01;02;05;11

Простая оценка скоростей волн переключения в сверхпроводящем композите

© И.Б. Краснюк, Ю.В. Медведев

Донецкий физико-технический институт им. А.А. Галкина НАН Украины,
83114 Донецк, Украина
E-mail: Kras@host.dipt.donetsk.ua

(Поступило в Редакцию 13 марта 2000 г.)

Используя следствия фундаментальных результатов по теории систем уравнений параболического типа, проанализированы характер тепловых волн переключения и скорости их распространения вдоль охлаждаемого композитного сверхпроводника в зависимости от размера покрытия композита неэлектропроводной оболочкой, а также величина минимального тока распространения норамальной зоны с учетом локальной нелинейности удельного электросопротивления композита.

Введение

Оценка скорости v волны переключения (NS-границы), разрушающей сверхпроводящие свойства токонесущего элемента, представляет собой один из основных вопросов технической сверхпроводимости [1]. Особый характер эта проблема имеет для композитного сверхпроводника (сверхпроводник с нормальной матрицей) с внешним изолирующим покрытием. Как показано в [2], наличие даже незначительного по своей величине покрытия может приводить к существенному изменению характера тепловых процессов в композитном сверхпроводнике. При оценке v в [2] использовалось модельное представление о независимости электрофизических параметров матрицы от температуры. Это позволило обезразмерить одномерное нестационарное уравнение теплопроводности с источником $Q(T)$ и стоком $W(T)$ тепла и свести задачу к уже известной [3]. Однако общее нелинейное уравнение теплопереноса не допускает глобальных безразмерных комплексов.

Настоящая работа посвящена оценке диапазона изменения скорости распространения тепловых волн переключения с учетом локальной нелинейности удельного электросопротивления $\rho_0(T)$ нормальной проводящей матрицы в окрестности температуры сверхпроводящего перехода сверхпроводящей жилы. При оценке скоростей волн переключения мы воспользовались следствиями фундаментальных результатов по теории распространения волн для систем уравнений параболического типа [4]. Согласно [4], характер возникающих волн (или систем волн) и скорости их распространения можно качественно и количественно проанализировать, если заданы функции источников — стоков $F = Q - W$. Количественное совпадение результатов с результатами, полученными для случая $\rho_0(T) \equiv \text{const}$ [2], наглядно демонстрирует правильность подхода.

Рассмотрим неограниченный охлаждаемый сверхпроводник в нормально проводящей матрице, внешняя поверхность которого окружена неэлектропроводной оболочкой, и предположим, что граничные поверхности образца являются плоскими, а контактное тепловое сопротивление между покрытием и композитом отсутствует [2,3]. Тогда в безразмерных переменных изменение температуры в продольном направлении может быть описано уравнением [2]

$$\left(1 + c\frac{\Delta_i}{\Delta_k}\right)\frac{\partial\Theta}{\partial\tau} = \left(1 + \lambda\frac{\Delta_i}{\Delta_k}\right)\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2} - \frac{\Theta}{\alpha+\beta} + i^2 r(\Theta), \qquad (1)$$

здесь $c = c_i/c_k$, $\lambda = \lambda_i/\lambda_k$, $\Delta_{i,k} = d_{i,k}/L_k$, $\alpha = I_c^2\rho_0/hpS(T_{cb} - T_0)$, $\beta = \Delta_i\Delta_k/\lambda$, где I_c, T_{cb} — критические параметры сверхпроводника [2]; ρ_0 — удельное электросопротивление нормально проводящей матрицы; h — коэффициент теплоотдачи; p — охлаждаемый периметр; S — площадь поперечного сечения; $i = I/I_c$ (I — транспортный ток); c_k, c_i — теплоемкости композита и покрытия; λ_k, λ_i — коэффициенты теплопроводности; d_k, d_i — поперечные размеры композита и покрытия.

Далее,

$$\Theta = (T - T_0)/(T_{cb} - T_0),$$

где T_0 — температура резервуара; $\tau = \lambda_k t/(c_k L_k^2)$, t — время, $x = s/L_k$, и $L_k = [\lambda_k S^2(T_{cb} - T_0)/I_c^3\rho_0]^{1/2}$.

Для функции $r(\Theta)$ мы принимаем обычную модель ступечатого тепловыделения [1–3]

$$r(\Theta) = \left\{\begin{matrix} 1, & \Theta > 1 \\ (\Theta - 1 + i)/i, & 1 - i \le \Theta \le 1 \\ 0, & \Theta < 1 - i \end{matrix}\right\}. \qquad (2)$$

Определение минимальной и максимальной скоростей распространения N-зоны при постоянном удельном электросопротивлении матрицы для модели ступенчатого тепловыделения

Введем обозначение

$$F(\Theta,\alpha,\beta,i) = -\frac{\Theta}{\alpha+\beta} + i^2 r(\Theta) \qquad (3)$$

и определим нули этой функции, поскольку известно [4], что по характеру рассматриваемых систем волн и поведению решений при больших временах все источники $F(\Theta,.)$ можно разбить на три типа, которые определяются поведением функции $F(\Theta)$ в окрестностях нулей $F(\Theta) = 0$; корни последнего уравнения и будут определять стационарные состояния (устойчивые или неустойчивые) динамической системы. Таким образом, новое, что здесь появляется, это зависимость стационарных состояний (точек) не только от плотности тока i (в режиме фиксированного тока), но и от дополнительных параметров α и β (см. определение): это, конечено, должно определять более многообразную динамику поведения системы. Используя (2) и определение $F(\Theta)$, нетрудно найти стационарные состояния:

1) точка $\Theta_1 = 0$ является стационарной при $0 < \Theta < 1 - i$;

2) при $1 - i < \Theta \le 1$ имеем

$$\Theta_2 = (\alpha i - 1)/\big(\alpha i(1-i)\big).$$

В частности, при $\alpha \gg 1$ и/или $i \gg 1$ $\Theta_2 = (1-i)^{-1}$ (так, при $i \to +0$ в силу неравенства $\Theta < 1 - i$ композит переходит в сверхпроводящее состояние $r(\Theta) \equiv 0$ [1]).

3) при $\Theta > 1$ получаем

$$\theta_3 = (\alpha+\beta)\cdot i^2,$$

в частности, $\Theta_3 = \alpha i^2$ при $\alpha \gg \beta$, что совпадает (как и должно быть) с известным результатом [1] для сверхпроводника без покрытия.

Рассмотрим ситуацию, когда функция $F(\Theta)$ при некоторых значениях параметров α, β, i имеет вид, приведенных на рис. 1. Очевидно, что $F(\Theta) < 0$ при $\Theta \in (0, a)$, $F(\Theta) > 0$ при $\Theta \in (0, 1)$, где

$$a = \frac{1-i}{1 - [i(\alpha+\beta)]},$$

и, следовательно, наличие параметров формально сдвигает точку перехода сверхпроводника в N-состояние вправо по температуре.

Для источников на рис. 1 рассматриваемая задача имеет единственное решение — волну, распространяющуюся со скоростью $v > 0$, если выполняется неравенство [3]

$$\int_{\Theta}^{1} F(\Theta)d\Theta > 0$$

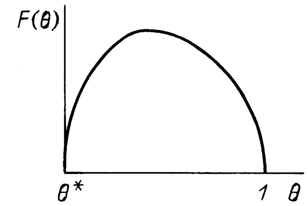

Рис. 1. Графическое решение "по Колмогорову" (1937), когда эволюция профиля температуры (нормальной фазы) стремится при больших временах к простой волне.

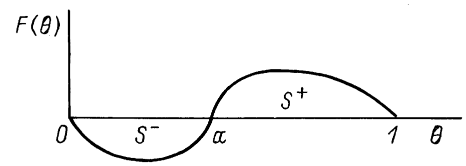

Рис. 2. Стационарные точки бистабильной системы для композитных сверхпроводников, обусловленные наличием тепловой изоляции при сильной температурной зависимости нормальной матрицы $\rho_n(T)$. (S^- — область повышенного теплоотвода).

при всех $\Theta \in (0, 1)$, Простой подсчет показывает, что это возможно, если

$$\Theta > \frac{2(i-1)}{1 - [(\alpha+\beta)i]} = \Theta^*,$$

т.е. при $i > 1$ возникает бегущая волна, характеризующая распространение N-зоны, что очевидно.

На интеграле $(\Theta^*, 1)$ функция F имеет вид, показанных на рис. 2. Здесь эта функция удовлетворяет условиям

$$F(0) = F(1),$$

$$F'(0) > 0 \ \text{ при } \ 0 < u < 1,$$

$$F'(0) = \kappa > 0,$$

$$F'(u) < \kappa \ \text{ при } \ 0 < u \le 1,$$

где $u \to (\Theta - \Theta^*)(1 - \Theta^*)$, т.е. мы пронормировали температурный интервал (левый конец сдвинули в нуль заменой $\Theta \to \Theta - \Theta^*$ и "растянули" в $1 - \Theta^*$ раз).

В таком интервале температур существует единственная скорость распространения нормальной зоны, которая равна [3]

$$\lambda_0 = 2\sqrt{\frac{k\kappa}{C^2}},$$

где через C обозначен общий коэффициент в уравнении (1).

В дальнейшем с целью упрощения выкладок мы будем полагать, что выполняются неравенства

$$c\frac{\Delta_i}{\Delta_k} \ll 1 \ \text{ и } \ \lambda\frac{\Delta_i}{\Delta_k} \ll 1,$$

т.е. влияние внешней оболочки на температурное поле пренебрежимо мало. В частности, при минимальном токе распространения нормальной зоны i_p скорость равна нулю [1,3], и неравенство [1,4]

$$2\sqrt{F'(0,\alpha,\beta,i)} \le v \ll 1.$$

при токах, намного бо́льших, чем $i > i_p$, можно интерпретировать как необходимое (но не достаточное!) условие разрушения сверхпроводимости. Запишем это неравенство в виде

$$-(\alpha+\beta)^{-1} + i \ll 1$$

и определим, полагая правую часть равной нулю, минимальную плотность источкика тока распространения нормальной зоны

$$i_p = \frac{I_c^2\rho_0}{h_p S(T_{cb}-T_0)} + \frac{\Delta_i\Delta_k}{\lambda}.$$

Эту формулу можно использовать для приближенного вычисления плотностей токов $i > i_p$ при достаточно больших (но фиксированных) значениях $\beta > 0$. Общее необходимое условие, очевидно, имеет вид

$$F'(0,\alpha,\beta,1) \ll 1.$$

Для конкретных вычислений мы можем использовать "кривую допустимых параметров" разрушения сверхпроводимости

$$F'(0,\alpha,\beta,i) = 0,$$

которая в самой тривиальной ситуации просто вырождается в определение возникновения нормальной фазы за счет тепловыделения (см. определение $r(\Theta)$).

Продолжим исследование общей ситуации: для $F(u)$ точка $\Theta = \Theta^*$ является неустойчивой, а точка $\Theta = 1$ — устойчивой. Тогда существует константа v_*, такая что (0,1)-волна существует, если и только если $v > v_*$, где число v_* (минимальная скорость) удовлетворяет неравенствам [3]

$$2\sqrt{\kappa} \le v_* \le 2\sqrt{\gamma},$$

где

$$\gamma = \sup\frac{F(u)}{u}, \quad 0 < u < 1,$$

где sup означает точную верхнюю грань максимального значения функции на заданном интервале, который (максимум), вообще говоря, может и не достигаться.

В частности, при выполнении условия $F'(u) < \kappa$, $0 < u < 1$ мы получаем, что $\kappa = \gamma$, т.е. единственую бегущую волну, распространяющуюся со скоростью $2\sqrt{F'(0,\alpha,\beta,i)}$ (см. замену неизвестных функций выше). Заметим, что этот сценарий имеет место на интервале $(\Theta^*, 1)$.

На интервале (0,1), следуя [3], предположим, что $F(u) \le 0$ при достаточно малом u, т.е. в окрестности точки $i = 1$, и $F(u) \ge 0$ при u, достаточно близком к единице. Пусть существуют $(0,\Theta^*)$- и $[\Theta^*, 1]$-волны (S и N — волны соответственно), причем, $v_s < v_n$ есть скорости соответствующих волн. Тогда при выполнении условия $v_s < v_n$ существует $(0,1)$-волна (переключения), которая распространяется с некоторой скоростью $v_s < v < v_n^2$.

В частности, для бистабильных сверхпроводников (для которых в типичных ситуациях S-волна отсутствует, хотя за счет специального режима теплоотвода ее можно было бы и "организовать") существует (при $t \to \infty$) единственная скорость, которая совпадает с минимальной скоростью, в то же время, как известно, мультистабильный сверхпроводник (например, вследствие кризиса кипения охладителя) может находиться в одном из трех устойчивых состояний с различными температурами $T_1 < T_3 < T_5$ (см., например, [4]). Тогда из формальных результатов [3,5] сразу следует, что в интервале температур $T_2 < T < T_4$, где концы интервала являются неустойчивыми стационарными точками, а точка T_3 устойчива, существуют три волны переключения: в интервале $T_2 < T < T_3$ распространяется волна, сходящаяся при $t \to \infty$ к "волне" с постоянной амплитудой [4]; при $T_3 < T < T_4$ имеет место волна, "принимающая" (со временем) температуру T_3, причем стационарное решение $T = T_3$ является устойчивым (поэтому эти волны как бы "схлопываются"). Это напоминает ситуацию, рассмотренную в [1,4], однако при этом точка $T = T_5$ пленочного кипения охладителя [4] отсутствует. Итак, по терминологии [4], имеются две "горячие" (нормальные) фазы, а поскольку при $T = T_3$ сверхпроводник охлаждается в режиме пузырькового кипения [3], то эти фазы и принимают, естественно, при $t \to \infty$ это значение температуры.

Каждая из "горячих" фаз движется с собственной скоростью $v_{N_1} < v_{N_2}$, где v_N — скорость "нормальной" волны в мультистабильном сверхпроводнике [3], но тогда по теореме из [3, теорема 3, с. 338] существует волна, которая движется со скоростью $v_{N_1} < v_N < v_{N_2}$ и является (T_2, T_4)-волной. Такая волна существует тогда и только тогда, когда $v > v_*$, где число v_* (минимальная скорость (T_2, T_3)-волны) удовлетворяет неравенствам

$$2\sqrt{F'(T_2)} \le v_* \le \sqrt{\gamma(T)},$$

причем максимальное значение функции $\gamma(T)$ (см. выше) выбирается на интервале $T_2 < T < T_4$. Ниже будет показано (в достаточно грубом приближении), что этот максимум достигается в точке $\Theta = \Theta_3$. В дальнейшем, не оговаривая это специально, будем считать, что оценка на скорость сверху имеет место только для мультистабильных проводников. Эти утверждения, в том числе терминология, вытекают из результатов, сформулированных в [3, с. 338] .

В дальнейшем с целью упрощения выкладок (и только!) мы ограничимся ситуацией $\Delta_i \ll 1$. Тогда минимальная скорость распространения волн равна

$$v_{\min} = 2\sqrt{-\frac{1}{\alpha+\beta} + i}.$$

В частности, в размерных переменных

$$v_{\dim} = 2\frac{\lambda_k}{c_k L_k}\sqrt{-\frac{1}{\alpha+\beta}+i}.$$

Для сравнения выберем $\Delta_k = 1$, $\Delta_i \sim 5.10^{-2}$, $\lambda = 10^{-3}$. Тогда простой расчет показывает, что $v \simeq 0.5$ (это "точно" соответствует графику, приведенному в работе [2, рис. 2] при значении $i = 0.85$); для остальных значений параметров сравнение анлогично (здесь расчет выполнен для безразмерной скорости). При $\alpha \to \infty$ также имеет место очевидное совпадение с результатами [2] и тоже справедливо при значениях скорости $0 < v < 1$ и в интервалах $10^{-1} < \Delta_i < 10^{-3}$. Наконец,

$$\frac{F(\Theta)}{\Theta} = -\frac{1}{\alpha+\beta} + i - \left[\frac{i(i-1)}{\Theta}\right],$$

причем максимум достигается в точке $\Theta_*^2 = \alpha i(i-1)$ и нетрудно сосчитать, что его значение равно

$$v_{\max}^2 = 2 - \frac{1}{\alpha+\beta} + i - \left.\frac{i(i-1)}{\Theta}\right|_{\Theta=\Theta_*}$$

$$= 2 - \frac{1}{\alpha+\beta} + i - \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\sqrt{i(i-1)}.$$

Так, при $i \gg 1$ (на самом деле, достаточно выбрать $i > 1$) грубо можно сосчитать, что максимум достигается в точке $\Theta = \alpha i^2 - \alpha i = \alpha i^2 = \Theta_3$. Тогда

$$v_{\max} = 2\sqrt{-\frac{1}{\alpha+\beta} + i - \frac{i-1}{\alpha+\beta}} = 2\sqrt{i[1-(\alpha+\beta)^{-1}]}.$$

Очевидно, что $\alpha+\beta > 1$ и при $\beta = 0$ мы получаем, что $v_{\max} = 0$ и резистивное состояние, в котором тепловыделение не разрушает сверхпроводимости, отсутствует: это совпадает с результатом [2, с. 13]

$$v_{\max} = 2\sqrt{-\frac{1}{\alpha+\beta} + i + \frac{i-1}{\alpha i}} \quad \text{при} \quad \Theta = \Theta_*.$$

Так при $\alpha \to \infty$ максимальная скорость совпадает с минимальной. В обозначениях [1] эту формулу можно записать в виде

$$v_{max} = 2\sqrt{-\frac{1}{\alpha_e} + i - \frac{i-1}{\alpha i}}. \tag{4}$$

Напомним, что в [2] получено соотношение:

$$V = \frac{\sqrt{1+\Lambda\Delta_i/\Delta_k}}{1+C\Delta_i/\Delta_k}\left[\frac{\alpha_e i^2 + i - 2}{\alpha_e(\alpha_e i^2 - 1)}\right.$$

$$\left. + \sqrt{\frac{\alpha_e - 1}{\alpha_e}}\left(2 - 2\sqrt{\frac{1-i}{1-i_s}} - \frac{i-i_s}{1-i_s}\right)\right], \tag{5}$$

где $\alpha_e = \alpha + \beta$, $i_s = (\sqrt{1+8\alpha_e} - 1)/2\alpha_e$.

Так, при $\alpha_e \to \infty$ первые члены формул (4) и (5) имеют близкий порядок, второй член имеет порядок величины (i), а третий — величины $(i-1)$, так что можно говорить о качественном совпадении представлений (4) и (5) соответственно, в асимптотическом смысле, т.е. для параметров α и/или $\beta \gg 1$.

Определение скорости распространения N-зоны с учетом локальной нелинейности удельного электросопротивления нормально проводящей матрицы в малой окрестности температуры $T = T_c$

Отметим, что указанные выше результаты справедливы в предположении, что удельное электросопротивление $\rho_0(.)$ постоянно. Если это не так, то необходимо использовать соотношение

$$\rho(T) = \rho_0(T)$$

$$\times \begin{Bmatrix} 1, & T > T_{cb}, \\ (T-T_c)/(T_{cb}-T_c), & T_c \le T \le T_{cb}, \\ 0, & T < T_c = T_{cb} - (T_{cb}-T_0)I/I_c, \end{Bmatrix}$$

и соответственно рассматривать уравнение

$$C_e\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda_e\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{h_e p}{S}(T - T_0) + \frac{I^2}{S^2}\rho(T),$$

коэффициенты которого, следуя [2], мы определим ниже. К сожалению, общее нелинейное уравнение не допускает глобальных безразмерных комплексов. Однако его можно обезразмерить аналогично предыдущему в окрестности каждой из неподвижных точек отображения

$$f(T) = -\frac{h_e p}{S}(T - T_0) + \frac{I^2}{S^2}\rho(T),$$

так что в окрестности каждой из этих точек будет существовать "своя система" безразмерных пространственно-временны́х переменных, инвариантная в окрестности множества от (T_{fix}), где T_{fix} — нули функции $f(T)$.

Поскольку усредненные величины C_e постоянны [1], то, не ограничивая общности, мы можем положить $C_e = 1$, что качественно никак не повлияет на сформулированные ниже результаты, и выполним замену $\hat{T} \to T + T_0$ (в дальнейшем "уголок" будем опускать).

Начнем с ситуации, когда величина $h_e p/S \ll 1$. Тогда достаточно ограничиться источником $f(T) = \frac{I^2}{S^2}\rho(T)$. Удобно положить формально $\rho_0(T_{cb}) = 0$, чтобы не вводить новую функцию $\rho(T) = \rho(T) - \rho_0(T_{cb})$, что определит полученный ниже результат с точностью до константы. Очевидно также (уже не формально), что $\rho(T_c) = 0$. Тогда источник $f(T)$ удовлетворяет, очевидно, следующим условиям:

$$f(T_c) = f(T_{cb}) = 0; \quad f(T) > 0 \ \text{ при } \ T_c < T \ll T_{cb};$$

$$f'(T_c) = \frac{I^2}{S^2}\rho'(T_c) = \alpha > 0.$$

Наконец, пусть $f'(T) < \alpha$ при всех $T_c \le T \le T_{cb}$. Введем обозначение $T = T_c + \Theta(T_{cb} - T_c)$. Тогда последнее условие, которое мы более подробно запишем в виде неравенства

$$\rho_0'(T)\frac{T - T_c}{T_{cb} - T_c} + \frac{\rho_0(T)}{T_{cb} - T_c} < \alpha = \frac{I^2}{S^2}\rho_0'(T_c)$$

и которое с точностью до постоянной (эту постоянную легко определить как решение дифференциального уравнения, т.е. как наибольшую из возможных констант, оценивающих решения дифференциального неравенства) допускает (уравнение) следующее представление:

$$\frac{d\rho(T(\Theta))}{d\Theta} = \frac{d\rho}{dT}\frac{dT}{d\Theta} \leq \frac{dT}{d\Theta}\frac{\rho(T)}{T-T_c}$$
$$= \frac{T_{cb}-T_c}{T-T_c}\rho(T) = \frac{1}{\Theta}\rho(T(\Theta)).$$

Обозначим $\rho(T(\Theta)) = \tilde{\rho}(\Theta)$. Тогда интегрирование дифференциального неравенства

$$\frac{d\tilde{\rho}}{\tilde{\rho}} < \frac{d\Theta}{\Theta}$$

в пределах от Θ_c до Θ, где Θ_c — безразмерная критическая температура, показывает, что сформулированное выше требование $f'(T) < \alpha$ есть просто ограничение на рост функции

$$\tilde{\rho}_0(\Theta) < \frac{\tilde{\rho}_0(\Theta_c)}{\Theta_c}\Theta = \mathrm{const}\,\Theta,$$

т.е. рост нелинейного удельного электросопротивления матрицы по температуре должен быть не выше линейного.

Заметим, что поскольку (формально) $\Theta_c = 0$ при $T = T_c$ (см. выше), а функция $\rho_0(T)$, которую мы рассматриваем, есть не то же, чо функция $\rho(T)$ (см. представление для $\rho(T)$ выше), обладающая свойством $\rho(T_c) = 0$ в отличие от значения $\rho_0(T_c)$, которое вообще говоря, не обязано быть равным нулю, то полученное неравенство в окрестности критической температуры является достаточно "тонким": по существу, чтобы дать оценку роста функции $\rho_0(T)$, мы должны вычислить предел

$$\lim_{T\to T_c}\frac{\rho_0(T_c)}{T_c},$$

который может существовать лишь при условии $\rho_0(T_c) \to 0$ при $T \to T_c$. Тогда, если выполняются условия применимости правила Лопиталя, этот предел равен $\rho_0'(T_c)$ и полученная выше оценка приобретает ясный качественный смысл. Из [3] немедленно следует, что единственная предельная скорость распространения нормальной зоны равна

$$v_p = 2\sqrt{\lambda_e(I^2/S^2)\rho_0'(T_c)} = 2\frac{I}{S}\sqrt{\lambda_e\rho_0'(T_c)}.$$

Учитывая, что $\lambda_e = \lambda_k d_k/d + \lambda_i d_i/d$, где $d = d_k + d_i$, и величины C_e и ρ_e определяются аналогично [1], мы получим качественное совпадение с графиком [2] зависимости скорости распространения нормальной зоны от толщины покрытия Δ_i. Однако их (графиков) наклон теперь необходимо подправить множителем $\rho_0(T_c)$ (ср. с результатами [2]).

Итак, скорость распространения N-зоны уменьшается с возрастанием S— площади поперечного сечения композита и становится тем меньше, чем меньше изменение электросопротивления сверхпроводящего композита.

Учет теплоотвода в композите с локально нелинейным удельным электросопротивлением в окрестности критической температуры

Наконец, чтобы учесть влияние коэффициента теплоотдачи, необходимо выполнить процедуру, рассмотренную вначале. Очевидно, что при $T < T_c$ в силу $T > T_0$ неравенство $f(\Theta) \ll 0$ при достаточно малом $T > 0$ выполняется. Функция $f(T)$ в силу выбора $\rho(T)$ по определению (см. выше) имеет три неподвижные точки, которые определяются из уравнений

$$-\frac{h_e p}{S}(T-T_0) + \frac{I^2}{S^2}\rho(t) = 0 \quad \text{при} \quad T > T_{cb},$$

$$\frac{h_e p}{S}(T-T_0) = 0 \quad \text{при} \quad T < T_{cb}$$

и являются основными точками. Наконец,

$$-\frac{h_e p}{S}(T) + \frac{I^2}{S^2}\rho_0(T)\frac{T-T_c}{T_{cb}-T_c} = 0 \quad \text{при} \quad T_c \leq T \leq T_{cb},$$

эта точка формирует положение фронта нормальной зоны. Тогда минимальная скорость распространения N-зоны равна

$$v_{\min} = 2\sqrt{-\frac{h_e p}{S} + 2\frac{I^2}{S^2}\rho_e'(T_c)},$$

а максимальная скорость равна

$$v_{\max} = 2\sqrt{\sup_{0<T<T_3}\frac{f(T)}{T}} = 2\sqrt{\sup_{0<T<T_3}\left\{-\frac{h_e p}{S} + \frac{I^2}{S^2}\frac{\rho_e(T)}{T}\right\}}$$

при условии, что максимальная верхняя грань sup достигается. Простой анализ показывает, что производная

$$\left(\frac{f(T)}{T}\right)' = \left(\frac{I^2}{S^2}\frac{\rho_e(T)}{T}\right)' - \frac{h_e p}{S}\left(1-\frac{T_0}{T}\right)'$$

равна нулю, если функция $\rho_e(T)$ является решением дифференциального уравнения

$$\frac{I^2}{S^2}\rho'(T) - \frac{I^2}{S^2}\rho(T) - \frac{hpT_0}{S} = 0, \qquad (6)$$

которое удобно записать в виде

$$\frac{I^2\rho'(T)}{hpST_0} - \alpha(T) - 1 = 0,$$

где по определению

$$\alpha(T) = \frac{I^2\rho(T)}{hpST_0}.$$

Тогда легко видеть, что это уравнение принимает вид

$$\alpha'(T) - \alpha(T) - 1 = 0.$$

Заметим, что при $\rho_0(T) = \mathrm{const}$ величина α есть безразмерный параметр Стекли [2], однако в такой общей форме мы не имеем даже представления $\rho(T)$ через функцию $\rho_0(T)$; поэтому мы поступим точно так же, как и выше, т. е. введем формально безразмерную температуру с помощью "априорных" параметров T_c и T_{cb}, так что нам не надо даже выделять величину $\rho_0(T)$, как это сделано в [2] (см. выше). В результате мы получаем цепочку неравенств

$$\frac{d\alpha(T(\Theta))}{d\Theta} = \frac{d\alpha}{dT}\frac{dT}{d\Theta} \leq \frac{dT}{d\Theta}\frac{\alpha(T)}{T - T_c} = \frac{1}{\Theta}\alpha(T(\Theta))$$

(решение ищем с точностью до единицы) и, следовательно,

$$\frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\alpha}_c} < e^{\Theta} - e^{\Theta_c} = e^{\Theta} - 1.$$

В отличие от предыдущей оценки, полученной из решения дифференциального неравенства при условии, что $h_c p(T - T_0)/S \ll 1$, здесь это ограничение снято, поэтому для функции $\rho(T)$ вместо линейного допускается экспоненциальный рост.

Если функция $\tilde{\alpha}(\Theta)$ задана (а следовательно, задана и функция $\rho(T)$), то точки, в которых достигается экстремальное значение величины $f(\Theta)/\Theta$, на заданном интервале определяются как решения функционального уравнения

$$\tilde{\alpha}(\Theta) = \tilde{\alpha}_c(\Theta)(e^{\Theta} - 1),$$

где $\tilde{\alpha}_c(\Theta) = \tilde{\alpha}(\Theta_c)$, $\Theta_c = (T_c - T_0)/(T_{cb} - T_0)$, причем таких точек $\Theta = \Theta_*$ может быть, вообще говоря, и несколько: так, если Θ одна из них, то будет достигаться максимум $f(\Theta)/\Theta$ при выполнении неравенства $\alpha''(\Theta) < 0$; разлагая функцию e^{Θ} в ряд, очевидно, что при этом необходимо минимальное число членов ряда, равное трем. Тогда

$$\alpha(\Theta) = \Theta + \frac{\Theta^2}{2} + \frac{\Theta^3}{3},$$

значит, $\alpha'' = 1 + \Theta$ и, следовательно, при выполнении неравенства $1+\Theta < 0$ достигается максимум. Учитывая, что (см. Введение) $1-i \leq \Theta \leq 1$ (т. е. $2-i \leq 1+\Theta \leq 2$ и, следовательно, $2-i \leq 1+\Theta < 0$), в результате получаем, что $i \geq 2$ или (в обозначениях [2]) $I > 2I_c$.

Итак, интервал допустимых значений возможных скоростей распространения нормальной зоны определяется неравенствами

$$v_{\min} < v < \frac{f(\Theta_*)}{\Theta_*}.$$

Приближение $\rho_0(T) = \mathrm{const}$ приводит к значению Θ_*, которое определяется (с точностью до 1) из уравнения $e^{\Theta} - 1 = \Theta$. Нетрудно также видеть, что должно выполняться неравенство (см. выше)

$$\rho_0(T) >= \frac{h_e}{\lambda_e}\frac{pS}{I^2},$$

т. е. N-зона начинает распространяться в композите, начиная с плотностей токов

$$i^2 > \frac{1}{\rho_0'(T_c)}\frac{pS}{I_c^2}\frac{h_e}{\lambda_e}$$

или при $i^2 > \lambda_e/\alpha$, где

$$\alpha = 1/[\alpha + \rho_0'(T_c)]T_c^2/h_e pS(T_c - T_0),$$

где предполагается, что $T_c = T_{cb}$; и при $\alpha \leq 1$ мы получаем, что $i = i_p = 1/\alpha$. В то же время последняя формула учитывает более тонкий "механизм" разрушения сверхпроводимости.

Эта формула дает примерно такие же зависимости (качественно) величины скорости N-зоны от плотности тока, что и в [2, рис. 1], с той разницей, что величина $h_e pS$, характеризующая теплоотвод через площадь поперечного сечения S, в данной ситуации учитывает (и определяет) профиль наклона кривой $V = V(I)$ от величины транспортного тока. Заметим, что максимальная скорость уже не зависит от коэффициента теплопроводности λ_e. Наконец, поскольку модельная задача изначальна, то для исследования качественного поведения вполне достаточно таких простых оценок.

Отметим, что оценка скорости распространения нормальной зоны формально является тривиальным следствием фундаментальных результатов [4] для получения оценки снизу и известных результатов по теории распространения волн для систем уравнений параболического типа (Вольперт и др.) для оценки скорости сверху.

Указанные результаты мотивированы исследованиями [2], где установлено влияние непроводящей оболочки на скорость необратимого распространения нормальной зоны вдоль охлаждаемого композитного сверхпроводника. По сравнению с известными результатами, то новое, что удалось получить, — это учесть влияние коэффициента теплоотдачи для классической модели ступенчатого тепловыделения, который (коэффициент) теперь зависит от поперечных размеров композита и покрытия, а также оценить интервал допустимых значений скоростей распространения нормальной зоны.

Очевидно, что при $\Theta < 1 - i$ (см. формулу (2)) функция $F(\Theta) = -\Theta/(\alpha + \beta) + i^2 r(\Theta)$ отрицательна, а поскольку уравнение $F(\Theta) = 0$ имеет три корня $\Theta_1 = 0$, Θ_2 и Θ_3, то легко видеть, что по непрерывности она (функция) должна иметь вид, приведенный на рис. 1, следовательно, допускает аппроксимацию вида $f(e) = e(1 - e)(e - a)$, где $0 < a < 1$ и $e = \Theta/\Theta_3$ (мы просто выполнили нормировку на интервал (0,1)). Здесь $a = \Theta_2/\Theta_3$.

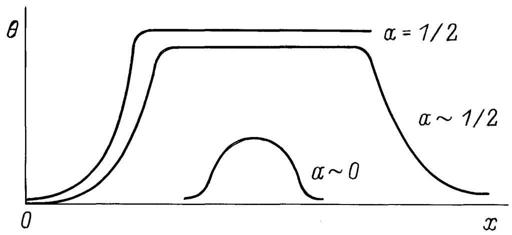

Рис. 3. Начальное возбуждение теплового домена при $a \sim 0$, эволюция теплового домена в окрестности температуры резистивного перехода при $a \sim 1/2$; форма теплового домена при $a = \Theta_2/\Theta_3 \sim 0$, где $\Theta_2 = (\lambda_i - 1)/(\lambda_i(a - i))$ и $\Theta_3 = (\lambda \in \beta)i^2$.

Известно (см., например, [6,7]), что, исследуя волновые решения для уравнения теплопроводности, Хаксли построил решение вида

$$e(x) = [1 + \exp(-x/\sqrt{2})]^{-1},$$

которое показано на рис. 3. В частности, при $a = 1/2$ и $v = 0$ (т.е. при $\Theta_2 = \Theta_3/2$ появляется "отраженное" решение вида $(1 - e)$ одновременно с семейством периодических решений, которые могут быть определены в терминах эллиптических функций [6,7]. Решение Хаксли распространяется со скоростью $v = \sqrt{2}(1/2 - a)$. Маккин [7, с. 146] дал детальную картину поведения решений при $0 < a < 1/2$. Решение Хаксли выходит из точки (0,0) и стремится к точке (1,0) в фазовой плоскости $e = T$ и $e' = T'$ и представляет по существу классический тепловой домен, динамика которого для сверхпроводников подробно исследована в ряде работ [1,4,8].

Список литературы

[1] *Гуревич А.В., Минц Р.Г.* Тепловые автоволны в нормальных металлах и сверхпроводниках. М.: ИВТ СССР, 1987.

[2] *Ожогина В.К., Романовский В.Р.* // ЖТФ. 1998. Т. 68. Вып. 12. С. 95–97.

[3] *Вольперт А.Н.* // Дифференциальные уравнения. Теория вероятностей. М.: Наука, 1988. С. 333–358.

[4] *Пухов А.А.* // Сверхпроводимость: физика, химия, техника. 1993. Т. 6. № 2. С. 235–241.

[5] *Маслов В.П., Данилов В.Г., Волосов К.А.* Математическое моделирование процессов тепломассопереноса. М.: Наука, 1987.

[6] *McKean H.P., Nagumo Jr. Equations* // Adv. in Math. 1970. N 4. С. 209–223.

[7] *Хенри О.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1985.

[8] *Минц Р.Г., Рахманов А.Л.* Неустойчивости в сверхпроводниках. М.: Наука, 1984. 263 с.