

Влияние неоднородных свойств системы на процесс протекания в двумерном пространстве

© С.А. Багнич, А.В. Конач

Институт молекулярной и атомной физики Национальной академии наук Белоруссии,
220072 Минск, Белоруссия

E-mail: bagnich@imaph.bas-net.by

(Поступила в Редакцию 23 января 2001 г.
В окончательной редакции 27 марта 2001 г.)

Представлены результаты исследования методом Монте-Карло процесса протекания в двумерной неоднородной решетке. Неоднородная решетка получалась путем случайного распределения в ней неоднородностей различного размера и в разных количествах. Рассмотрено влияние неоднородностей на такие параметры, характеризующие протекание в системе, как критическая концентрация, среднее число узлов в конечных кластерах, вероятность протекания, критические индексы, фрактальная размерность бесконечного кластера. Показано, что все перечисленные параметры существенным образом зависят как от линейного размера неоднородностей, так и от их относительной площади.

Процессы протекания (percolation processes), впервые рассмотренные Бродбентом и Хаммерсли [1], имеют место в различных физических системах. Перколяционная модель успешно использовалась для описания многих разупорядоченных систем (например, пористых сред) и процессов, протекающих в них, таких как разломы горных пород, процессы дробления [2] и гелирования [3,4], проводимость случайной сетки сопротивлений [5] и сильно неоднородных сред в целом [6], распространение лесных пожаров [7,8] и эпидемий [9,10]. Использование данного подхода позволило описать электронные свойства легированных полупроводников [11].

На основе теории протекания Копельманом и др. [12,13] был разработан кластерный формализм описания транспорта энергии электронного возбуждения в неоднородных системах. Эта модель базируется на таких математических функциях, как вероятность протекания P_∞ и среднее число узлов в кластере I_{AV} . Зависимость этих величин от концентрации центров C , по которым происходит миграция энергии, определяется скейлинговыми соотношениями [14]

$$I_{AV} \propto |C/C_c - 1|^{-\gamma}, \quad (1)$$

$$P_\infty \propto |C/C_c - 1|^\beta, \quad (2)$$

где C_c — критическая концентрация центров, а β и γ — критические индексы, зависящие только от размерности пространства. В результате изучения процессов транспорта энергии электронного возбуждения в смешанных

молекулярных кристаллах [15,16] и твердых растворах органических соединений в низкомолекулярных стеклующихся растворителях [17] были определены значения критических индексов, совпадающие со значениями, полученными в рамках теории протекания для двумерного и трехмерного пространства соответственно (см. таблицу). В то же время при изучении аналогичных процессов в пористых матрицах было обнаружено отклонение значений критических индексов от теоретических [18–20]. О влиянии матрицы на топологию транспорта энергии сообщается также в работе [21]. В [18–20,22] данный эффект связывается с неоднородными свойствами пористых стекол как матриц. Микроскопическая неоднородность пористого стекла изменяет эффективную топологию пространства, в котором развиваются процессы протекания, что, возможно, влияет на процесс образования и роста кластеров внедренных молекул.

В настоящей работе представлены результаты компьютерного моделирования методом Монте-Карло процесса протекания на квадратной решетке, содержащей неоднородности различного размера и разной относительной площади, с целью выяснения возможного влияния указанных неоднородностей на такие параметры, как критическая концентрация C_c , среднее число узлов в кластере I_{AV} , вероятность протекания P_∞ и фрактальная размерность бесконечного кластера d_f .

В работе решалась задача узлов теории протекания как наиболее важная для изучения миграции энергии в гете-

Критические индексы в смешанных молекулярных кристаллах и твердых растворах органических соединений

Критические индексы	Теория протекания		Изотопически смешанные молекулярные кристаллы	Химически смешанные молекулярные кристаллы	Твердый раствор бензальдегида в этаноле	Этанольный раствор бензальдегида в пористом стекле
	2D	3D				
β	0.14	0.41	0.13	0.13	0.41	0.25
γ	2.1	1.6	2.1	2.09	1.7	1.95

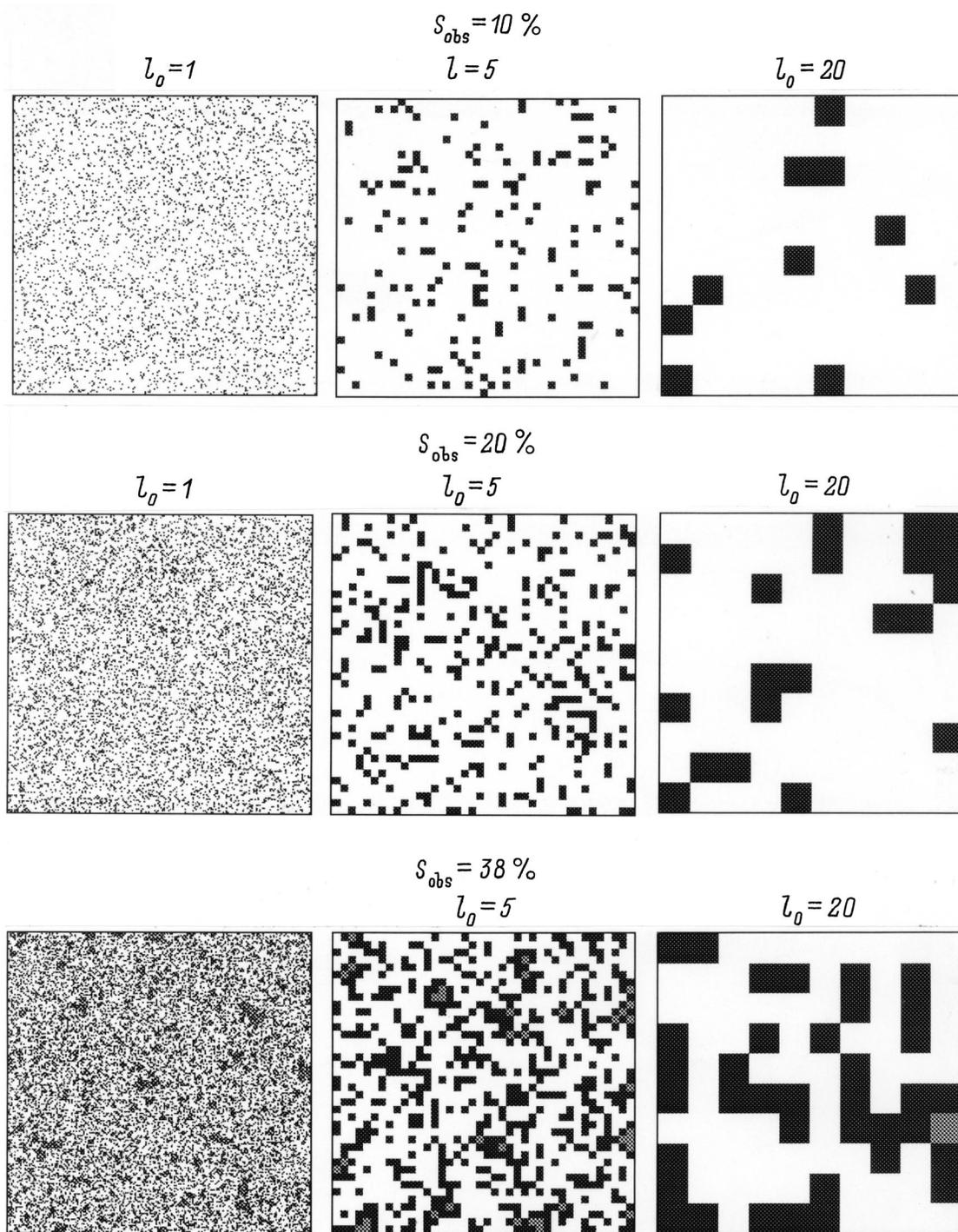


Рис. 1. Образцы матриц с различным линейным размером неоднородностей и их различной относительной площадью.

рогенных системах. Пусть имеется решетка, рассматриваемая как совокупность узлов и связей. Допустим, что случайным образом (выборка осуществляется методом Монте-Карло) долю узлов C покрасили в черный цвет. Будем считать связанными любые два черных узла, являющихся ближайшими соседями. Кластером называется совокупность черных узлов, связанных друг с другом как непосредственно, так и посредством цепочек связан-

ных черных узлов. В рамках кластерного формализма динамика возникновения протекания при увеличении C выглядит следующим образом. При $C = 0$ в системе нет черных кластеров. При $C \ll 1$ черные кластеры представляют собой совокупность малого количества узлов: одиночные узлы, пары, тройки и т.д. Однако по мере приближения к порогу протекания отдельные кластеры сливаются и средний размер их возрастает.

Среднее число узлов в конечных кластерах определяется выражением

$$I_{AV} = \frac{\sum_m i_m m^2}{\sum_m i_m m}, \quad (3)$$

где i_m — количество кластеров с числом узлов m . Аналитическая зависимость I_{AV} от C неизвестна. Согласно численным расчетам, при $C \rightarrow C_c - 0$ величина I_{AV} обращается в бесконечность (см. (1)). В точке $C = C_c$ впервые возникает бесконечный кластер, пронизывающий все пространство. Значение C_c , при котором возникает бесконечный кластер черных узлов, и есть порог протекания. Вероятность протекания определяется, согласно [23,24], как отношение числа узлов, принадлежащих бесконечному кластеру, к общему числу узлов в решетке. На практике рассматриваются конечные системы. Поэтому при численном моделировании определяется число узлов m_{\max} , принадлежащее наибольшему кластеру, и оценивается вероятность протекания по формуле

$$P_{\max} = \frac{m_{\max}}{L \times L}, \quad (4)$$

где L — линейные размеры решетки. Экстенсивное моделирование и теоретические соображения показывают, что вблизи $C \rightarrow C_c + 0$ вероятность протекания убывает по степенному закону (2).

Все результаты, представленные в данной работе, получены путем моделирования процесса протекания на решетке размером 200×200 . Несмотря на то что в настоящее время уже существуют методы компьютерной реконструкции пористых натриево-боросиликатных стекол (Vycor porous glass) (см., например, [25]), в первоначальных исследованиях неоднородную систему получали введением в решетку квадратных неоднородностей определенного размера, аналогично тому как это делалось в работе [26]. Для этого на первичной решетке строилась новая решетка с размером ячейки, равным линейному размеру неоднородности. Методом Монте-Карло часть ячеек этой решетки выбиралась в качестве неоднородностей. Все узлы первичной решетки, попавшие в выбранные неоднородности, исключались из рассмотрения при моделировании процесса протекания. Отметим, что в экспериментах использовались только те конфигурации неоднородных решеток, для которых была возможна реализация протекания в обоих взаимно перпендикулярных направлениях одновременно. На рис. 1 представлены некоторые варианты матриц, использованных в работе, с различным линейным размером неоднородностей и их различной относительной площадью.

Прежде всего нами исследовалось влияние неоднородности матрицы на значение критической концентрации. В каждом случае значение C_c определялось двумя способами. Согласно [27], значение критической концентрации может быть определено из максимума зависимости

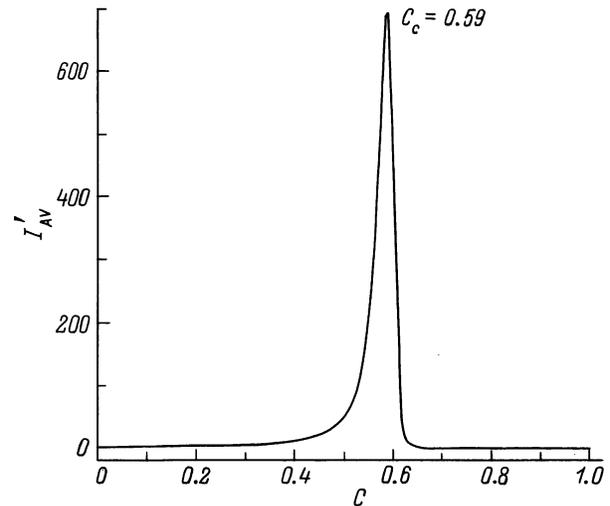


Рис. 2. Зависимость I'_{AV} от концентрации замещенных узлов C для квадратной решетки размером 200×200 , усредненная по 200 реализациям.

приведенного среднего числа узлов в кластере I'_{AV} от концентрации C

$$I'_{AV} = \frac{\sum_m i_m m^2}{\sum_m i_m m} - \frac{m_{\max}^2}{\sum_m i_m m}. \quad (5)$$

На рис. 2 представлена такая зависимость, полученная для чистой решетки. Однако точность определения критической концентрации таким способом не очень велика. Как видно из рисунка, представленная зависимость, полученная в результате усреднения по 200 реализациям, имеет достаточно размытый максимум, хотя шаг изменения концентрации в процессе эксперимента составлял $\Delta C = 0.001$. Критическая концентрация определялась также для каждой реализации как точка, в которой впервые возникает протекание между противоположными сторонами решетки. Такой подход не только позволяет получить среднее значение критической концентрации, но и демонстрирует с какой частотой появляется то или иное значение в процессе моделирования протекания в системе. На рис. 3 представлена гистограмма, позволяющая судить о вероятности возникновения бесконечного кластера при заданной концентрации черных узлов. Значение критической концентрации, полученное в результате обработки этих данных, очень хорошо согласуется с известным значением для квадратной решетки, найденным различными способами [7,11,14,24]. Введение неоднородностей в решетку оказывает существенное влияние на значение критической концентрации, а именно: она увеличивается (рис. 4). Наиболее сильный эффект наблюдается для неоднородностей наименьшего размера. Увеличение критической концентрации в неоднородной матрице можно объяснить следующим образом. В однородной решетке кратчайшим путем между

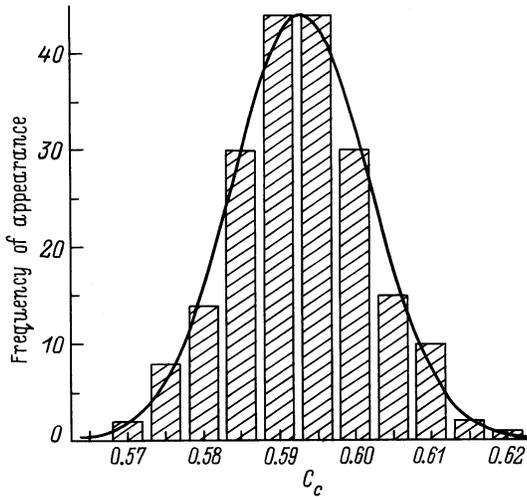


Рис. 3. Зависимость вероятности возникновения перколяционного кластера от концентрации замещенных узлов C_c в процессе реализации протекания на квадратной решетке.

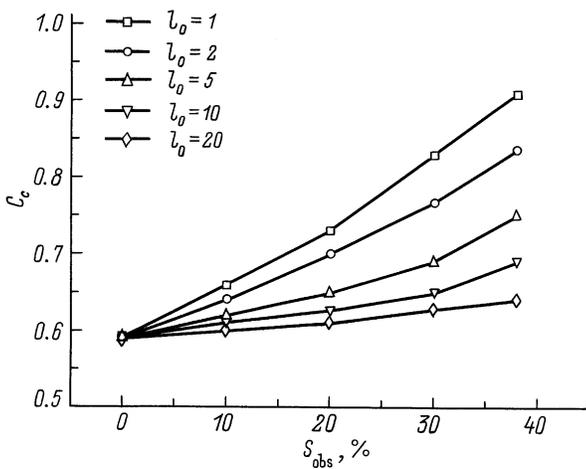


Рис. 4. Значения критической концентрации C_c для решеток с различной долей неоднородностей в матрице S_{obs} и с различным значением их линейного размера l_0 .

двумя любыми точками является прямая линия (без учета строения решетки на минимальных масштабах). В неоднородной матрице этот путь будет существенным образом отклоняться от прямой. Очевидно, что длина такого кратчайшего пути будет тем больше, чем больше неоднородностей в матрице (их относительная площадь). При введении неоднородностей в решетку общее число доступных узлов уменьшается, а число черных узлов, необходимое для соединения любых двух точек системы, возрастает. Следовательно, в неоднородной матрице значение критической концентрации, определяемой как отношение числа черных узлов, при котором возникает протекание, к полному числу узлов, должно возрастать. Уменьшение данного эффекта с увеличением линейного размера неоднородностей обусловлено тем, что при

одной и той же их относительной площади рассматриваемые неоднородности оказываются локализованными в определенных местах решетки. В результате часть матрицы ведет себя как однородная. Чем больше линейный размер неоднородностей, тем больше доля "однородной" части.

Большое значение в теории имеют критические индексы, описывающие поведение различных величин в окрестности порога протекания. Значения критических индексов зависят только от размерности пространства [14]. Но для каждой размерности пространства существует великое множество самых различных задач. Согласно современным представлениям, критические индексы для всех задач в пространстве с одной и той же размерностью одинаковы. Физические причины универсальности индексов, видимо, состоят в том, что индексы определяются структурой кластеров в окрестности порога протекания. Основную роль при этом играют геометрические свойства кластеров, проявляющиеся на больших расстояниях (порядка радиуса корреляции). Вблизи проговой точки эти расстояния намного превосходят период решетки (в случае решеточных задач). Поэтому геометрия кластера не зависит от того, на какой решетке задана задача. Задача может быть вообще задана не на периодической решетке, а на случайно расположенных в пространстве узлах, и это не повлияет на структуру больших кластеров. Но размерность пространства существенно сказывается на геометрии кластеров. По этим причинам критические индексы не зависят от типа задачи, но зависят от ее размерности.

Таким образом, в отличие от порогов протекания, которые существенно зависят от типа задачи, критические индексы обладают определенной универсальностью. Отсюда следует важный вывод. Если результаты физического эксперимента трактуются с помощью теории протекания, а микроскопическая структура не вполне ясна, то прежде всего следует сравнивать с теорией критические индексы, так как они зависят только от размерности пространства.

На рис. 5 представлена зависимость, среднего числа узлов в кластере от приведенной концентрации замещенных узлов C/C_c в двойном логарифмическом масштабе. Хорошо видно, что в широкой области концентраций эта зависимость описывается степенным законом, как и предсказывает формула (1). Отклонение от степенной зависимости, наблюдаемое вблизи критической концентрации, обусловлено конечными размерами решетки. Действительно, согласно (1), в критической точке данная величина должна возрастать до бесконечности, что в принципе невозможно для системы конечных размеров. Полученное значение критического индекса γ совпадает со значением, найденным в работе [27] тем же методом, и несколько меньше значений, определенных другими способами [14]. На рис. 6 представлены зависимости значения критического индекса γ , полученного аналогичным способом, от линейного размера неоднородностей для различных значений их относительной площади.

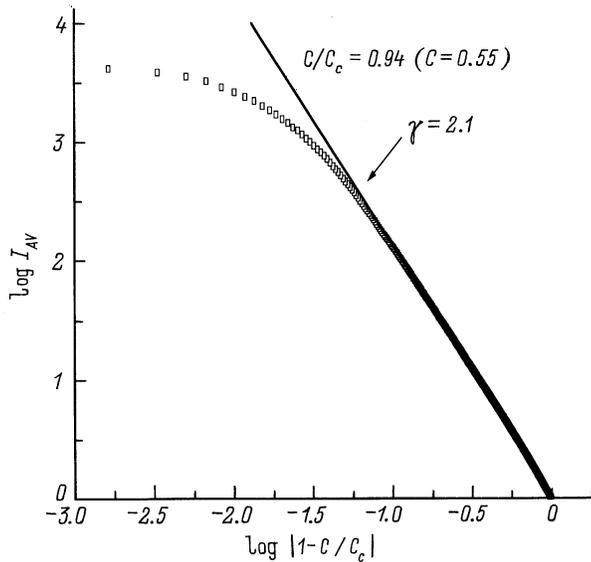


Рис. 5. Зависимость $\log I_{AV}$ от $\log |1 - C/C_c|$ для квадратной решетки.

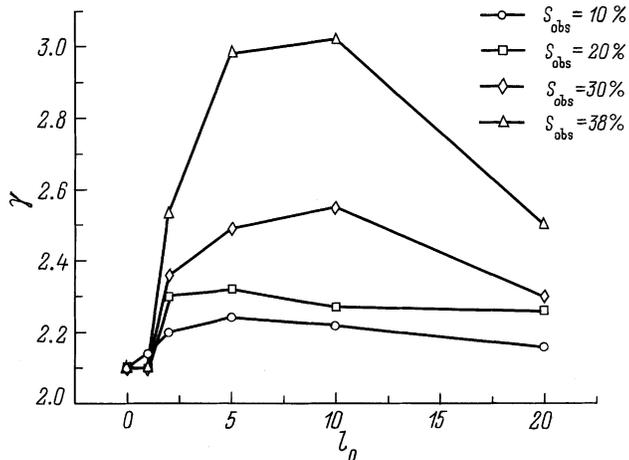


Рис. 6. Значения критического индекса γ для решеток с различным линейным размером неоднородностей l_0 и их различной относительной площадью S_{obs} .

Видно, что в случае неоднородностей с $l_0 = 1$ значение критического индекса совпадает со значением, полученным для однородной решетки. При увеличении линейного размера сначала наблюдается его возрастание (вплоть до $l_0 = 10$), а затем уменьшение. Увеличение относительной площади неоднородностей в матрице ведет к росту значения критического индекса γ . Введение неоднородностей в решетку приводит к разъединению узлов, принадлежащих одному кластеру. Критический индекс γ характеризует рост размера кластеров с увеличением концентрации. Ясно, что чем больше размер неоднородностей и их относительная площадь, тем при более высоких концентрациях начинается объединение узлов в кластеры и слияние малых кластеров в большие.

Иными словами, увеличение среднего размера кластеров с ростом концентрации носит более резкий характер, чем в системе с однородной матрицей, что и соответствует возрастанию критического индекса γ . При этом следует отметить, что для всех исследуемых решеток имела место линейная зависимость, аналогичная представленной на рис. 5. Уменьшение значения γ , наблюдаемое для матриц с размером неоднородностей $l_0 = 20$, связано с конечными размерами используемых решеток. Из рис. 1 видно, что с увеличением размера неоднородностей можно говорить о переходе от неоднородной матрицы к пространственно ограниченной. Это особенно хорошо заметно для решеток с максимальной величиной относительной площади неоднородностей, используемой в работе. Исследования показали, что для матриц с $l_0 = 20$ и $S_{obs} = 38\%$ увеличение размера решетки до 400×400 сопровождается ростом значения критического индекса γ до 2.94 (для решетки размером 200×200 оно составляло 2.50). При этом увеличение размера неоднородностей до 40 опять ведет к уменьшению γ .

Более сложная ситуация наблюдается для зависимости вероятности протекания от концентрации замещенных узлов. Согласно (2), в двойном логарифмическом масштабе должна наблюдаться линейная зависимость, из наклона которой можно определить значение критического индекса β . К сожалению, в результате анализа данных, полученных нами для квадратной решетки, не было обнаружено линейной зависимости с соответствующим углом наклона во всей области концентраций $C > C_c$. Анализ литературы, касающейся данного вопроса, также показал отсутствие согласия относительно области применимости соотношения (2). Так, в работе [28] для треугольной решетки размером 4000×4000 скейлинговая зависимость (2) наблюдалась в области концентраций $(C - C_c)$ от 10^{-4} до $2 \cdot 10^{-2}$. В области больших концентраций уже имелось отклонение зависимости от линейной. В нашем случае, как и в случае со средним числом узлов в кластере, в этой области сильно сказываются конечные размеры решетки. В работе [27] для квадратной решетки размером 400×400 линейная зависимость наблюдалась в области концентраций от $2 \cdot 10^{-3}$ до $7 \cdot 10^{-2}$, хотя угол наклона соответствовал значению $\beta = 0.19$. Видно, что соотношение (2) справедливо только вблизи порога протекания и в очень узкой области изменения концентрации. Однако на основании результатов исследования транспорта энергии электронного возбуждения в смешанных молекулярных кристаллах в [13] был сделан вывод, что область концентраций, в которой применимы критические индексы, для миграции энергии значительно шире, чем для любого другого критического явления в физике. С точки зрения транспорта энергии для нас важным является тот факт, что в неоднородной матрице вероятность захвата возбуждения ловушкой, определяемая в области концентраций, больших критической, вероятностью протекания [12], характеризуется более крутой зависимостью от приведенной концентрации молекул активатора C/C_c , чем в однородной (см. [20]).

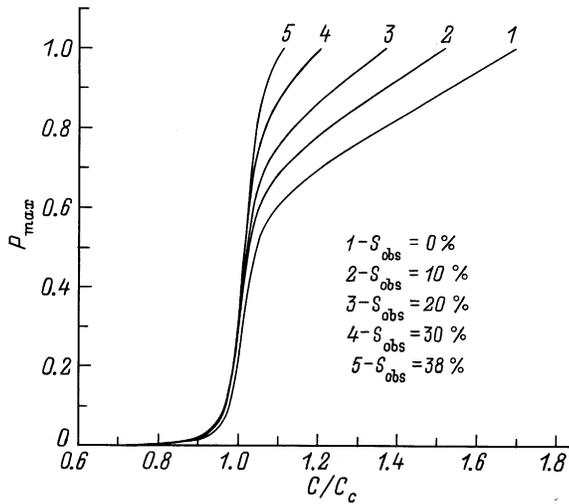


Рис. 7. Зависимость P_{\max} от приведенной концентрации C/C_c для решеток с линейным размером неоднородностей $l_0 = 1$ при различной их доле в матрице.

С точки зрения критических индексов это как раз и соответствует уменьшению значения индекса β .

На рис. 7 представлены зависимости вероятности протекания от приведенной концентрации для решеток с различной долей неоднородностей. Хорошо видно, что введение неоднородностей в решетку сопровождается увеличением скорости нарастания вероятности протекания с ростом концентрации. Несмотря на то что с ростом линейного размера неоднородностей наблюдаемый эффект ослабевает, тем не менее, как показали наши исследования, в любом случае наличие неоднородностей в матрице ведет к изменению указанной зависимости.

Одной из основных характеристик бесконечного кластера в критической точке является его фрактальная размерность d_f . Впервые понятие фрактала было введено Мандельбротом [29,30]. Впоследствии он сузил предварительное понятие [31], определив фрактал как структуру, состоящую из частей, которые в каком-то смысле подобны целому. Тем не менее строгого и полного определения фракталов пока не существует [32]. Бесконечный кластер в критической точке статистически самоподобен [24]. Фрактальная геометрия бесконечного кластера и его статистическое самоподобие взаимосвязаны. Из этой взаимосвязи вытекает следующее соотношение между массой кластера и его линейным размером:

$$M = l^{d_f}. \quad (6)$$

Как показано в работах [33,34], практически во всех физических приложениях фрактальная размерность определяется как показатель степени в выражении (6). В настоящее время для определения фрактальной размерности используется несколько различных способов [35]. Одним из них является метод вложенных квадратов, предложенный в [24]. Суть этого метода состоит в том, что на изучаемом объекте случайным

образом выбиралась центральная точка и затем вокруг нее размещалась серия вложенных квадратов. Подсчитывалось количество узлов в каждом квадрате и строилась зависимость массы объекта (числа узлов) от линейного размера квадрата. Из этой зависимости определялась фрактальная размерность. В [36] было предложено совмещать центральную точку с центром масс исследуемого объекта, что повышало воспроизводимость результатов. В настоящей работе для определения фрактальной размерности бесконечного кластера методом вложенных квадратов из всех возможных реализаций выбирались кластеры, центры масс которых были близки к центру исследуемой решетки, а радиус гирации кластера [24] был близок к $L/2$. Нужно отметить, что введение такого критерия никак не сказалось на статистике, полученной для критической концентрации и приведенной на рис. 3. Представленные далее результаты были получены путем усреднения по 300 различным кластерам. Для решеток с большим размером неоднородностей дополнительно производились усреднения по 20 конфигурациям распределения неоднородностей в них.

На рис. 8 представлена зависимость массы кластера (числа узлов) от размера квадрата в двойном логарифмическом масштабе. Хорошо видно, что начиная с размеров квадрата порядка 20×20 действительно имеет место линейная зависимость, наклон которой дает значение фрактальной размерности 1.8. Это значение несколько меньше точного значения $d_f = 91/48$, рассчитанного в работах [7,14] с помощью скейлинговой теории. Этот результат может быть объяснен двумя причинами. Во-первых, как показано в [35], метод вложенных квадратов дает чуть заниженную оценку фрактальной размерности по сравнению с другими методами. Во-вторых, заниженное значение d_f может быть обусловлено конечными размерами рассматриваемой решетки. Очевидно, что перколяционный кластер на конечной решетке соста-

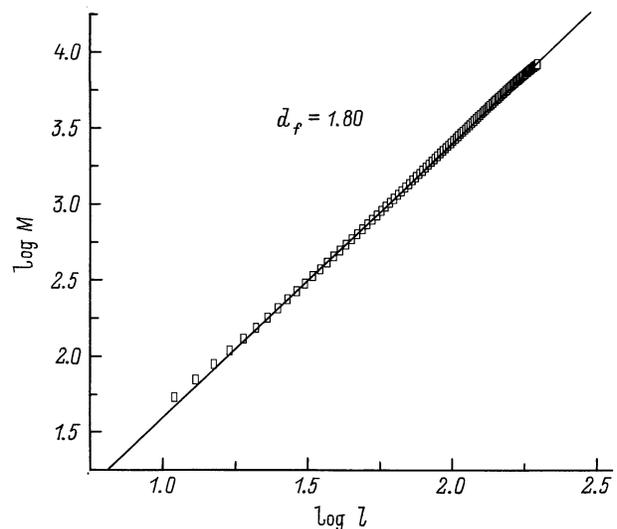


Рис. 8. Зависимость $\log M$ от $\log l$, полученная для квадратной решетки без неоднородностей.

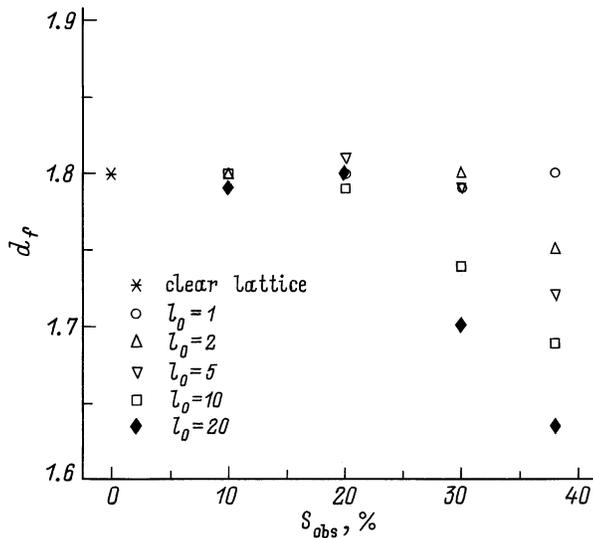


Рис. 9. Значения фрактальной размерности перколяционного кластера для решеток с различным размером неоднородностей l_0 и разной их долей в матрице S_{obs} .

влияет лишь часть бесконечного кластера на бесконечной решетке, для которого и было получено точное значение. Поэтому некоторые из узлов, не входящие в перколяционный кластер на решетке размером L , на самом деле принадлежат бесконечному кластеру, так как соединены с ним связями, лежащими вне рассматриваемого фрагмента. В любом случае нас больше интересует влияние на эту величину неоднородных свойств решетки, а не ее абсолютное значение. Рис. 9 демонстрирует значение такого влияния. Видно, что для решеток с линейным размером неоднородностей $l_0 = 1$ не наблюдается какого-либо изменения фрактальной размерности. Для решеток с большим размером неоднородностей имеет место уменьшение величины d_f только при достаточно большой их доле в системе. При этом эффект возрастает с увеличением размера неоднородностей. Такое поведение легко объяснить, если учесть, что перколяционный кластер является сильно "пористым" объектом. Поэтому при малых размерах неоднородностей и их малой относительной площади велика вероятность того, что они располагаются как раз в этих "порах". Когда размеры неоднородностей и их доля в матрице возрастают, они начинают оказывать влияние на геометрию перколяционного кластера, что проявляется в уменьшении его фрактальной размерности.

Таким образом, приведенные в работе результаты подтверждают предположение, сделанное ранее на основании данных по изучению процессов транспорта энергии в разупорядоченных системах с использованием матриц с различной микроскопической организацией, о том, что неоднородные свойства матрицы оказывают существенное влияние на процессы перколяции, проходящие в них. Введение неоднородностей в решетку прежде всего ведет к увеличению критической концентрации. Эффект

растет с увеличением доли неоднородностей в матрице и уменьшением их линейного размера. При наличии неоднородностей меняется ход зависимостей среднего числа узлов в кластере и вероятности протекания от концентрации, что сказывается на значениях критических индексов. Изменяется также фрактальная размерность перколяционного кластера. Эти изменения усиливаются с увеличением размера неоднородностей и их относительной площади. Учитывая тот факт, что свойства перколяционного кластера характеризуются многими другими размерностями, можно ожидать, что неоднородные свойства рассматриваемых решеток будут сказываться и на них.

Список литературы

- [1] S.R. Broadbent, J.M. Hammersley. Proc. Camb. Phil. Soc. **53**, 629 (1957).
- [2] Fragmentation Form and Flow in Fractured Media / Ed. R. Engelman and Z. Jaeger. IPS, Bristol (1986).
- [3] Proc. Int. Topical Conf. Kinetics of Aggregation and Gelation (Athens, GA) / Ed. F. Family and D.P. Landau. North-Holland, Amsterdam (1984).
- [4] P. de Gennes. Scaling Concepts in polymer Physics. Cornell University Press, Ithaca (1979).
- [5] Percolation Structures Processes. Ann. Isr. Phys. Soc. Vol. 5 / Ed. G. Deutscher, R. Zallen and J. Adler. Hilger, Bristol (1983).
- [6] Б.И. Шкловский, А.Л. Эфрос. УФН **117**, 401 (1975).
- [7] D. Stauffer. Introduction to Percolation Theory. Taylor and Francis, London (1985).
- [8] G. Mackay, N. Jan. J. Phys **A17**, L757 (1984).
- [9] P. Grassberger. Math. Biosci. **63**, 157 (1983).
- [10] A. Bunde, H. Herrmann, A. Margolina, H.E. Stanley. Phys. Rev. Lett. **55**, 653 (1985).
- [11] Б.И. Шкловский, А.Л. Эфрос. Электронные свойства легированных полупроводников. Наука, М. (1979).
- [12] J. Hoshen, R. Kopelman. J. Chem. Phys. **65**, 2817 (1976).
- [13] Р. Копельман. В сб.: Спектроскопия и динамика возбуждений в конденсированных молекулярных системах / Под ред. В.М. Аграновича, Р.М. Хохштрассера. Наука, М. (1987). С. 61.
- [14] D. Stauffer. Phys. Rep. **54**, 1 (1979).
- [15] D.C. Ahlgren, R. Kopelman. Chem. Phys. **77**, 135 (1981).
- [16] C. von Borczyskowski, T. Kirski. Ber. Bunsenges. Phys. Chem. **93**, 1377 (1989).
- [17] S.A. Bagnich. Chem. Phys. **185**, 229 (1994).
- [18] С.А. Багнич, П.П. Першукевич. ФТТ **37**, 3655 (1995).
- [19] С.А. Багнич. Опт. и спектр. **80**, 769 (1996).
- [20] S.A. Bagnich. SPIE Proc. **3176**, 212 (1997).
- [21] D.C. Saha, T.N. Misra, D. Talukdar. Ind. J. Phys. **B69**, 243 (1995).
- [22] С.А. Багнич. ФТТ **42**, 1775 (2000).
- [23] S. Kirkpatrick. Phys. Rev. Lett. **36**, 69 (1976).
- [24] Е. Федер. Фракталы. Мир, М. (1991).
- [25] M.E. Kainourgiakis, E.S. Kikkinides, A.K. Stubos, N.K. Kanellopoulos. J. Chem. Phys. **111**, 2735 (1999).
- [26] M.C. Bujan-Nunez, A. Miguel-Fernandez, M.A. Lopez-Quintela. J. Chem. Phys. **112**, 8495 (2000).
- [27] J. Hoshen, R. Kopelman, E.M. Monberg. J. Stat. Phys. **19**, 219 (1978).

- [28] J. Hoshen, D. Stauffer, G.H. Bishop, R.J. Harrison, G.P. Quinn. *J. Phys.* **A12**, 1285 (1979).
- [29] B.B. Mandelbrot. *Fractals: Form, Chance, and Dimension*. W.H. Freeman, San Francisco (1977).
- [30] B.B. Mandelbrot. *The Fractal Geometry of Nature*. W.H. Freeman, N. Y. (1982).
- [31] B.B. Mandelbrot. In: *Fractals in Physics* / Ed. L. Pitronero and E. Tosatti. North-Holland, Amsterdam (1986). P. 3.
- [32] B.B. Mandelbrot. *Fractals. Encycl. Phys. Technol.* **5**, 579 (1987).
- [33] Y.E. Stanley. *J. Stat. Phys.* **36**, 843 (1984).
- [34] И.М. Соколов. *УФН* **150**, 221 (1986).
- [35] D.J. Robinson, J.C. Earnshaw. *Phys. Rev.* **A46**, 2045 (1992).
- [36] S.R. Forest, T.A. Witten. *J. Phys.* **A12**, L109 (1979).