeta(1/k) + \theta_+(1-k)}{2X(1/k)} + \frac{1}{2X(-1/k)}. \quad (27)$$

Коэффициенты A_1 и $A(\eta)$ разложений (13) и (14) найдены. Однако коэффициент A_1 выражается через неизвестную постоянную a . Для определения постоянной a подставим в условие (7) разложение (13). Воспользовавшись свойством собственных функций

$$\int_{-1}^1 \mu \Psi(\eta, \mu) d\mu \equiv 0, \quad 0 < \eta < 1,$$

находим

$$\int_{-1}^1 \mu \varphi(0, \mu) d\mu = \frac{2}{3}, \quad (28)$$

следовательно, согласно (7),

$$a = (4\alpha - 2) \left[\int_{-1}^1 \mu \varphi(0, \mu) d\mu - \int_{-1}^1 \mu \varphi(0, \mu) d\mu \right] = (4\alpha - 2) \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}a \right),$$

откуда $a = (4\alpha - 2)/(3\alpha)$.

3. Электрическое сопротивление, поле и функция распределения

Подставляя в (10) значение плотности тока (28) и разложение (14), находим, что

$$R = -\frac{3}{2}b \left[A_1 + k^2 \int_0^1 \eta A(\eta) d\eta \right]. \quad (29)$$

Согласно (23)

$$k^2 \int_0^1 \eta A(\eta) d\eta = -\frac{1}{2} [J(1/k) + J(-1/k)],$$

где $J(z)$ (см. (24)) определяется согласно (25) (если $0 < k < 1$) или по формуле (26) (если $k > 1$). В обоих случаях величина электрического сопротивления, согласно (29), выражается одной и той же формулой (рис. 1)

$$R = b \left[\frac{3}{2} V_1 - 2 + \frac{1}{\alpha} \right]. \quad (30)$$

Отсюда видно, что в случае чисто изотропного отражения электронов от поверхности раздела ($\alpha = \frac{1}{2}$) имеем $R = 1.5bV_1 = 1.06568(4v_{Fm})/(3ne_0)$.

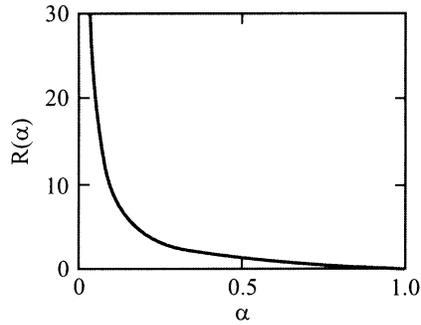


Рис. 1. Зависимость электрического сопротивления от вероятности рассеяния электронов вперед.

Таким образом, получено точное решение (30) задачи об электрическом сопротивлении плоской границы раздела между двумя кристаллитами. Результаты работы могут быть использованы при определении электрического сопротивления поликристаллического металла.

Отметим, что из формулы (30) видно, что сопротивление R не зависит от частоты столкновений электронов в объеме металла. Из формулы (30) видно также, что при $\alpha \rightarrow 0$ сопротивление неограниченно возрастает, что соответствует непроницаемости для электронов поверхности раздела кристаллитов.

Найдем теперь функцию распределения электронов и электрическое поле на границе раздела между двумя кристаллитами. Согласно (13) и (14), имеем

$$\varphi(0, \mu) = \mu + A_1 - k^2 \mu \int_0^1 A(\eta) d\eta + (1 - k^2 \mu^2) \times \int_0^1 \frac{A(\eta) d\eta}{\eta - \mu}, \quad -1 < \mu < 0, \quad (31)$$

$$e(0) = 1 - k^2 A_1 - k \int_0^1 A(\eta) d\eta. \quad (32)$$

Используя (16), (17) и (19) и (21), преобразуем (31) к виду

$$\varphi(0, \mu) = \frac{4\alpha - 2}{3\alpha} + \frac{1}{X(\mu)}.$$

Если в формулу (32) подставить найденные выше значения коэффициентов, то в обоих случаях получаем одну и ту же формулу для электрического поля на границе раздела кристаллитов (графики безразмерного поля на рис. 2 и 3),

$$e(0) = -k \left[\frac{1}{X(-1/k)} + \frac{4}{3\alpha} \left(\alpha - \frac{1}{2} \right) \right]. \quad (33)$$

Профиль электрического поля в полупространстве ($x > 0$) находим, используя полученные формулы для

A_1 и $A(\eta)$. В результате для случаев $k > 1$ и $0 < k < 1$ получаем два выражения, которые объединим в одно

$$e(x) = 1 - k \exp(-kx) \times \left[a + \frac{\theta_+(k-1) \cos \zeta(1/k) + \theta_+(1-k)}{2X(1/k)} + \frac{1}{X(-1/k)} \right] - \frac{1}{\pi} \int_0^1 \exp\left(-\frac{x}{\eta}\right) \frac{\sin \zeta(\eta) d\eta}{(\eta^2 - k^{-2})X(\eta)}.$$

Профили электрического поля (безразмерного) по обе стороны границы раздела кристаллитов ($x = 0$) предста-

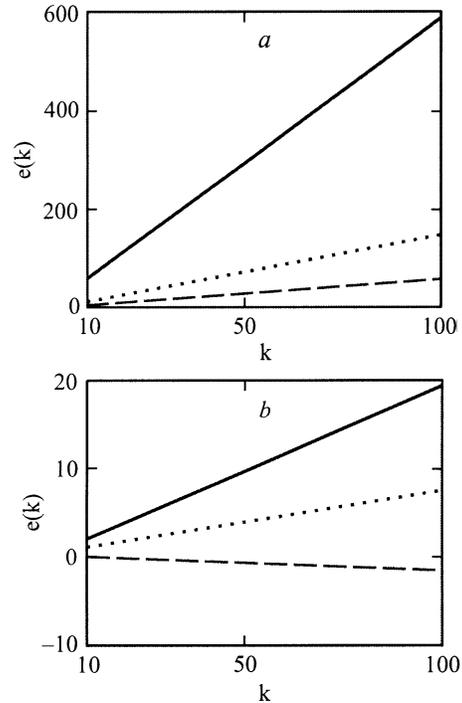


Рис. 2. Зависимость электрического поля на границе раздела кристаллитов от величины k ($0 < k < 100$). a — $\alpha = 0.1$ (сплошная кривая), 0.3 (пунктирная), 0.5 (штриховая); b — $\alpha = 0.7$ (сплошная кривая), 0.8 (пунктирная), 0.9 (штриховая).

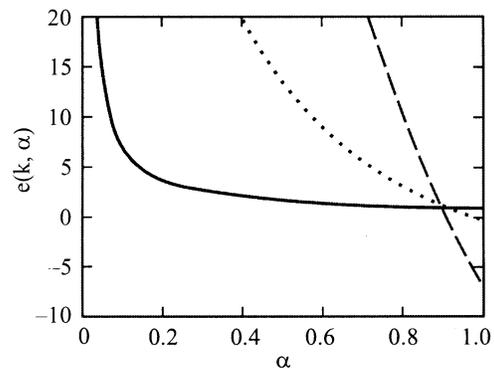


Рис. 3. Зависимость электрического поля на границе от вероятности рассеяния электронов вперед. $k = 1$ (сплошная кривая), 20 (пунктирная), 100 (штриховая).

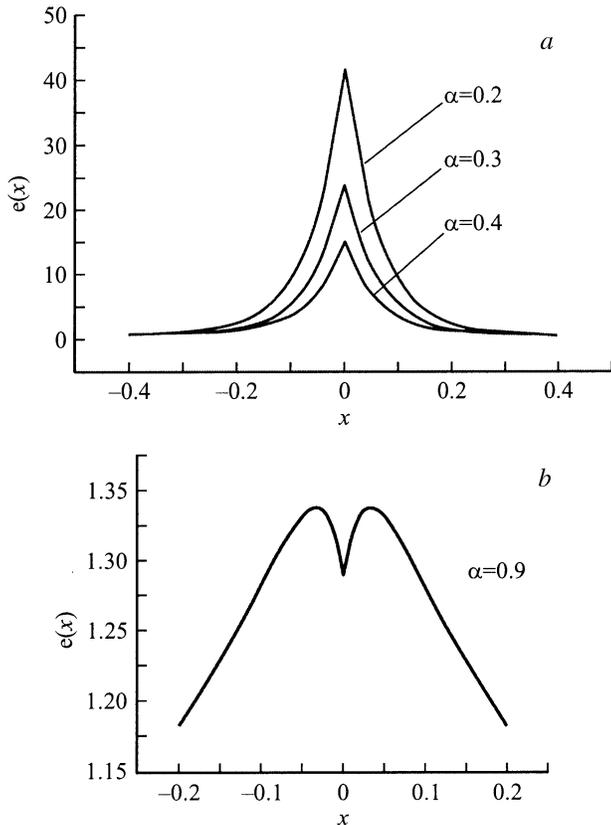


Рис. 4. Профиль электрического поля по обе стороны границы раздела кристаллитов при $k = 16$.

влены на рис. 4. На рис. 5 изображен профиль плотности электронов (заряда) по обе стороны границы раздела, определяемый формулой

$$e'(x) = k^2 \exp(-kx) \times \left[a + \frac{\theta_+(k-1) \cos \zeta(1/k) + \theta_+(1-k)}{2X(1/k)} + \frac{1}{2X(-1/k)} \right] - \frac{1}{\pi} \int_0^1 \exp\left(-\frac{x}{\eta}\right) \frac{\sin \zeta(\eta)}{(\eta^2 - k^{-2})X(\eta)} \frac{d\eta}{\eta}.$$

Рассмотрим случай, когда частота плазменных колебаний ω_p много больше частоты столкновений электронов ν ($\omega_p \gg \nu$). Это выполняется для большинства металлов при нормальных условиях. При этом $X(-1/k) \approx X(-0) = -\sqrt{3}$, следовательно, величина электрического поля (см. (33)) равна

$$e(0) = k \left[\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{4}{3\alpha} \left(\alpha - \frac{1}{2} \right) \right]. \quad (34)$$

Из формулы (34) видно, что в рассматриваемом случае величина поля на границе раздела $e(0)$ существенно превышает значение поля вдали от границы раздела (в используемых обозначениях $e(0) \equiv 1$). Это явление

(резкое возрастание электрического поля на границе раздела кристаллитов) связано с тем, что по мере уменьшения ν (и роста k при условии, что $\omega_p = \text{const}$) растет объемная проводимость металла, следовательно, при фиксированном значении поля растет величина тока. Граница раздела обладает фиксированным электрическим сопротивлением. При этом разность потенциалов должна возрастать, а с ростом разности потенциалов возрастает и величина электрического поля.

Рассмотрим дебаевскую моду для электрического поля на поверхности (см. формулу (27)). В случае когда $k \gg 1$, из (27) следует, что

$$A_1 = a - \frac{1}{2X(+0)} + \frac{1}{2X(-0)} = a - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{4}{3\alpha} \left(\alpha - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{\sqrt{3}}. \quad (35)$$

Из сравнения дебаевской моды (35) с величиной поля $e(0)$ (см. (33)) видно, что величина поля на поверхности раздела в пределе при $k \rightarrow \infty$ определяется дебаевской модой: $e(0) \equiv e_D$, где $e_D = -kA_1$. Поскольку дебаевская мода затухает на расстоянии дебаевского радиуса отклонение электрического поля от его значения вдали от границы раздела сосредоточено главным образом на расстояниях порядка дебаевского радиуса от поверхности раздела кристаллитов.

Из приведенных графиков на рис. 4 видно, что при α , близких к единице, зависимость электрического поля от расстояния до поверхности раздела носит немонотонный характер. Случай $\alpha > 1/2$ соответствует ситуации, когда электроны на поверхности раздела рассеиваются преимущественно вперед. При этом средняя скорость электронов в результате рассеяния уменьшается. В силу закона сохранения числа электронов уменьшение скорости приводит к росту плотности электронов, что в свою очередь ведет к появлению объемного заряда (конфигурация этого объемного заряда видна на графике

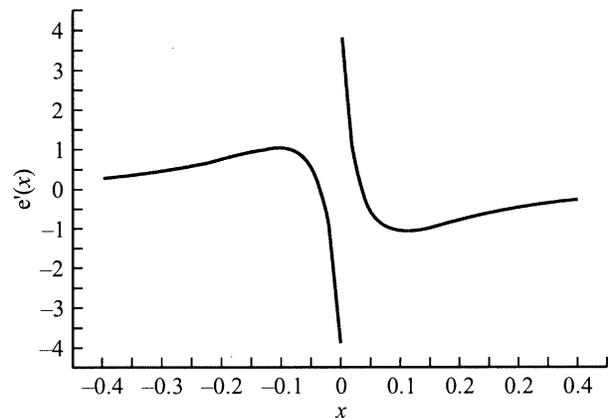


Рис. 5. Профиль плотности электронов по обе стороны границы раздела кристаллитов ($\alpha = 0.9$, $k = 16$).

на рис. 5). При $\alpha < 1/2$ этот эффект из-за преимущественного рассеяния электронов назад нивелируется.

На больших расстояниях от поверхности раздела доминируют эффекты уменьшения эффективной проводимости металла (из-за рассеяния на поверхности). Это приводит к соответствующему росту электрического поля. Данный эффект становится все более выраженным с ростом k — величины, пропорциональной отношению частоты плазменных колебаний, и соответствует уменьшению частоты объемных столкновений электронов. При этом растет влияние рассеяния электронов на поверхности на проводимость.

Список литературы

- [1] А.В. Латышев, А.А. Юшканов. Журн. вычисл. математики и мат. физики **33**, 4, 600 (1993).
- [2] К. Кейз, П. Цвайфель. Линейная теория переноса. Мир, М. (1972). 384 с.
- [3] И.Ф. Волошин, В.Г. Скобов, Л.М. Фишер, А.С. Чернов. ЖЭТФ **80**, 1, 183 (1981).
- [4] В.М. Гохфельд, М.А. Гулянский, М.И. Каганов, А.Г. Плявенек. ЖЭТФ **89**, 3, 985 (1985).
- [5] А.В. Латышев, А.А. Юшканов. ЖТФ **70**, 8, 1 (2000).
- [6] R. Landauer. Z. Physik **B21**, 2, 217 (1975).
- [7] А.А. Абрикосов. Введение в теорию нормальных металлов. Наука, М. (1972). 288 с.
- [8] Дж. Займан. Электроны и фононы. Изд-во иностр. лит., М. (1962). 488 с.
- [9] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Физическая кинетика. Наука, М. (1979). 528 с.
- [10] В.С. Владимиров. Обобщенные функции в математической физике. Наука, М. (1976). 280 с.
- [11] Ф.Д. Гахов. Краевые задачи. Наука, М. (1977). 640 с.