# Роль пространственной дисперсии электромагнитной волны при ее прохождении сквозь квантовую яму

© Л.И. Коровин, И.Г. Ланг, Д.А. Контрерас-Солорио*, С.Т. Павлов*,**

Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе Российской академии наук,
194021 Санкт-Петербург, Россия
*Esquela de Fisica de la UAZ, Apartado Postal
c-580, 98060 Zacatecas, Mexico
**Физический институт им. П.Н. Лебедева Российской академии наук,
117924 Москва, Россия

E-mail: ilang@dor.ioffe.rssi.ru
E-mail: pavlov@ahabon.reduas.mx

(Поступила в Редакцию 3 апреля 2001 г.)

Развита теория прохождения света сквозь квантовую яму, помещенную в сильное магнитное поле, перпендикулярное плоскости ямы, в которой имеют место межзонные переходы. Длина волны света предполагается сравнимой с шириной ямы. Получены формулы для отражения, поглощения и пропускания, в которых учтены пространственная дисперсия монохроматической световой волны и различие в показателях преломления квантовой ямы и барьера. Предполагается нормальное к плоскости ямы падение света и учитывается один возбужденный уровень. Показано, что учет указанных двух факторов сильнее всего влияет на отражение, так как наряду с отражением, вызванным межзонными переходами в квантовой яме, появляется дополнительное отражение от границ ямы. Наиболее радикальные изменения в отражении имеют место в случае, когда обратное радиационное время жизни возбужденного состояния в квантовой яме мало по сравнению с обратным нерадиационным временем жизни. Со стороны больших значений ширины ямы теория ограничена условием существования уровней размерного квантования.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 00-02-16904) и Программы МНТК "Физика твердотельных наноструктур" (97-1099).

При прохождении света сквозь квантовую яму в отраженной и прошедшей волнах появляются характерные особенности, по которым можно судить об электронных процессах, протекающих в квантовой яме [1–4]. Наиболее интересные результаты получаются в том случае, когда уровни энергии электронной системы являются дискретными. Это имеет место в сильном магнитном поле, направленном перпендикулярно плоскости ямы, либо при учете экситонных состояний в нулевом магнитном поле. Современные полупроводниковые технологии позволяют изготавливать квантовые ямы высокого качества, когда радиационное уширение линии поглощения может быть сравнимо с вкладами нерадиационных механизмов релаксации или превысить их. В такой ситуации нельзя ограничиться линейным по взаимодействию электрона с электромагнитным полем приближением, а необходимо учитывать все порядки этого взаимодействия [5–18].

Отражение, поглощение и пропускание электромагнитной волны, которая взаимодействует с дискретными уровнями электронной системы квантовой ямы в области частот, соответствующих межзонным переходам, рассматривались также в работах [12–18]. В них в качестве возбуждающей волны рассматривались как импульсы света [12–17], так и монохроматическое облучение [18]. Учитывались один [16], два [17,18] и большое число возбужденных уровней [15]. Результаты этих работ справедливы для сравнительно узких квантовых ям, когда выполняется неравенство

$$\varkappa d \ll 1, \tag{1}$$

где $d$ — ширина квантовой ямы, $\varkappa$ — модуль волнового вектора $\mathbf{k}$ световой волны. Фактически параметр $\varkappa d$ в упомянутых работах полагался равным нулю и вычисленные там отражение, поглощение и пропускание не зависели от ширины ямы $d$.

Для численной оценки величины $\varkappa$ используем длину волны излучения гетеролазера на основе арсенида галлия, равную $0.8\mu$. Этой длине волны соответствует энергия $\hbar\omega_l = 1.6\,\mathrm{eV}$. Если показатель преломления вещества квантовой ямы $\nu = 3.5$, то $\varkappa = \nu\omega_l/c = 2.8 \cdot 10^5\,\mathrm{cm}^{-1}$ ($c$ — скорость света в вакууме). Для ширины ямы $d = 500\,\text{Å}$ параметр $\varkappa d = 1.4$. Таким образом, для достаточно широких ям учет пространственной дисперсии возбуждающей волны может оказаться существенным.

Для широких квантовых ям неравенство $d \gg a_0$, где $a_0$ — постоянная решетки, является очень сильным и при описании прохождения световой волны сквозь квантовую яму можно использовать уравнения Максвелла для сплошной среды. При таком подходе, строго говоря, следует учитывать различие в показателях преломления барьера и ямы. Тогда должно появиться дополнительное отражение от границ квантовой ямы, которое будет уменьшаться с уменьшением параметра $\varkappa d$, но в области $\varkappa d \simeq 1$ может в некоторых случаях сравниться или превысить отражение, обусловленное межзонными переходами в самой квантовой яме. Вместе с отражением будет изменяться и прохождение световой волны. Таким образом, наряду с пространственной дисперсией электромагнитной волны должно быть учтено различие в показателях преломления барьера и квантовой ямы.

Рассмотрению влияния этих двух факторов на отражение, пропускание и поглощение электромагнитной волной, проходящей сквозь квантовую яму и вызывающей в ней межзонные переходы, и посвящена настоящая работа.

## 1. Модель и основные соотношения

Рассматривается система, состоящая из глубокой полупроводниковой квантовой ямы, расположенной в интервале $0 \le z \le d$, и двух полубесконечных барьеров. Постоянное сильное магнитное поле направлено перпендикулярно плоскости ямы (вдоль оси $z$). Предполагается, что внешняя электромагнитная волна распространяется вдоль оси $z$ со стороны отрицательных $z$. Предполагается, что барьеры прозрачны для волны, а в квантовой яме волна поглощается, вызывая резонансные межзонные переходы. Рассматриваются нулевые температуры, в основном состоянии валентная зона полностью заполнена, а зона проводимости пустая. В качестве возбужденных состояний учитываются только такие, в которых один электрон перешел из валентной зоны в зону проводимости, в валентной зоне образовалась дырка. Это справедливо в линейном по амплитуде волны приближении. Будем рассматривать частоты света, близкие к ширине запрещенной зоны квантовой ямы, когда в поглощении принимает участие малая доля валентных электронов, расположенных вблизи экстремума зоны и для которых справедлив метод эффективной массы. Для глубоких квантовых ям в этом случае можно пренебречь туннелированием электронов в барьер и считать границу барьер–квантовая яма резкой, т. е. считать, что в барьере ток отсутствует. Кроме того, уровни, близкие к дну ямы, можно рассматривать в приближении бесконечно глубокой ямы, хотя это ограничение не является принципиальным и теорию можно распространить на случай ям конечной глубины. Рассматриваемая система неоднородна. Поскольку размер неоднородности, каковой в данном случае является квантовая яма, меньше или порядка длины волны света, оптические характеристики такой системы полагается определить из решения уравнений Максвелла, в которых в качестве плотностей тока и заряда должны фигурировать выражения, полученные на основе микроскопического рассмотрения [19,20].

Окончательные результаты будут получены для одного дискретного уровня электронной системы в квантовой яме. Влиянием других уровней на отражение и поглощение света можно пренебречь, если частота $\omega_l$ возбуждающего света достаточно близка к частоте $\omega_0$ межзонного перехода. Дискретными уровнями в квантовой яме в случае $\hbar\mathbf{K}_\perp = 0$, где $\hbar\mathbf{K}_\perp$ — вектор суммарного квазиимпульса пары электрон–дырка в плоскости ямы, являются экситонные уровни в нулевом магнитном поле либо уровни в сильном магнитном поле, направленном перпендикулярно плоскости ямы. В качестве удобного примера рассматривается уровень электронно-дырочной пары в сильном магнитном поле без учета кулоновского взаимодействия между электроном и дыркой, которое считается слабым возмущением для достаточно сильных полей и не очень широких ям [21]. Однако экситонный эффект не приведет к принципиальным изменениям полученных далее результатов, а только повлияет на величину радиационного уширения электронного возбуждения $\gamma_r$, введенного далее. То же относится и к экситонным уровням в нулевом магнитном поле.

Вычислим наведенную возбуждающим светом высокочастотную плотность тока в квантовой яме. Для любой электронной системы, неоднородной в пространстве, можно ввести тензор электропроводности $\sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{k},\omega|\mathbf{r})$, который устанавливает связь между средней плотностью тока $\mathbf{J}(\mathbf{r},t)$ и электрическим полем

$$J_\alpha(\mathbf{r},t) = (2\pi)^{-4}\int d\mathbf{k}\int\limits_0^\infty d\omega\sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{k},\omega|\mathbf{r}) \times E_\beta(\mathbf{k},\omega)\exp[i(\mathbf{kr}-\omega t)] + \text{c.c.}, \quad (2)$$

$$E_\beta(\mathbf{k},\omega) = \int d\mathbf{r}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dt E_\beta(\mathbf{r},t)\exp[-i(\mathbf{kr}-\omega t)]. \quad (3)$$

Поскольку температура предполагается равной нулю, усреднение плотности тока проводится по основному состоянию электронной системы, т. е.

$$\mathbf{J}(\mathbf{r},t) = \langle 0|\hat{\mathbf{J}}(\mathbf{r},t)|0\rangle, \quad (4)$$

где $\hat{\mathbf{J}}(\mathbf{r},t)$ — оператор плотности тока в линейном по внешнему полю приближении. Для тензора электропроводности используется выражение[1]

$$\sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{k},\omega|\mathbf{r}) = (i/\hbar)\int d\mathbf{r}'\int\limits_{-\infty}^{\infty} dt'\Theta(t') \times \langle|[j_\alpha(\mathbf{r},t),\tilde{d}_\beta(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t-t')]|0\rangle, \quad (5)$$

где $\Theta(t)$ — функция Хевисайда, $j_\alpha(\mathbf{r},t)$ — декартова проекция оператора плотности тока в отсутствие внешнего электромагнитного поля, но с учетом постоянного сильного магнитного поля

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A}^{(0)}(\mathbf{r}), \quad (6)$$

где $\mathbf{A}^{(0)}(\mathbf{r})$ — его векторный потенциал. Этот оператор имеет вид

$$j_\alpha(\mathbf{r},t) = \exp(i\mathcal{H}t/\hbar)j_\alpha(\mathbf{r})\exp(-i\mathcal{H}t/\hbar), \quad (7)$$

$$j_\alpha(\mathbf{r}) = (e/2)\sum_i[v_{i\alpha}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i)+\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i)v_{i\alpha}], \quad (8)$$

[1] В (5) отброшены вклады, содержащие множители порядка $\varkappa v/\omega$, где $v$ — скорость электронов.

$$v_{i\alpha} = -i(\hbar/m_0)\partial/\partial r_{i\alpha} - (e/m_0c)A_\alpha^{(0)}(\mathbf{r}_i), \tag{9}$$

$\mathcal{H}$ — гамильтониан системы электронов с учетом сильного магнитного поля, но без внешнего электромагнитного поля,

$$\tilde{d}_\alpha(\mathbf{r},t) = \exp(i\mathcal{H}t/\hbar)\tilde{d}_\alpha(\mathbf{r})\exp(-i\mathcal{H}t/\hbar), \tag{10}$$

$$\tilde{d}_\alpha(\mathbf{r}) = e\sum_i(r_{i\alpha} - \langle 0|r_{i\alpha}|0\rangle)\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i). \tag{11}$$

Используя метод эффективной массы для электронов и дырок вблизи экстремумов зон валентной и проводимости, а также учитывая однородность системы в плоскости квантовой ямы, из (2) и (5) получаем, что

$$\bar{J_\alpha}(z,t) = \frac{i}{4\pi^2}\frac{(e/m_0)^2}{\hbar\omega_g a_H^2}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t}$$
$$\times\sum_\chi \Phi_\chi(z)\left[\frac{p_{cv\alpha}^{j*}p_{cv\beta}^{j}}{\omega-\omega_\chi+i\gamma_\chi/2} + \frac{p_{cv\alpha}^{j}p_{cv\beta}^{j*}}{\omega+\omega_\chi+i\gamma_\chi/2}\right]$$
$$\times\int_{-\infty}^{\infty} dz'\Phi_\chi(z')E_\beta(z',\omega), \tag{12}$$

где $\bar{J}(z,t)$ — наведенная электрическим полем средняя по основному состоянию электронной системы плотность тока. Черта сверху означает дополнительное усреднение плотности тока по элементарной ячейке, допустимое при условии $d \gg a_0$. В (12) введены следующие обозначения: $m_0$ — масса свободного электрона, $\hbar\omega_g$ — ширина запрещенной зоны, $a_H = (c\hbar/|e|H)^{1/2}$ — магнитная длина, $\chi$ — набор индексов

$$\chi = (j,\lambda), \quad \lambda = (n = n_c = n_v, m_c, m_v), \tag{13}$$

$j$ — номер валентной зоны (поскольку валентная зона в кубических кристаллах, которые рассматриваются далее, вырождена), $n_c(n_v)$ — квантовые числа Ландау, $m_c(m_v)$ — квантовые числа размерного квантования электронов (дырок) вдоль оси $z$,

$$\Phi_\lambda(z) = (2/d)\sin(\pi m_c z/d)\sin(\pi m_v z/d) \text{ —} \tag{14}$$

произведение зависящих от $z$ волновых функций электронов и дырок,

$$E_\beta(z,\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt\exp(i\omega t)E_\beta(z,t), \tag{15}$$

$\mathbf{p}_{cv}^j$ — межзонный матричный элемент квазиимпульса, соответствующий переходу из максимума валентной зоны на дно зоны проводимости,

$$\hbar\omega_\lambda = \hbar\omega_g + \varepsilon(m_c) + \varepsilon(m_v) + \hbar\Omega_\mu(n+1/2) \tag{16}$$

— энергия электронного возбуждения с индексами $\lambda$, $\varepsilon(m_c)(\varepsilon(m_v))$ — энергия уровней размерного квантования электронов (дырок), $\Omega_\mu = |e|H/\mu c$ — циклотронная частота, $\mu = m_e m_h/(m_e+m_h)$, $m_e(m_h)$ — эффективная масса электронов (дырок), $\gamma_\lambda$ — обратное нерадиационное время жизни возбужденного состояния с квантовыми числами $\lambda$. При выводе (12) было использовано соотношение

$$\mathbf{r}_{cv} = -(i/m_0\omega_g)\mathbf{p}_{cv}, \tag{17}$$

где $\mathbf{r}_{cv}$ — межзонный матричный элемент радиуса-вектора $\mathbf{r}$. Формула (12) применима не только в случае монохроматической возбуждающей волны, но и при импульсном возбуждении.

Далее используется модель (см. [15–18]), в которой векторы $\mathbf{p}_{cv}^j$ для двух вырожденных зон имеют вид

$$\mathbf{p}_{cv}^{\mathrm{I}} = p_{cv}(\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y)/\sqrt{2}, \quad \mathbf{p}_{cv}^{\mathrm{II}} = p_{cv}(\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y)/\sqrt{2}, \tag{18}$$

где $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ — орты вдоль осей $x$ и $y$, $p_{cv}$ — вещественная константа. Эта модель соответствует тяжелым дыркам в кристаллах со структурой цинковой обманки, если ось $z$ направлена вдоль оси симметрии 4-го порядка [22,23]. Если использовать векторы круговой поляризации возбуждающего света

$$\mathbf{e}_l = (\mathbf{e}_x \pm i\mathbf{e}_y)/\sqrt{2}, \tag{19}$$

то выполняется свойство сохранения вектора поляризации

$$\sum_{j=\mathrm{I,II}}\left[\frac{\mathbf{p}_{cv}^{j*}(\mathbf{e}_l\mathbf{p}_{cv}^j)}{\omega-\omega_\lambda+i\gamma_\lambda/2} + \frac{\mathbf{p}_{cv}^{j}(\mathbf{e}_l\mathbf{p}_{cv}^{j*})}{\omega+\omega_\lambda+i\gamma_\lambda/2}\right]$$
$$= \mathbf{e}_l p_{cv}^2\left[\frac{1}{\omega-\omega_\lambda+i\gamma_\lambda/2} + \frac{1}{\omega+\omega_\lambda+i\gamma_\lambda/2}\right], \tag{20}$$

где $\mathbf{e}_l$ — любой из векторов (19), что делает дальнейшие вычисления менее громоздкими. Поскольку в случае использования модели (18) проекция $p_{cvz} = 0$, ток $\bar{\mathbf{J}}(z,t)$ является поперечным, наведенная плотность заряда $\rho(z,t) = 0$. Тогда можно выбрать калибровку $\varphi(z,t) = 0$, где $\varphi(z,t)$ — скалярный потенциал, и

$$\mathbf{E}(z,t) = -(1/c)\partial\mathbf{A}(z,t)/\partial t, \quad \mathbf{H}(z,t) = \operatorname{rot}\mathbf{A}(z,t),$$

где $\mathbf{A}(z,t)$ — векторный потенциал электромагнитной волны. Используя соотношение

$$E_\alpha(z,\omega) = (i\omega/c)A_\alpha(z,\omega), \tag{21}$$

перейдем в формуле (12) к векторному потенциалу. Результат удобно записать в форме

$$\bar{J_\alpha}(z,t) = -\frac{e_{l\alpha}\gamma_r\nu}{8\pi^2}\sum_\lambda\Phi_\lambda(z)$$
$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\omega d\omega e^{-i\omega t}\left[\frac{1}{\omega-\omega_\lambda+i\gamma_\lambda/2} + \frac{1}{\omega+\omega_\lambda+i\gamma_\lambda/2}\right]$$
$$\times\int_0^d dz' A(z',\omega)\Phi_\lambda(z') + \text{c.c.}, \tag{22}$$

где

$$\gamma_r = (2e^2/\hbar c\nu)(p_{cv}^2/m_0\hbar\omega_g)(|e|H/m_0c) \text{ —} \quad (23)$$

обратное радиационное время жизни электронно-дырочной пары в магнитном поле при условии $\varkappa d = 0$ [13,18] и введен скаляр $A(z,\omega)$, определенный соотношением

$$\mathbf{A}(z,\omega) = \mathbf{e}_l A(z,\omega) + \mathbf{e}_l^* A^*(z,-\omega). \quad (24)$$

## 2. Электрическое поле электромагнитной волны

Дальнейший расчет проводится при двух предположениях. Во-первых, плоская волна считается монохроматической с частотой $\omega_l$, т. е. в формуле (24)

$$A(z,\omega) = 2\pi\delta(\omega-\omega_l)A(z), \quad (25)$$

а вектор $\mathbf{A}(z,t)$ принимает вид

$$\mathbf{A}(z,t) = \mathbf{e}_l \exp(-i\omega_l t)A(z) + \text{c.c.} \quad (26)$$

Во-вторых, учитывается только один возбужденный уровень в квантовой яме. Остальные уровни предполагаются расположенными достаточно далеко от выбранного уровня и их влиянием пренебрегается. Уравнение для скалярной амплитуды $A(z)$ векторного потенциала в области барьеров имеет вид

$$d^2A/dz^2 + \varkappa_1^2 A = 0, \quad \varkappa_1 = \nu_1\omega_l/c, \quad z \le 0, \quad z \ge d, \quad (27)$$

где $\nu_1$ — показатель преломления барьера. В области квантовой ямы $0 \le z \le d$ имеет место уравнение

$$d^2A/dz^2 + \varkappa^2 A = -(4\pi/c)\bar{J}(z), \quad (28)$$

где скалярная амплитуда плотности тока $\bar{J}(z)$ в случае учета одного возбужденного уровня, согласно (22) и (25), имеет вид

$$\bar{J}(z) = -(\gamma_r\nu\omega_l/4\pi)F(z)\int_0^d dz' A(z')\Phi(z')$$
$$\times\left[(\omega_l-\omega_0+i\gamma/2)^{-1} + (\omega_l+\omega_0+i\gamma/2)^{-1}\right] + \text{c.c.}, \quad (29)$$

где для упрощения записи введены обозначения

$$\Phi_\lambda(z) = \Phi(z), \quad \omega_\lambda = \omega_0, \quad \gamma_\lambda = \gamma. \quad (30)$$

Вблизи резонанса $\omega_l = \omega_0$ член, пропорциональный $(\omega_l+\omega_0+i\gamma/2)^{-1}$, в (29) не учитывается. Уравнение (29) является интегро-дифференциальным. Если формально представить решение уравнения (29) как сумму общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения, то вместо (29) получается интегральное уравнение Фредгольма второго рода[2]

$$A(z) = C_1 e^{i\varkappa z} + C_2 e^{-i\varkappa z}$$
$$- \frac{i(\gamma_r/2)F(z)}{\omega_l-\omega_0+i\gamma/2}\int_0^d dz' A(z')\Phi(z'). \quad (31)$$

$C_1$ и $C_2$ — произвольные константы, которые определяются из граничных условий в плоскостях $z=0$ и $z=d$, а функция $F(z)$ имеет вид

$$F(z) = \exp(i\varkappa z)\int_0^z dz' \exp(-i\varkappa z')\Phi(z')$$
$$+ \exp(-i\varkappa z)\int_z^d dz' \exp(i\varkappa z')\Phi(z'). \quad (32)$$

Если $\gamma_r \ll \gamma$, то в уравнении (31) интегральный член является малым возмущением и достаточно учесть первое приближение по интегральному члену. Если же $\gamma_r \ge \gamma$, то необходимо учесть весь итерационный ряд. Представляя искомую функцию $A(z)$ в виде ряда

$$A(z) = A_0(z) + A_1(z) + A_2(z) + \dots,$$
$$A_0(z) = C_1\exp(i\varkappa z) + C_2\exp(-i\varkappa z) \quad (33)$$

и подставляя ее в уравнение (31), получим рекуррентное соотношение

$$A_j(z) = sF(z)\int_0^d dz'\Phi(z')A_{j-1}(z'), \quad j = 1,2,3\dots$$

Если его использовать, то ряд (33) сводится к геометрической прогрессии

$$A(z) = A_0(z) - hsF(z)(1 - s\varepsilon + s^2\varepsilon^2 - \dots)$$
$$= A_0(z) - hsF(z)/(1+s\varepsilon), \quad (34)$$

где для простоты обозначено

$$\int_0^d dz\Phi(z)A_0 = h, \quad i(\gamma_r/2)/(\omega_l-\omega_0+i\gamma_r/2) = s$$

и введена комплексная функция

$$\varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon'' = \int_0^d dz'\Phi(z')F(z'). \quad (35)$$

[2] Подобное уравнение рассматривалось в работе [24] для инверсионного слоя.

После подстановки $h, s$ и $\varepsilon$ в (34) получается решение в виде

$$A(z) = C_1 e^{i\varkappa z} + C_2 e^{-i\varkappa z} - \frac{i(\gamma_r/2)F(z)}{\omega_l - \omega_0 + i(\gamma + \gamma_r \varepsilon)/2} \times \int_0^d dz'(C_1 e^{i\varkappa z'} + C_2 e^{-i\varkappa z'})\Phi(z'). \qquad (36)$$

Комплексная величина $\varepsilon$ определяет изменение уширения и сдвиг уровня, которые появляются вследствие пространственной дисперсии волны. Как следует из определения (35), в предельном случае $\varkappa d = 0$, $\varepsilon = \delta_{m_c m_v}$, а интеграл в правой части решения (36) равен $(C_1 + C_2)\delta_{m_c m_v}$, т. е. в этом предельном случае вклад в ток вносят только разрешенные переходы $m_c = m_v$. Если $\varkappa d \neq 0$, то запрещенный переход $m_c \neq m_v$ также приводит к межзонному току и появлению в знаменателе решения (36) величины $\varepsilon$, однако $\varepsilon \to 0$, если $\varkappa d \to 0$. Заметим также, что функция (32) $F(z) = \delta_{m_c m_v}$, если $\varkappa d \to 0$. Далее рассматривается только случай разрешенных переходов.

Решением уравнения (27) является

$$A^l(z) = A_0 \exp(i\varkappa_1 z) + C_R \exp(-i\varkappa_1 z), \quad z \le 0,$$

$$A^r(z) = C_T \exp(i\varkappa_1 z), \quad z \ge d, \qquad (37)$$

$C_R$ определяет амплитуду отраженной, $C_T$ — амплитуду прошедшей сквозь яму волны. На границах $z = 0$ и $z = d$ непрерывность магнитного поля волны приводит к непрерывности $dA/dz$, непрерывность тангенциальных проекций электрического поля — к непрерывности $A(z)$. В результате получаем следующие выражения для коэффициентов $C_1$, $C_2$, $C_R$ и $C_T$:

$$C_i = A_0 \mathcal{C}_i \quad (i = 1, 2), \quad C_{R(T)} = A_0 \mathcal{C}_{R(T)},$$

$$\mathcal{C}_1 = (2/\Delta)\exp(-i\varkappa d)[1 + \zeta + (1 - \zeta)\mathcal{N}],$$

$$\mathcal{C}_2 = -(2/\Delta)(1 - \zeta)[\exp(i\varkappa d) + \mathcal{N}],$$

$$\mathcal{C}_R = \rho/\Delta,$$

$$\mathcal{C}_T = 4\zeta \exp(-i\varkappa_1 d)[1 + \exp(-i\varkappa d)\mathcal{N}]/\Delta, \qquad (38)$$

$$\Delta = (\zeta + 1)^2 \exp(-i\varkappa d) - (\zeta - 1)^2 \exp(i\varkappa d) - 2(\zeta - 1)\mathcal{N}[(\zeta + 1)\exp(-i\varkappa d) + \zeta - 1],$$

$$\rho = 2i(\zeta^2 - 1)\sin \varkappa d + 2[(\zeta^2 + 1)\exp(-i\varkappa d) + \zeta^2 - 1]\mathcal{N}. \qquad (39)$$

В формулах (38), (39) введены обозначения

$$\zeta = \varkappa/\varkappa_1 = \nu/\nu_1, \qquad (40)$$

$$\mathcal{N} = -sF^2(0) = -i(\gamma_r/2)F^2(0)/[\omega_l - \omega_0 + i(\gamma + \gamma_r\varepsilon)/2]. \qquad (41)$$

Возвращаясь к временно́му представлению и переходя в формуле (37) от $A(z)$ к электрическим полям слева $(E^l(z,t))$ и справа $(E^r(z,t))$ от квантовой ямы, получим, что

$$\mathbf{E}^l(z,t) = \mathbf{e}_l E_0 e^{-i\omega_l t}\left[e^{i\varkappa_1 z} + \mathcal{C}_R e^{-i\varkappa_1 z}\right] + \text{c.c.}, \qquad (42)$$

$$\mathbf{E}^r(z,t) = \mathbf{e}_l E_0 \mathcal{C}_T e^{-i(\omega_l t - \varkappa_1 z)} + \text{c.c.} \qquad (43)$$

Электрическое поле внутри ямы определяется формулой (36), если $A(z)$ заменить на $E(z)$ и перейти к временно́му представлению. В выражения для полей входят $\varepsilon$ и $F(0)$, а в поле внутри ямы входит еще $F(z)$, которая вносит вклад в координатную зависимость поля. Для случая $m_c = m_v = m$ $F(z)$ и $\varepsilon$ равны

$$F(z) = iB\{2 - \exp(i\varkappa z) - \exp[i\varkappa(d - z)] - (\varkappa d/\pi m)^2 \sin^2(\pi m z/d)\}, \qquad (44)$$

$$F(0) = F(d) = iB[1 - \exp(i\varkappa d)],$$

$$B = \frac{4\pi^2 m^2}{\varkappa d[4\pi^2 m^2 - (\varkappa d)^2]}, \qquad (45)$$

$$\varepsilon' = F^2(0)\exp(-i\varkappa d) = 4B^2 \sin^2(\varkappa d/2),$$

$$\varepsilon'' = 2B[1 - B\sin \varkappa d - 3(\varkappa d)^2/8\pi^2 m^2]. \qquad (46)$$

Зависимость $\varepsilon'$ и $\varepsilon''$ от параметра $\varkappa d$ представлена на рис. 1.

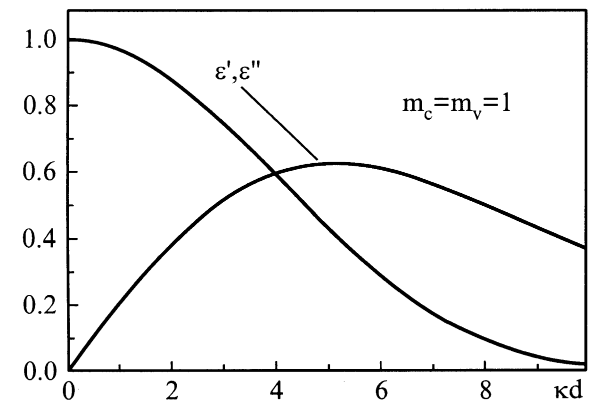


**Рис. 1.** Функции $\varepsilon'$ и $\varepsilon''$, определяющие изменение ширины и сдвиг пиков отражения, пропускания и поглощения при учете пространственной дисперсии в случае однородной среды. $m_c(m_v)$ — квантовые числа размерного квантования электронов (дырок).

В предельном случае однородной среды ($\varkappa_1 = \varkappa$) получаем

$$\mathbf{E}^l(z,t) = \mathbf{e}_l E_0 e^{-i\omega_l t}\left[e^{i\varkappa z} - \frac{i(\tilde{\gamma}_r/2)}{\Omega + i\Gamma/2} e^{i\varkappa(d-z)}\right] + \text{c.c.}, \qquad (47)$$

$$\mathbf{E}^r(z,t) = \mathbf{e}_l E_0 e^{-i(\omega_l t - \varkappa z)}\left[1 - \frac{i(\tilde{\gamma}_r/2)}{\Omega + i\Gamma/2}\right] + \text{c.c.}, \qquad (48)$$

где введены новые обозначения

$$\Omega = \omega_l - \omega_0 - \varepsilon''\gamma_r/2, \quad \Gamma = \gamma + \tilde{\gamma}_r,$$

$$\tilde{\gamma}_r = \gamma_r \left| \int_0^d dz \exp(i\varkappa z)\Phi(z) \right|^2 = \gamma_r \varepsilon'. \tag{49}$$

Поле внутри ямы имеет вид

$$\mathbf{E}(z,t) = \mathbf{e}_l E_0 e^{-i\omega_l t} \left[ e^{i\varkappa z} - \frac{i(\gamma_r/2)F(0)F(z)}{\Omega + i\Gamma/2} \right] + \text{c.c.} \tag{50}$$

Величина $\tilde{\gamma}_r$ совпадает с вычисленным в [13] и [18] обратным радиационным временем жизни электронно-дырочной пары в сильном магнитном поле при $\mathbf{K}_\perp = 0$ в случае произвольной величины $\varkappa d$. Сравнивая выражения (47) и (48) с соответствующими выражениями в [18] для полей слева и справа от ямы, находим, что в случае $\varkappa d \neq 0$ величина $\gamma_r$ заменяется на $\tilde{\gamma}_r$, происходит сдвиг уровня на величину $\gamma_r \varepsilon''$ и в выражении для наведенной волны слева от ямы появляется дополнительный множитель $\exp(i\varkappa d)$. Можно убедиться в том, что наведенное поле слева от ямы при замене $d - z$ на $z$ совпадает с наведенным полем справа от ямы. Из формулы (46) и рис. 1 видно, что $\tilde{\gamma}_r$ уменьшается с ростом $\varkappa d$. При $\varkappa d \gg 1$ $\tilde{\gamma}_r \to 0$, что соответствует переходу от квантовой ямы к объемному кристаллу. В этом случае вклад одного уровня в наведенные поля и, следовательно, в поглощение и отражение стремится к нулю.

В предельном случае $\gamma_r = 0$ из формул (42) и (43) получается известное решение для монохроматической волны, распространяющееся в среде, содержащей прозрачный слой другого вещества [26].

## 3. Отражение, поглощение и пропускание электромагнитной волны

Итак, согласно формуле (42) вектор электрического поля отраженной волны $\Delta\mathbf{E}^l(z,t)$ круговой поляризации равен

$$\Delta\mathbf{E}^l(z,t) = \mathbf{e}_l E_0 \mathcal{C}_R e^{-i(\omega_l t + \varkappa_1 z)} + \text{c.c.} \tag{51}$$

Вектор поля прошедшей волны в соответствии с формулой (43) имеет вид

$$\mathbf{E}^r(z,t) = \mathbf{e}_l E_0 \mathcal{C}_T e^{-i(\omega_l t - \varkappa_1 z)} + \text{c.c.} \tag{52}$$

Введем по аналогии с [18] долю отраженной энергии $\mathcal{R}$, которая определяется как отношение модуля отраженного потока энергии к модулю потока падающего, т. е.

$$\mathcal{R} = |\mathcal{C}_R|^2. \tag{53}$$

Доля прошедшей энергии $\mathcal{T}$ равна

$$\mathcal{T} = |\mathcal{C}_T|^2, \tag{54}$$

а доля поглощенной энергии $\mathcal{A}$ определяется как

$$\mathcal{A} = 1 - \mathcal{R} - \mathcal{T}. \tag{55}$$

Рассмотрим сначала влияние пространственной дисперсии на частотную зависимость отражения, когда среда однородна. В этом случае из формул (38), (39) и (53)–(55) получаем

$$\mathcal{R} = \frac{(\tilde{\gamma}_r/2)^2}{\Omega^2 + \Gamma^2/4}, \quad \mathcal{A} = \frac{\gamma\tilde{\gamma}_r/2}{\Omega^2 + \Gamma^2/4},$$

$$\mathcal{T} = \frac{\Omega^2 + \gamma^2/4}{\Omega^2 + \Gamma^2/4}. \tag{56}$$

Эти выражения по форме совпадают с таковыми для случая отсутствия дисперсии. Различие заключается в замене константы $\gamma_r$ на функцию $\tilde{\gamma}_r$ ($\tilde{\gamma}_r \to \gamma_r$ при

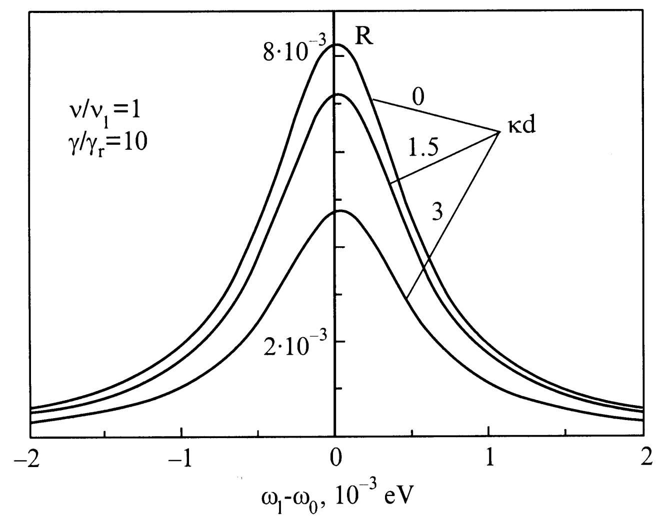


**Рис. 2.** Влияние пространственной дисперсии на частотную зависимость отражения $\mathcal{R}$ для однородной среды. $\zeta = 1$, $\gamma/\gamma_r = 10$, $\gamma_r = 10^{-4}$ eV, $m_c = m_v = 1$.

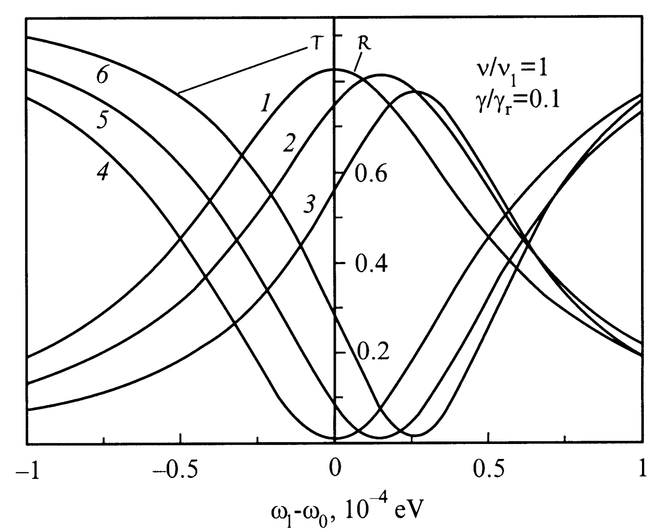


**Рис. 3.** Влияние пространственной дисперсии на частотную зависимость отражения $\mathcal{R}$ (кривые *1–3*) и пропускания $\mathcal{T}$ (*4–6*) для однородной среды, $\zeta = 1$, $\gamma/\gamma_r = 0.1$, $\gamma_r = 10^{-4}$ eV, $m_c = m_v = 1$. Кривые *1, 4* — $\varkappa d = 0$; *2, 5* — $\varkappa d = 1.5$; *3, 6* — $\varkappa d = 3$.

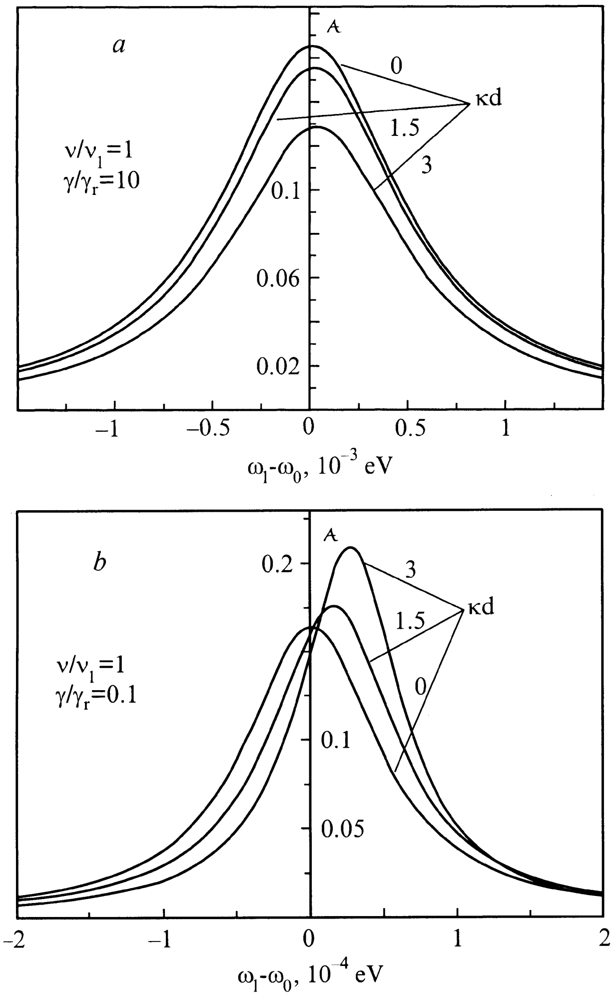


**Рис. 4.** Влияние пространственной дисперсии на частотную зависимость поглощения $\mathcal{A}$ для однородной среды. $\zeta = 1$, $\gamma_r = 10^{-4}$ eV, $m_c = m_v = 1$; *a* — $\gamma \gg \gamma_r$, *b* — $\gamma \ll \gamma_r$.

$\varkappa d \to 0$) и в появлении функции $\varepsilon''$, которая определяет сдвиг экстремума соответствующей кривой и исчезает в пределе $\varkappa d = 0$.

В отражении пространственная дисперсия проявляется сильнее всего в случае $\gamma \gg \gamma_r$. Действительно, если $\gamma \ll \gamma_r$, то максимум кривой отражения из (56) $\mathcal{R}_{\max} \cong 1$ и практически не зависит от $\varkappa d$. Если же $\gamma \gg \gamma_r$, то $\tilde{\gamma}_r$ в знаменателе (56) вносит малый вклад в зависимость от $\varkappa d$ и эта зависимость определяется функцией $\tilde{\gamma}_r$ в числителе. При этом однако $\mathcal{R}_{\max} = (\tilde{\gamma}_r/\gamma)^2 \ll 1$. В пропускании картина обратная: при $\gamma \ll \gamma_r$ минимум кривой пропускания $\mathcal{T}_{\min} = (\gamma/\tilde{\gamma})^2 \ll 1$ и заметно зависит от $\varkappa d$, увеличиваясь с ростом $\varkappa d$, когда же $\gamma \gg \gamma_r$, то $\mathcal{T} \cong 1$ и от $\varkappa d$ зависит очень слабо. Максимум пика поглощения в этих предельных случаях равен $\mathcal{A}_{\max} = 2\gamma/\tilde{\gamma}_r$ $(\gamma \ll \gamma_r)$ и $\mathcal{A}_{\max} = 2\tilde{\gamma}_r/\gamma$ $(\gamma \gg \gamma_r)$, в обоих предельных случаях $\mathcal{A}_{\max} \ll 1$, но $\mathcal{A}_{\max} \gg \mathcal{R}_{\max}$ $(\gamma \gg \gamma_r)$ и $\mathcal{A}_{\max} \gg \mathcal{T}_{\min}$ $(\gamma \ll \gamma_r)$. Частотная зависимость $\mathcal{R}$, $\mathcal{A}$ и $\mathcal{T}$ для предельных случаев $\gamma \gg \gamma_r$ и $\gamma \ll \gamma_r$ приведена на рис. 2–4.

На рис. 2 видно, как пространственная дисперсия влияет на высоту и ширину пика отражения, которые уменьшаются с ростом $\varkappa d$, а сдвиг пика по частоте практически незаметен, так как $\varepsilon''\gamma_r \ll \gamma$. На рис. 3, наоборот, дисперсия приводит к сдвигу пика отражения, не изменяя его формы. На этом рисунке показано также пропускание $\mathcal{T}$ для случая $\gamma \ll \gamma_r$. Здесь имеет место как сдвиг $\mathcal{T}_{\min}$ с ростом $\varkappa d$, так и его рост, который плохо заметен ввиду выбранного масштаба по оси ординат. Поглощение $\mathcal{A}$ для двух предельных случаев приведено на рис. 4. На серии узких пиков (рис. 4, *b*, случай $\gamma \ll \gamma_r$) хорошо заметен как рост $\mathcal{A}_{\max}$, так и его сдвиг. Появление сдвига (как и на рис. 2 для $\mathcal{T}$) связано с тем, что $\mathcal{A}_{\max} \sim \tilde{\gamma}_r^{-1}$ и $\varepsilon''\gamma_r \cong \tilde{\gamma}_r$. Кривые на рис. 4, *a* соответствуют случаю $\gamma \gg \gamma_r$, сдвиг здесь мал, а $\mathcal{A}_{\max}$ уменьшается с ростом $\varkappa d$.

Если учесть неоднородность среды, т. е. считать, что $\zeta \neq 1$ $(\nu \neq \nu_1)$, а пространственной дисперсией пренебречь, то вместо (56) получаются выражения

$$\mathcal{R} = \frac{\zeta^2(\gamma_r/2)^2}{\Omega^2 + (\gamma + \zeta\gamma_r)^2/4}, \quad \mathcal{A} = \frac{\zeta\gamma\gamma_r/2}{\Omega^2 + (\gamma + \zeta\gamma_r)^2/4},$$

$$\mathcal{T} = \frac{\Omega^2 + \gamma^2/4}{\Omega^2 + (\gamma + \zeta\gamma_r)^2/4}. \tag{57}$$

Из (57) видно, что в этом предельном случае вместо $\gamma_r$ фигурирует величина $\zeta\gamma_r$, определенная формулой (23), в которой показатель преломления $\nu_1$ относится к веществу барьера. Это совпадает с результатом, полученным в [18].

## 4. Общий случай

В этом разделе рассматривается общий случай, когда среда неоднородна и существенна пространственная дисперсия. Используя (38), (39) и (41), отражение можно привести к виду

$$\mathcal{R} = \left\{\frac{(\tilde{\gamma}_r/2)^2 X_1}{\Omega^2 + \Gamma^2/4} + \nu_1 - \frac{(\tilde{\gamma}_r/2)(Y_1\Omega + Z_1\Gamma/2)}{\Omega^2 + \Gamma^2/4}\right\}/|\Delta|^2; \tag{58}$$

$$|\Delta|^2 = \nu + \frac{(\tilde{\gamma}_r/2)^2 X - (\tilde{\gamma}_r/2)(Y\Omega + Z\Gamma/2)}{\Omega^2 + \Gamma^2/4}, \tag{59}$$

где

$$\nu = 4\zeta^2\cos^2\varkappa d + (\zeta^2+1)^2\sin^2\varkappa d,$$

$$\nu_1 = (\zeta^2-1)^2\sin^2\varkappa d, \tag{60}$$

$$X = 2(\zeta-1)^2[\zeta^2 + 1 + (\zeta^2-1)\cos\varkappa d],$$

$$X_1 = 2[\zeta^4 + 1 + (\zeta^4 - 1)\cos\varkappa d], \tag{61}$$

$$Y = 2(\zeta-1)^2(\zeta+1)[(\zeta+1)\cos\varkappa d + \zeta - 1]\sin\varkappa d,$$

$$Y_1 = 2\zeta^2(\zeta^2-1)\sin\varkappa d, \tag{62}$$

$$Z = 2(\zeta-1)\{(\zeta-1)(\zeta+1)^2\sin^2\varkappa d$$

$$- 2\zeta[(\zeta+1)\cos\varkappa d + \zeta - 1]\},$$

$$Z_1 = 2(\zeta-1)^3(\zeta+1)\sin\varkappa d. \tag{63}$$

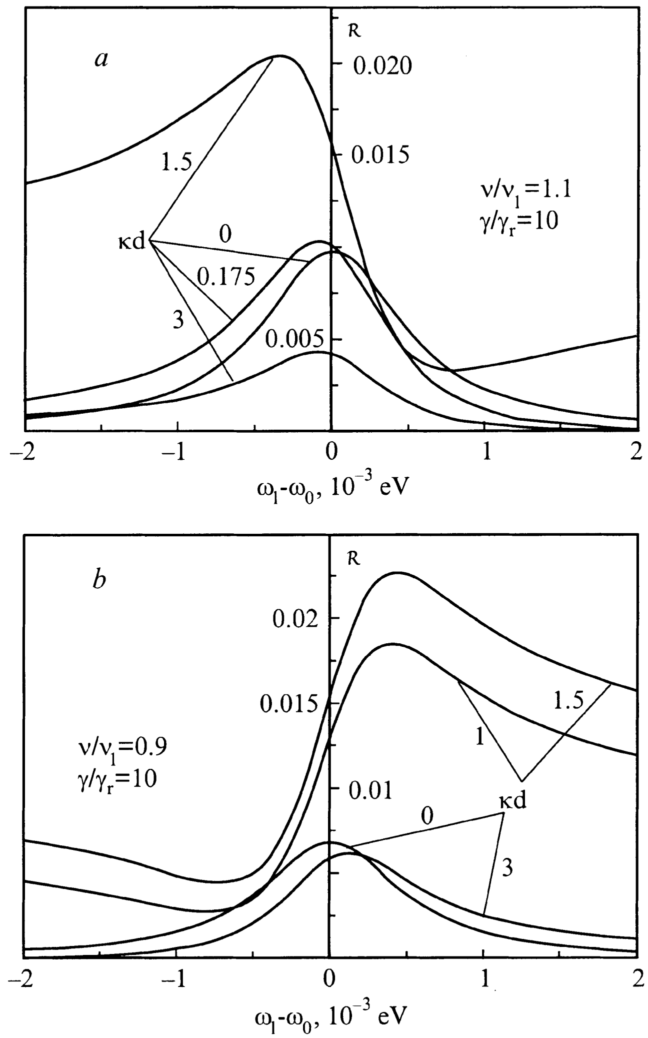


**Рис. 5.** Частотная зависимость отражения $\mathcal{R}$ при учете пространственной дисперсии света и неоднородности среды. $\gamma \gg \gamma_r$, $\gamma_r = 10^{-4}$, $m_c = m_v = 1$; $a$ — $\zeta > 1$, кривая $\varkappa d = 0.175$ относится к GaAs, $b$ — $\zeta < 1$.

В знаменателе функции $\mathcal{R}$, определенном формулой (59), главный вклад вносит функция $\nu$ ($\nu \gg 1$), остальные члены малы и их можно не учитывать. Исключение составляет только член $\sim \Gamma$, который вносит заметный вклад в случае $\gamma \ll \tilde{\gamma}_r$. В числителе $\mathcal{R}$ функция $\nu_1$ определяет отражение от границ квантовой ямы. Это отражение в частотном интервале, соответствующем ширине пика, не зависит от частоты света и исчезает, как это видно из формулы (60), в предельных случаях $\varkappa d \to 0$ и $\zeta \to 0$. При $\gamma \ll \tilde{\gamma}_r$ главный вклад в отражение вносит первый член в числителе (58), в этом случае $\mathcal{R} \simeq 1$. Если же $\gamma \gg \tilde{\gamma}_r$, то первый член становится малым и существенную роль играют как функция $\nu_1$, так и член $\sim \Omega$, который приводит к асимметрии пика отражения. Частотная зависимость отражения представлена на рис. 5, где видна резкая асимметрия пиков и немонотонная зависимость $\mathcal{R}_{\max}$ от $\varkappa d$. Немонотонность определяется величиной и знаком функции $Y_1$ из (62). Например, $Y_1$ изменяется от $Y_1 = 0.507$ (кривая $\varkappa d = 1.5$ на рис. 5, $a$) до $Y_1 = 0.072$ (кривая $\varkappa d = 3$). В последнем случае вклад $Y_1\Omega$ в форму пика мал, асимметрия незаметна, так как все определяется первым членом в (58). То же самое имеет место и на рис. 5, $b$, только там $Y_1 < 0$ и максимуму пика соответствует $\Omega > 0$. В случае $\gamma_r \to 0$

$$\mathcal{R} = \frac{\nu_1}{\nu} = \frac{(\zeta^2 - 1)^2 \sin^2 \varkappa d}{4\zeta^2 \cos^2 \varkappa d + (\zeta^2 + 1)^2 \sin^2 \varkappa d} \qquad (64)$$

и соответствует отражению от плоского прозрачного слоя, помещенного в среду с другим показателем преломления. Сравнивая рис. 2 и 5, можно заключить, что неоднородность среды приводит к более резкому проявлению зависимости отражения от параметра $\varkappa d$.

Поглощение $\mathcal{A}$ и пропускание $\mathcal{T}$ имеют вид

$$\mathcal{A} = \frac{4\zeta[\zeta^2 + 1 + (\zeta^2 - 1)\cos \varkappa d]\gamma\tilde{\gamma}_r}{|\Delta|^2(\Omega^2 + \Gamma^2/4)}, \qquad (65)$$

$$\mathcal{T} = \frac{4\zeta^2(\Omega^2 + \gamma^2/4)}{|\Delta|^2(\Omega^2 + \Gamma^2/4)}, \qquad (66)$$

которые в предельных случаях $\zeta = 1$ и $\varkappa d = 0$ переходят соответственно в (56) и (57). Как уже упоминалось, в формировании кривой отражения существенную роль играют функция $\nu_1$, которая связана с отражением от границ ямы, и член $\sim \Omega$ в числителе. Именно они определяют сильный сдвиг максимума пика и появление минимума. С другой стороны, величины $\mathcal{A}$ из (65) и $\mathcal{T}$ из (67) по форме совпадают с таковыми для случая однородной среды, отличие заключается в появлении множителей, которые практически не зависят от $\Omega$ и слабо зависят от $\varkappa d$. Поэтому влияние неоднородности среды на поглощение и пропускание гораздо слабее, чем на отражение.

Общий вывод, который можно сделать на основе проведенного анализа, заключается в том, что учет пространственной дисперсии электромагнитной волны и неопределенности среды сильнее всего влияет на отражение, радикально изменяя форму пика. Изменения наиболее заметны в предельном случае $\gamma \gg \tilde{\gamma}_r$, когда $\mathcal{R}_{\max} \simeq (\tilde{\gamma}_r/\gamma)^2$. Это связано с тем, что функция $\nu_1$ из (60) и линейный по $\Omega$ член в выражении (58) малы и могут влиять на первый член, только если он мал. В другом предельном случае $\gamma \ll \tilde{\gamma}_r$ $\mathcal{R}_{\max} \simeq 1$ и их влияние практически незаметно. Если учесть только пространственную дисперсию или только неоднородность среды, то отражение меняется сравнительно слабо, так как в этих предельных случаях $\nu_1 = Y = Y_1 = 0$. На величины $\mathcal{A}$ и $\mathcal{T}$ при $\gamma \gg \tilde{\gamma}_r$ неоднородность среды и пространственная дисперсия оказывают меньшее влияние. Действительно, из (65) следует, что в этом случае $\mathcal{T} \simeq 1$ и сильное изменение малой величины $\mathcal{R}_{\max}$ слабо влияет на $\mathcal{T}_{\min}$. То же самое относится и к $\mathcal{A}_{\max} \gg \mathcal{R}_{\max}$.

Зависимость $\mathcal{R}$, $\mathcal{A}$ и $\mathcal{T}$ от параметра $\varkappa d$, характеризующего пространственную дисперсию волны в квантовой яме, была получена для прямоугольных квантовых ям и бесконечно высоких барьеров. В реальных полупроводниковых гетероструктурах примесные электроны барьера перетекают в квантовую яму, искажая вблизи границ ее прямоугольную форму. Поэтому развитая выше теория справедлива для чистых веществ и широких ям, когда размер искаженных приграничных областей мал по сравнению с шириной ямы. Кроме того, теория справедлива для глубоких ям, положение первых уровней в которых и соответствующие им волновые функции мало отличаются от положения уровней и волновых функций в бесконечно глубокой яме. Использованное выше одноуровневое приближение предполагает, что соседние уровни в квантовой яме находятся по энергии дальше, чем ширина рассматриваемого уровня. Это налагает ограничение сверху на ширину ямы. Например, для $d = 500\,\text{Å}$ и $m_c = 0.06 m_0$ разность двух низших уровней размерного квантования $\simeq 10^{-3}$ eV.

Полученные выше результаты справедливы в случае слабого влияния кулоновского взаимодействия на спектр рожденной светом электронно-дырочной пары. Эти поправки малы при выполнении неравенств [21,26]

$$a_{\text{exc}}^2 \gg a_H^2, \quad a_{\text{exc}} \gg d, \tag{67}$$

где $a_H$ — магнитная длина, а радиус экситона Ванье–Мотта при нулевом магнитном поле $a_{\text{exc}} = \hbar^2 \varepsilon_0/\mu e^2$. Видно, что первое неравенство (67) может быть выполнено при достаточно сильных магнитных полях, а второе выполняется тем лучше, чем больше диэлектрическая проницаемость материала квантовой ямы $\varepsilon_0$ и чем меньше приведенная эффективная масса электрона и дырки $\mu$. Заметим, что второе условие (67) для гетероструктуры на основе арсенида галлия выполняется при значениях $d \le 150\,\text{Å}$, когда пространственная дисперсия и неоднородность среды оказывают сравнительно небольшое влияние на исследуемые величины. Это видно из рис. 5, $a$, где кривая $\varkappa d = 0.175$ соответствует квантовой яме из арсенида галлия шириной $d \simeq 62\,\text{Å}$. Второе неравенство здесь приблизительно выполняется, но сдвиг и асимметрия пика отражения невелики. Если второе неравенство (67) не выполняется, то зависимость волновой функции от координаты $z$ не может быть представлена в виде (14). Однако экситонный эффект не приведет к принципиальным изменениям полученных результатов, а только повлияет на величину радиационного уширения электронного возбуждения $\gamma_r$, введенного выше. То же относится и к экситонным уровням в нулевом магнитном поле.

С.Т. Павлов благодарит Университет Закатекаса и Национальный совет Мексики по науке и технологии (CONACyT) за финансовую поддержку и гостеприимство Д.А. Контрерас-Солорио благодарит CONACyT (27736-E) за финансовую поддержку.

## Список литературы


[1] H. Stolz. Time Resolved Light Scattering from Exitons. Springer Tracts in Modern Physics. Springer, Berlin (1994).
[2] J. Shah. Ultrafast Spectroscopy of Semiconductors and Semiconductor Nanostructures. Springer, Berlin (1996).
[3] H. Hang, S.W. Koch. Quantum Theory of the Optical and Electronic Properties of Semiconductors. World Scientific (1993).
[4] S. Mucamel. Principles of Nonlinear Optical Spectroscopy. Oxford University Press, NV, Oxford (1995).
[5] L.C. Andreani, F. Tassone, F. Bassani. Sol. State Commun. **77**, *11*, 641 (1991).
[6] L.C. Andreani. In: Confined Electrons and Photons / Ed. by E. Burstein, C. Weisbuch. Plenum Press, N.Y. (1995). P. 57.
[7] Е.Л. Ивченко. ФТТ **33**, *8*, 2388 (1991).
[8] F. Tassone, F. Bassani, L.C. Andreani. Phys. Rev. **B45**, *11*, 6023 (1992).
[9] T. Stroucken, A. Knorr, C. Anthony, P. Thomas, S.W. Koch, M. Koch, S.T. Gundiff, J. Feldman, E.O. Göbel. Phys. Rev. Lett. **74**, *9*, 2391 (1995).
[10] T. Stroucken, A. Knorr, P. Thomas, S.W. Koch. Phys. Rev. **B53**, *4*, 2026 (1996).
[11] M. Hübner, T. Kuhl, S. Haas, T. Stroucken, S.W. Koch, R. Hey, K. Ploog. Sol. State Commun. **105**, *2*, 105 (1998).
[12] I.G. Lang, V.I. Belitsky, M. Cardona. Phys. Stat. Sol. (*a*) **164**, *1*, 307 (1997).
[13] I.G. Lang, V.I. Belitsky. Phys. Lett. **A245**, *3–4*, 329 (1998).
[14] I.G. Lang, V.I. Belitsky. Sol. State Commun. **107**, *10*, 577 (1998).
[15] И.Г. Ланг, Л.И. Коровин, Д.А. Контрерас-Солорио, С.Т. Павлов. ФТТ **43**, *6*, 1117 (2001), в печати; Cond-mat/0004178.
[16] Л.И. Коровин, И.Г. Ланг, Д.А. Контрерас-Солорио, С.Т. Павлов. ФТТ **42**, *12*, 2230 (2000); Cond-mat/0006364.
[17] D.A. Contreras-Solorio, S.T. Pavlov, L.I. Korovin, I.G. Lang. Phys. Rev. **B62**, *23*, 16 815 (2000); Cond-mat/0002229.
[18] I.G. Lang, L.I. Korovin, D.A. Contreras-Solorio, S.T. Pavlov. Cond-mat/0001248.
[19] C.V. Duke. Phys. Rev. **168**, 816 (1968).
[20] А.Я. Шик. ФТТ **12**, *1*, 67 (1970).
[21] И.В. Лернер, Ю.Е. Лозовик. ЖЭТФ **78**, *3*, 1167 (1980).
[22] J.M. Luttinger, W. Kohn. Phys. Rev. **97**, 869 (1955).
[23] И.М. Цидильковский. Зонная структура полупроводников. Наука, М. (1978).
[24] Л.И. Коровин, Б.Э. Эшпулатов. ФТТ **21**, *12*, 3703 (1979).
[25] Л.И. Коровин, И.Г. Ланг, С.Т. Павлов. ЖЭТФ **118**, *2(8)*, 388 (2000); Cond-mat/0004373.
[26] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Электродинамика сплошных сред. Наука, М. (1982). С. 412.