

01;12

Томографический метод восстановления трехмерной функции распределения электронов по скоростям

© А.Н. Чебуркин,¹ С.А. Харченко²

¹ Институт общей физики РАН,
117942 Москва, Россия

² Вычислительный центр РАН,
117967 Москва, Россия

(Поступило в Редакцию 8 декабря 1999 г.)

Для точечного источника электронов предлагается экспериментальный метод определения произвольной трехмерной функции распределения электронов по начальным энергиям с разрешением по двум углам направления вылета. В компьютерном эксперименте предложенным методом восстановлены две модельные функции распределения.

Введение

В различных областях современной науки представляет интерес функция распределения электронов, эмитированных некоторым источником, по начальным энергиям и направлениям испускания. Под функцией распределения точечного источника электронов по начальным энергиям и направлениям испускания (в дальнейшем функция распределения) будем понимать плотность вероятности нахождения электронов в точках пространства начальных скоростей. В общем случае функция распределения зависит от трех независимых переменных.

Информация о функции распределения имеет самостоятельную ценность при изучении ряда физических явлений, например фотоэффекта и ионизации газов. Кроме этого, пучок электронов может использоваться как инструмент для исследований в электронной спектроскопии и дифракции, в электронных микроскопах. Сравнение функции распределения электронного пучка до и после его взаимодействия с изучаемым объектом позволяет получить информацию о строении последнего. В большинстве современных научных исследований определяются одномерные [1–4] или двумерные [4–6] функции распределения. В одномерных функциях распределения получается зависимость от начальной энергии или одного из двух углов, определяющих направление вылета. Двумерные функции распределения чаще всего представляют зависимость от энергии и одного из углов направления вылета. Трехмерная функция распределения по энергии и двум углам направления вылета измерялась в ограниченном телесном угле в работе [7]. В этом эксперименте детектор электронов с энергоанализатором перемещался по поверхности сферы.

В настоящей работе предлагается метод экспериментального определения трехмерной функции распределения. В отличие от существующих способов измерения функции распределения предлагаемый метод имеет следующие преимущества. Функция распределения определяется для всех направлений вылета электронов из точечного источника. Регистрируются все электроны, выле-

тевшие из источника. Метод является невозмущающим в смысле отсутствия между источником электронов и детектором сеток, щелей, диафрагм. Метод не предполагает определение зависимости функции распределения от времени. Существенной особенностью метода является необходимость проведения нескольких экспериментов, т.е. регистрация детектором нескольких изображений вылетевших электронов.

Томографический метод восстановления трехмерной функции распределения

1. Сущность метода. Пусть изучается некоторая функция распределения электронов по начальным энергиям и направлениям вылета для точечного мгновенного источника электронов (в дальнейшем функция распределения). Поместим на некотором расстоянии от источника плоский приемный элемент (экран), на котором может регистрироваться пространственное распределение попавших на него электронов. Между источником и приемным элементом может прикладываться электромагнитное поле различных конфигураций. Основная проблема восстановления функции распределения в такой схеме эксперимента заключается в следующем. В общем случае имеются три независимых переменных, от которых зависит функция распределения. Таковыми можно выбрать, например, декартовы координаты в пространстве начальных скоростей. На экране мы имеем информацию о распределении интенсивности электронного изображения, зависящую только от двух независимых пространственных переменных. При этом каждая точка изображения на экране соответствует кривой в пространстве начальных скоростей, а именно все электроны, соответствующие точкам пространства скоростей на этой кривой, попадают в заданную точку экрана. Двум различным точкам экрана будут соответствовать две непересекающиеся кривые в пространстве скоростей. Будем называть кривую в пространстве скоростей, со-

ответствующую определенной точке регистрирующего экрана, изолинией.

По интенсивности электронного изображения в точке экрана нельзя однозначно восстановить распределение плотности вероятности на соответствующей этой точке изолинии. Поэтому по одному изображению на регистрирующем экране в общем случае невозможно однозначно восстановить трехмерную функцию распределения. Для однозначного решения обратной задачи нахождения функции распределения необходим третий независимый варьируемый параметр, характеризующий каждое полученное распределение интенсивности электронов на плоском экране. В качестве таких независимых варьируемых параметров могут выступать величины, характеризующие электромагнитное поле в пространстве между источником электронов и экраном, расстояние между источником и экраном, угол между нормалью к экрану и вектором, характеризующим испускательную диаграмму направленности источника, момент и время регистрации изображения на экране.

Задача восстановления упрощается, если функция распределения обладает свойствами симметрии. Например, часто из физических соображений или из симметрии эксперимента функция распределения обладает осевой симметрией и при соответствующем выборе системы координат может рассматриваться как двумерная. Тогда при определенном относительном положении источника и экрана достаточно одного изображения на экране для восстановления такой двумерной функции распределения.

В настоящей работе рассмотрен общий случай восстановления трехмерной функции распределения. Проведены компьютерные эксперименты по восстановлению двух модельных функций распределения. В качестве результатов этих экспериментов использовались вычисленные аналитически электронные распределения на экране для различных относительных положений испускательной диаграммы направленности источника и системы электромагнитное поле—регистрирующий экран.

2. Схема эксперимента. Пусть имеется точечный источник электронов O . Поместим этот источник в однородное электрическое поле E (рис. 1). На расстоянии b от источника и перпендикулярно электрическому

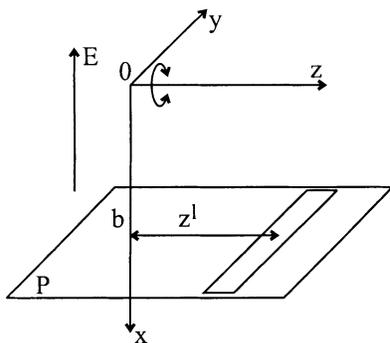


Рис. 1.

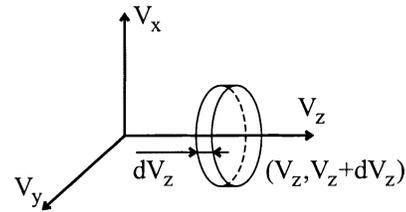


Рис. 2.

полю E поместим плоский регистрирующий экран P . Экран P располагается относительно источника O так, что электроны, ускоренные полем, попадают на экран. Введем в пространстве систему координат. Ее начало совместим с источником O . Ось Ox направим от источника к экрану противоположно направлению электрического поля. Плоскость OYZ параллельна плоскости экрана и образует ортогональную систему координат $OXYZ$. Будем представлять функцию распределения в виде ограниченного тела с переменной плотностью в пространстве скоростей. Плотность тела соответствует плотности вероятности функции распределения. Введем в пространстве скоростей прямоугольную систему координат. Направления осей выберем так, чтобы проекции скоростей электронов V_x, V_y, V_z были проекциями на оси OV_x, OV_y, OV_z (рис. 2).

Рассмотрим плоское сечение функции распределения перпендикулярное оси OV_z . Предположим, что максимальная начальная энергия электронов много меньше энергии, приобретаемой электронами в ускоряющем поле. Тогда можно показать, что с достаточной точностью такое сечение в пространстве скоростей отображается в параллельной оси OY отрезок на экране P .

Слой функции распределения $(V_z^l - V_z^l + dV_z)$, лежащий между двумя близкими плоскими сечениями перпендикулярно оси OV_z , отобразится в щель на экране. Эта щель ограничена двумя параллельными оси OY отрезками, соответствующими сечениям

$$V = V_z^l \text{ и } V = V_z^l + dV_z \quad (1)$$

Центр щели лежит на расстоянии z^l от начала координат вдоль оси OZ :

$$z^l = V_z^l \sqrt{\frac{2mb}{eE}}, \quad (2)$$

где m и e — масса и заряд электрона; в дальнейшем эту щель будем называть регистрирующей щелью.

Разделим всю функцию распределения в пространстве скоростей на совокупность плоских слоев перпендикулярных оси OV_z . Если восстановить функцию распределения в пределах каждого слоя, то это будет означать восстановление всей функции распределения в целом. Каждому слою функции распределения соответствует определенная регистрирующая щель на экране P . Таким образом, при указанном допущении задача восстановления функции распределения может быть разбита на

совокупность задач восстановления двумерных функций распределения в тонких слоях, перпендикулярных оси OV_z по одномерным изображениям в соответствующих регистрирующих щелях.

3. Уравнение изолинии. Рассмотрим задачу восстановления распределения электронов в тонком слое перпендикулярном оси OV_z . Введем в плоскости OV_xV_y полярные координаты (V, φ) . Здесь V — радиус-вектор точки; φ — угол, отсчитываемый относительно положительного направления оси OV_x . Уравнения движения электрона с параметрами (V, φ) в однородном электрическом поле E , направленном вдоль оси OX , имеют вид

$$y = V \sin \varphi^* \tau, \quad (3)$$

$$b = V \cos \varphi^* \tau + a\tau^2/2, \quad (4)$$

где τ — время пролета электрона от источника до экрана, $a = eE/m$ — ускорение электрона в однородном электрическом поле.

Введем безразмерный параметр

$$r = \frac{V}{V_0}, \quad (5)$$

где V_0 — максимальная скорость в выбранном сечении.

Из определения (5) следует, что функция распределения электронов в пространстве скоростей может быть отлична от 0 только в пределах круга $r = 1$. Исключим время из уравнений (3) и (4). После элементарных преобразований получаем

$$r = \frac{y}{V_0 \sin \varphi} \sqrt{\frac{a}{2(b - y \operatorname{ctg} \varphi)}}. \quad (6)$$

Смысл уравнения (6) следующий. Если точки пространства скоростей, характеризующие векторы скоростей эмитированных электронов, лежат в плоскости рассматриваемого сечения на кривой (6), то соответствующие электроны попадают в одну и ту же точку регистрирующего экрана с координатой y (рис. 3). При этом данная точка лежит в пределах щели, параллельной оси OY и соответствующей рассматриваемому сечению. Таким образом, определено уравнение изолинии, соответствующее точке регистрирующей щели с координатой y .

В рассмотренном случае однородного электрического поля удалось получить явный вид уравнения изолинии. В случае более сложных электромагнитных полей исключение времени из уравнений движения электрона может оказаться затруднительным. Однако получение явного вида уравнения изолинии не является обязательным. Для реализации метода существует возможность решения прямой задачи отображения на экран электронов с заданными начальными параметрами. Соответствующие численные методы разработаны и успешно применяются на практике [8].

4. Математическая формулировка задачи. Понятие изолинии помогает наглядно описать предлагаемый метод восстановления. Выберем на регистрирующей

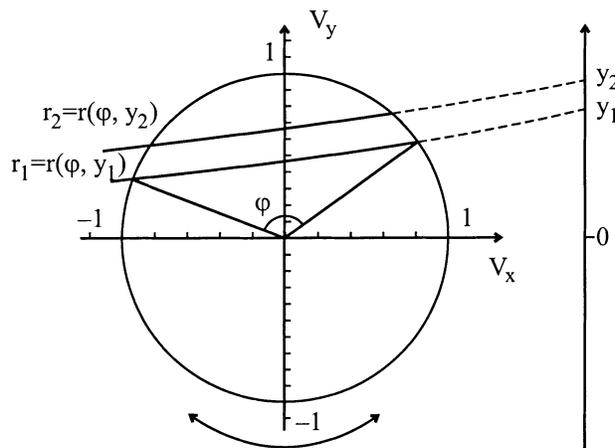


Рис. 3.

щели две точки с координатами y_1 и y_2 (рис. 3). Этим точкам будут соответствовать две изолинии $r_1 = r(\varphi, y_1)$ и $r_2 = r(\varphi, y_2)$, лежащие в рассматриваемом сечении в пространстве скоростей. В отрезок регистрирующей щели, ограниченный точками y_1 и y_2 , попадут те и только те электроны, которые лежат между изолиниями $r_1 = r(\varphi, y_1)$ и $r_2 = r(\varphi, y_2)$. Число этих электронов равно

$$\Delta N = \iint_S \rho(r, \varphi) ds, \quad (7)$$

где $\rho(r, \varphi)$ — искомая функция распределения, $ds = r^* dr^* d\varphi$ — элемент площади в полярных координатах, область интегрирования S обозначает область в рассматриваемом сечении функции распределения между изолиниями r_1 и r_2 .

Величина ΔN количества электронов, попавших на экран в ячейку с границами y_1 и y_2 может быть измерена экспериментально. Для этого в качестве регистрирующей щели следует выбрать регистрирующую электроны систему с пространственным разрешением. Такими системами являются, например, электроночувствительные ПЗС матрицы или стандартные системы регистрации электронных изображений в электронно-оптических камерах.

Соотношения (7) могут быть записаны для всех пространственных ячеек, которые имеются на регистрирующей щели. В результате получится система интегральных уравнений с искомой подынтегральной функцией.

В рассматриваемом случае, когда известно уравнение изолинии (6), удобно перейти от понятия числа электронов в ячейке экрана к величине интенсивности числа электронов в точке экрана. Будем сближать точки y_1 и y_2 экрана. В результате перейдем к пределу числа электронов ΔN в малой окрестности Δu точки экрана u . Отношение $\Delta N/\Delta u$ в физически малой окрестности точки u экрана можно трактовать как интенсивность количества электронов, попавших в точку u экрана. Такая кривая интенсивности вдоль направления регистриру-

ющей щели может быть получена путем обработки экспериментальных данных числе электронов в ячейках этой щели.

Поделив левую и правую части уравнения (7) на длину ячейки dy и переходя к пределу $dy = y_2 - y_1 \rightarrow 0$, получим

$$I(y) = \frac{dN}{dy} = \iint_{\Phi} \rho(r, \varphi) r \frac{dr}{dy} d\varphi, \quad (8)$$

где $r = r(\varphi, y)$ — уравнение изолинии в явном виде; Φ — интервал между углами, соответствующими точкам пересечения изолинии и границы восстанавливаемого сечения.

Таким образом, проблема восстановления функции распределения в плоском сечении пространства скоростей сводится к задаче восстановления функции $\rho(r, \varphi)$ по известным значениям интеграла (8) для различных изолиний.

В компьютерном эксперименте ”экспериментальными данными” $I(y)$ являются результаты аналитического или численного расчета интенсивности распределения электронов на экране по заданной модельной функции распределения. Уравнение (8) является интегральным уравнением Фредгольма I рода. В литературе показывается [9], что его решение относительно подынтегральной функции может не обладать свойством устойчивости к малым изменениям исходных данных $I(y)$. Поэтому задача восстановления плотности функции распределения является некорректно поставленной и требует использования соответствующих методов решения.

Постановка задачи восстановления функции распределения электронов в пространстве начальных скоростей и ее последующее сведение к системе интегральных уравнений очень похожи на постановку задачи реконструктивной вычислительной томографии и ее последующее математическое описание [10,11]. Для восстановления функции распределения поступим аналогично методу восстановления в реконструктивной вычислительной томографии. Измерим распределение интенсивности на регистрирующей щели, соответствующей рассматриваемому сечению. Затем повернем сечение на некоторый угол вокруг оси OV_z . Этого можно достигнуть поворотом источника вокруг оси OZ . Система поле–экран остается неподвижной в выбранных пространственных координатах, а значит, в пространстве скоростей остаются неподвижными изолинии для соответствующей сечению регистрирующей щели. Поэтому в пространстве скоростей, точнее в плоскости $V_x V_y$, произойдет относительный поворот рассматриваемого сечения и системы изолиний для соответствующей сечению регистрирующей щели. Таким образом, на регистрирующей щели получим новую проекцию рассматриваемого сечения. Зарегистрировав профили интенсивности на регистрирующей щели для различных углов поворота, получим информацию о величине интеграла (8) вдоль изолиний разных направлений, проходящих через восстанавливаемое сечение.

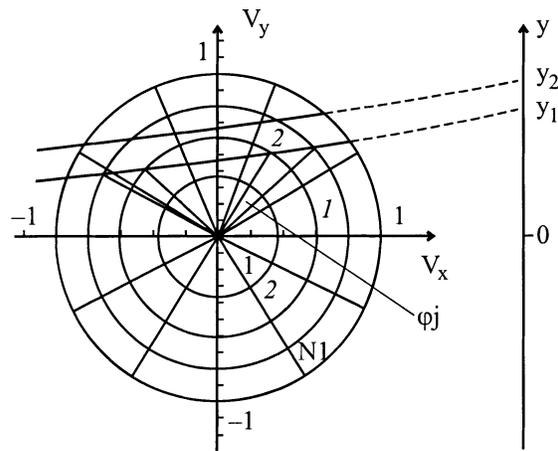


Рис. 4.

Направления вращения источника и его функции распределения показаны стрелками на рис. 1 и 3 соответственно. В данной работе проводилось моделирование вращения источника и соответствующей ему функции распределения при неподвижном электрическом поле и экране. Поскольку имеет значение относительное вращение изолиний и функции распределения, то возможна другая постановка эксперимента: источник электронов неподвижен, а система поле–экран вращается вокруг оси OZ .

5. Алгоритм реконструкции. Для восстановления функции распределения использовался алгебраический алгоритм реконструкции [10,11]. Этот подход предполагает дискретизацию восстанавливаемого изображения до начала процесса восстановления. Функция распределения в рассматриваемом сечении может быть не равна нулю только в пределах круга с радиусом $r = 1$ и центром на оси OV_z . Введем в пределах круга $r = 1$ элементарную сетку в полярных координатах. Для этого разделим его на N_1 концентрических колец и на N_2 секторов (рис. 4). Получившиеся элементарные ячейки будем называть элементами разбиения.

Искомая функция распределения считается непрерывной функцией. Будем восстанавливать ее в виде кусочно-постоянной функции, т. е. считая функцию распределения постоянной в пределах каждого элемента изображения. При этом чем мельче разбиение, тем лучше полученная в результате восстановления кусочно-постоянная функция может приближать реальную функцию распределения.

Вклад элемента разбиения в общую интенсивность в точке регистрирующей щели равен интегралу (8), вычисленному вдоль соответствующей изолинии в пределах рассматриваемого элемента разбиения. Суммарная интенсивность в точке y регистрирующей щели также описывается интегралом (8). При использовании дискретной модели этот интеграл трансформируется в конечную сумму. Интенсивность в точке y регистрирующей щели равна сумме вкладов отдельных элементов разбиения.

ения функции распределения, через которые проходит соответствующая изолиния.

Выделим на регистрирующей щели M точек, в которых измеряется интенсивность электронного изображения. Для каждой из этих точек можно записать уравнение (8) в виде конечной суммы. Таким образом, рассматриваемая модель приводит к неоднородной системе линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{j=1}^N A_{ij}^* \rho_j = I(y_i), \quad i = 1, 2, \dots, M. \quad (9)$$

Здесь $I(y_i)$ — интенсивность в точке y_i регистрирующей щели, полученная экспериментально (в физическом или компьютерном эксперименте); ρ_j — искомые неизвестные величины, совокупность которых $\rho = \{\rho_j\}$, $j = 1, 2, \dots, N1*N2$ характеризует восстанавливаемую в сечении функцию распределения; $A_{ij}^* \rho_j$ — вклад j -го элемента разбиения в суммарную интенсивность в i -й точке экрана. Выражение для A_{ij} получается из (8) вынесением постоянного в пределах j -го кольца значения плотности $\rho(r, \varphi) = \rho_j$ из под знака интеграла

$$A_{ij} \iint_{\Phi_j} r(dr/dy)d\varphi, \quad (10)$$

Φ_j — интервал между угловыми координатами φ граничных точек отрезка пересечения изолинии и j -го элемента разбиения.

Систему уравнений (9) можно записать для каждого угла α_k , $k = 1, 2, \dots, K$, относительного поворота источника и системы поле–экран. В результате получится объединенная система для всех проекций функции распределения

$$\sum_{j=1}^N A_{pj}^* \rho_j = I(y_p),$$

$$p = 1, 2, \dots, M, M + 1, \dots, M*K. \quad (11)$$

Все коэффициенты матрицы $A = \{A_{ij}\}$ неотрицательны, так как представляют собой вклад в интенсивность количества электронов на экране. Решение системы (11) должно быть набором неотрицательных чисел в силу физического смысла плотности вероятности распределения электронов. На решение системы могут накладываться и некоторые другие требования, вытекающие из физической задачи. Система уравнений (11) имеет прямоугольную матрицу A . Эта система может не иметь решения в классическом смысле, т.е. может не существовать вектора ρ , такого что $A\rho = I(y)$. Решение такой системы необходимо искать в виде вектора ρ , наилучшим образом удовлетворяющего системе (11) в смысле тех или иных критериев оптимальности.

Для решения системы (11) в настоящей работе использовался алгоритм реконструкции, основанный на квадратичной оптимизации. При решении системы находилось сингулярное разложение матрицы A и решалась

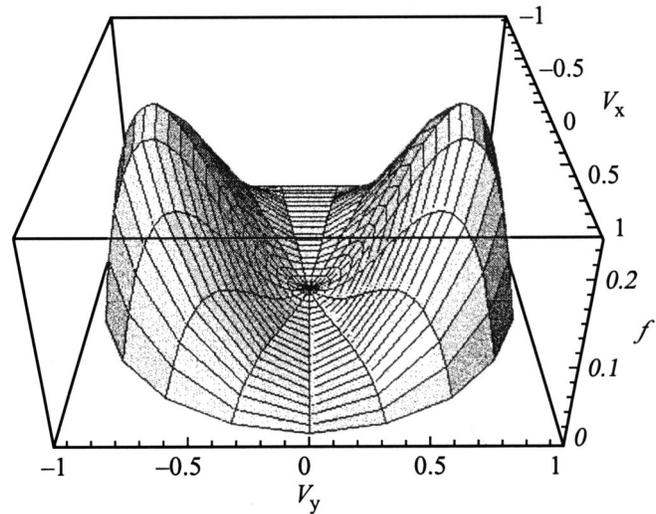


Рис. 5.

задача наименьших квадратов путем минимизации разности левой и правой частей системы в смысле 2-нормы. Анализ получившихся сингулярных чисел и сингулярных векторов матрицы A позволял судить о независимости и полноте информации, полученной в результате моделирования.

Компьютерное моделирование и обсуждение результатов

Компьютерное моделирование эксперимента и последующее восстановление функции распределения проводилось для двух распределений: $\rho = 1$ в пределах круга $r = 1$ и $\rho = r^2(1 - r^2) \sin^2 \varphi$ также в пределах круга $r = 1$. Распределение $\rho = r^2(1 - r^2) \sin^2 \varphi$ показано на рис. 5. Вне единичного круга в обоих случаях функция распределения полагалась равной нулю. Предполагалось, что область ненулевых значений функции распределения точно известна.

В ходе компьютерных экспериментов параметры эксперимента изменялись в следующих пределах: а) число точек экрана для регистрации интенсивности: 50–800; б) координаты границ регистрирующей щели обычно выбирались симметрично относительно начала координат; длина регистрирующей щели составляла 5–10 mm; в) расстояние от источника до плоскости экрана: 1–15 cm; г) напряжение между экраном и точкой нахождения источника 200–3000 V; д) максимальная начальная энергия электронов в восстанавливаемом сечении 1.0–3.0 eV; число уравнений получившейся системы всегда превышало число колец разбиения (число неизвестных). Для получения различных проекций функция распределения поворачивалась в обе стороны в диапазоне углов $(-\alpha, \alpha)$, где α лежал в диапазоне $(50^\circ, 90^\circ)$. Получающиеся восстановленные решения хорошо согласуются с заданными, когда диапазон углов

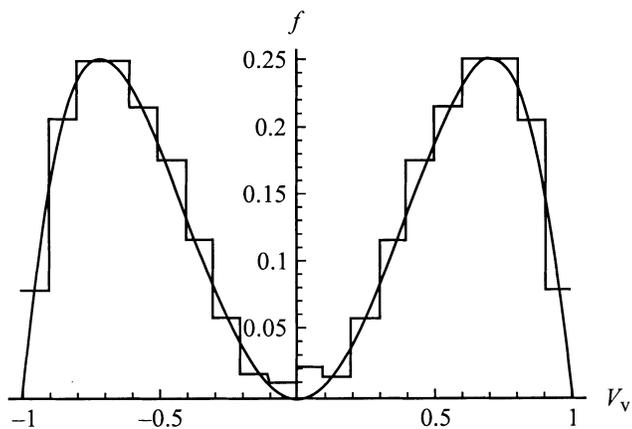


Рис. 6.

поворота более $(-70^\circ, +70^\circ)$. Для распределения $\rho = 1$ в экспериментах, когда все вылетевшие в рассматриваемом сечении электроны попадали в пределы длины регистрирующей щели, восстановление функции распределения происходило с точностью вычислительной погрешности. Относительная точность восстановления функции $\rho = 1$ была не хуже 10^{-7} . Распределение $\rho = r^2(1 - r^2) \sin^2 \varphi$ не является кусочно-постоянным. Вектор правой части системы уравнений получался путем точного вычисления интенсивности на экране от функции $\rho = r^2(1 - r^2) \sin^2 \varphi$. В то же время аппроксимация этой интенсивности проводится с использованием кусочно-постоянной функции. Поэтому неизбежна погрешность аппроксимации и рассогласование левой и правой частей получающейся системы уравнений.

В экспериментах, где рассматриваемое сечение полностью укладывалось на длине регистрирующей щели и при указанных выше условиях на диапазон вращения функции распределения, число различных положений поворотов и число точек на экране были получены хорошие результаты восстановления. Относительная ошибка восстановления по сравнению с вектором истинного решения не превышала 5% в зависимости от мелкости разбиения функции распределения. Исключением являлись элементы разбиения крайних внутренних и внешних колец, в которых заданная функция распределения близка к нулю и имеет значительный градиент. Вектор истинного решения вычислялся по формуле

$$\rho_{av} = \frac{1}{S} \iint_{\sigma} \sigma_{tr} ds, \quad j = 1, 2, \dots, N1 * N2, \quad (12)$$

где ρ — заданная модельная функция плотности, а интегрирование ведется по всей площади σ рассматриваемого j -го элемента разбиения, $S = \iint_{\sigma} ds$ — площадь j -го элемента разбиения.

Пример восстановления функции распределения $\rho = r^2(1 - r^2) \sin^2 \varphi$ в сечении $\varphi = \pi/2$ показан на рис. 6. Гладкая кривая на этом рисунке — сечение истинной

функции распределения, кусочно-постоянная функция — сечение восстановленной функции распределения.

Заключение

В работе предложен метод восстановления трехмерной функции распределения электронов, вылетевших из точечного источника, по начальным энергиям и направлениям вылета. В основе метода лежит регистрация пространственного распределения интенсивности электронов на регистрирующем экране для различных углов поворота источника относительно экрана. Восстановление проводится на основе соответствия между точками экрана и соответствующими им кривыми в пространстве начальных скоростей вылетевших электронов. Предлагаемый метод имеет сходство с методом реконструктивной вычислительной томографии. Получающаяся обратная задача решается с помощью алгебраического алгоритма реконструкции. В проведенных компьютерных экспериментах проведено успешное восстановление двух модельных функций распределения электронов.

Список литературы

- [1] *Соболева Н.А., Меламид А.Е.* Фотоэлектронные приборы. М.: Высшая школа, 1974. 376 с.
- [2] *Farkas G., Fotakis C. et al.* // J. Appl. Phys. 1989. 65(7). 1 April.
- [3] *Elizarov A.Yu.* // Laser Physics. 1997. Vol. 7. N 2. P. 292–294.
- [4] *Гомоюнова М.В.* // УФН. 1982. Т. 136. С. 105.
- [5] *Helm H., Dyer M.J. et al.* // Phys. Rev. Lett. 1993. Vol. 70. N 21. 24 May. P. 3221–3224.
- [6] *Becker W., Kleber M. et al.* // Laser Physics. 1998. Vol. 8. N 1. P. 56–68.
- [7] *McNaught S.J., Knauer J.P., Meyerhofer D.D.* // Laser Physics. 1997. Vol. 7. N 3. P. 712–718.
- [8] *Andreev S.V., Monastirski M.A., Tarasov V.A.* // ELIM (Dinamics): a New Program Tool for Streak Image Tube Design. 22nd Intern. Congress on High-Speed Photography and Photonics. Proc. SPIE. 1997. Vol. 2869. P. 92–101.
- [9] *Тухонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986. 288 с.
- [10] *Хермен Г.* Восстановление изображений по проекциям. Основы реконструктивной томографии. Пер. с англ. М.: Мир, 1983. 352 с.
- [11] ТИИЭР. Труды института инженеров по электротехнике и радиоэлектронике, 1983. Т. 71. № 3. Реконструктивная вычислительная томография. Тематический выпуск. М.: Мир, 1983. 189 с.