01;10

О полной интегрируемости гамильтоновых уравнений движения заряженной частицы в слабонеоднородном магнитном поле

© В.Е. Тарасов, К.Ш. Ходжаев, А.Г. Чирков

Санкт-Петербургский государственный технический университет,
195251 Санкт-Петербург, Россия

(Поступило в Редакцию 16 марта 2000 г.)

С точностью до членов порядка малого параметра включительно получена функция Гамильтона заряженной частицы в слабонеоднородном магнитном поле. Составлены уравнения движения, усредненные по быстрой фазе. Показано, что эти уравнения интегрируются в квадратурах, тем самым задача о движении частицы в слабонеоднородном поле в первом приближении оказывается в принципе решенной. При составлении функции Гамильтона частицы в слабонеоднородном поле используются координаты, связанные с полем, и производится каноническая замена переменных с помощью производящей функции, которая в случае однородного поля приводит к переменным действие–угол. Ранее такая схема была использована в работе [1]. Однако в этой работе не был явно введен малый параметр и не получены окончательные выражения для малой и немалой частей функции Гамильтона. Между тем оказывается, что малая часть функции Гамильтона представляет собой тригонометрический полином относительно быстрой фазы (это может быть существенно при анализе влияния дополнительных возмущений), а усредненные уравнения вполне обозримы и интегрируются в квадратурах.

1. Движение в однородном магнитном поле, косоугольные координаты, переменные действие–угол

Рассмотрим вспомогательную задачу о движении нерелятивистской частицы с массой m и зарядом e в однородном магнитном поле $\mathbf{B} = \text{const}$. Введем аффинные косоугольные координаты x^1, x^2, x^3, так чтобы координата x^3 имела смысл расстояния вдоль силовой линии, отсчитываемого от некоторой плоскости, наклоненной к силовым линиям поля, а векторы $\mathbf{r}_\alpha = \partial\mathbf{r}/\partial x^\alpha$, $\alpha = 1, 2$, где $\mathbf{r}(x^1, x^2, x^3)$ — радиус-вектор точки, были параллельны указанной плоскости. Тогда вектор $\mathbf{r}_3 = \partial\mathbf{r}/\partial x^3 = \mathbf{B}/B$ направлен по силовой линии. Введем векторы $\mathbf{r}^1, \mathbf{r}^2, \mathbf{r}^3$, образующие базис, взаимный базису $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$. Координаты x^1, x^2 предполагаются введенными так, что $|\mathbf{r}^1 \times \mathbf{r}^2| = \mathbf{B}$, и векторный потенциал можно выбрать в виде

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}(x^1\mathbf{r}^2 - x^2\mathbf{r}^1). \qquad (1.1)$$

Примем x^1, x^2, x^3 вместе с отвечающими им обобщенными импульсами p_1, p_2, p_3 за канонические переменные при движении частицы в поле $\mathbf{B}$. Введем еще декартовы координаты x, y, z, так чтобы ось z была направлена по полю, ось y — параллельна $\mathbf{r}^1$, $x, y, z = 0$ при $x^1, x^2, x^3 = 0$. Соотношения, связывающие x, y, z с x^1, x^2, x^3, будут

$$x = \frac{g^{12}}{B\sqrt{g^{11}}}x^1 - \frac{\sqrt{g^{11}}}{B}x^2, \qquad y = \frac{1}{\sqrt{g^{11}}}x^1,$$

$$z = g_{13}x^1 + g_{23}x^2 + x^3, \quad g^{\alpha\beta} = \mathbf{r}^\alpha\mathbf{r}^\beta, \quad g_{\alpha\beta} = \mathbf{r}_\alpha\mathbf{r}_\beta. \qquad (1.2)$$

Далее потребуется производящая функция $W(x^1, x^2, x^3, J, x_L, p_\parallel)$ канонического преобразования от переменных, $x^1, x^2, x^3, p_1, p_2, p_3$ к переменным $\varphi, y_L, z, J, x_L, p_\parallel$, где J, φ — переменные действие–угол; x_L, y_L — величины, определяющие положение центра ларморовской окружности; $p_\parallel$ — проекция механического импульса на направление поля. Функция такого рода приведена в [1], однако она соответствует другому выбору векторного потенциала и записана как функция других аргументов. Найти нужную функцию проще всего так. Рассмотрим известную производящую функцию $W_1(x, y, z, J, x_L, p_\parallel)$ преобразования от x, y, z, p_x, p_y, p_z к $\varphi, y_L, z, J, x_L, p_\parallel$

$$W_1(x, y, z, J, x_L, p_\parallel) = -\frac{1}{2}\Big(m\omega xy - 2\sqrt{m\omega}x_L y - \left(\sqrt{m\omega}x - x_L\right)\sqrt{2J - \left(\sqrt{m\omega}x - x_L\right)^2}\Big) + J\,\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{m\omega}x - x_L}{\sqrt{2J - \left(\sqrt{m\omega}x - x_L\right)^2}} + zp_\parallel. \qquad (1.3)$$

Здесь $\omega = eB/mc$ — ларморовская частота. Функция W получается из W_1, если в последней заменить x, y, z на x^1, x^2, x^3, используя (1.2). Имеем

$$W = (g_{13}x^1 + g_{23}x^2 + x^3)p_\parallel - \frac{e}{2c}x^1\left(\frac{g^{12}}{g^{11}}x^1 - x^2\right) + \frac{x_L\sqrt{m\omega}}{\sqrt{g^{11}}}x^1 + \frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{g^{11}}{m\omega}}\frac{e}{c}\left(\frac{g^{12}}{g^{11}}x^1 - x^2\right) - x_L\right] \times \sqrt{2J - \left[\frac{e}{c}\sqrt{\frac{g^{11}}{m\omega}}\left(\frac{g^{12}}{g^{11}}x^1 - x^2\right) - x_L\right]^2}$$

$$+ J \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{\frac{g^{11}}{m\omega}} \frac{e}{c} \left(\frac{g^{12}}{g^{11}} x^1 - x^2 \right) - x_L}{\sqrt{2J - \left[\sqrt{\frac{g^{11}}{m\omega}} \frac{e}{c} \left(\frac{g^{12}}{g^{11}} x^1 - x^2 \right) - x_L \right]^2}} \right). \quad (1.4)$$

Здесь учтено, что $g_{33} = \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3 = 1$.

2. Координаты, связанные с полем

Рассмотрим частицу в неоднородном магнитном поле $\mathbf{B}$ и введем координаты, связанные с полем, следуя в основном [2]; некоторые дополнения потребуются при введении безразмерных переменных и, главное, при анализе малости. Обозначим через $[L]$ расстояние, на котором существенно меняется поле, а через $[B]$ характерное значение $|\mathbf{B}|$ в рассматриваемой далее области. Тогда характерное значение ларморовской частоты будет $[\omega_L] = e[B]/mc$. Введем безразмерные радиус-вектор, индукцию и время, равные отношениям размерных величин соответственно $[L], [B], 1/[\omega_L]$. Безразмерные векторы обобщенного импульса и векторного потенциала получатся как отношения размерных векторов импульса и потенциала к $m[\omega_L][L]$ и $[B][L]$. Далее за безразмерными переменными сохраняются обозначения соответствующих размерных величин. Поэтому в безразмерных переменных функция Гамильтона частицы запишется в виде

$$H = \frac{1}{2} (\mathbf{p} - \mathbf{A}(\mathbf{r}))^2. \quad (2.1)$$

Обозначим через $[\nu]$ характерное значение скорости частицы в рассматриваемых движениях, а через $[R_L] = [\nu]/[\omega_L]$ — характерный ларморовский радиус. Предположим теперь, что магнитное поле слабо неоднородно, т. е. $[L] \gg [R_L]$, и введем основной малый параметр задачи $\varepsilon = [R_L]/[L]$. Будем рассматривать, как обычно, такие движения (и такие промежутки времени), когда частица остается[1] в трубке силовых линий поля с поперечными размерами порядка $[R_L]$ и длиной порядка $[L]$. Во введенно́м безразмерном векторном пространстве будем иметь тонкую трубку с поперечными размерами $O(\varepsilon)$ и длиной $O(1)$. Допустим, что в этой области могут быть введены криволинейные координаты Q^1, Q^2, Q^3 со следующими свойствами: 1) Q^1, Q^2, Q^3 однозначно характеризуют точку в области; 2) Q^1, Q^2 характеризуют силовую линию в трубке, а Q^3 представляет собой длину дуги этой линии, отсчитываемую от некоторой опорной поверхности; 3) выражение для векторного потенциала имеет вид

$$\mathbf{A} = 1/2 \left(Q^1 \mathbf{r}^2 = Q^2 \mathbf{r}^1 \right),$$

где $\mathbf{r}^i$ — векторы базиса, взаимного к $\mathbf{r}_i = \partial \mathbf{r} / \partial Q^i$, $i = 1, 2, 3$ (о введении таких координат см., например, [2]).

[1] Этому соответствуют времена $\sim 1/\varepsilon$ (см. далее).

Для функции Гамильтона получим выражение

$$H = \frac{1}{2} g^{ik} (P_i - A_i)(P_k - A_k), \quad (2.2)$$

где $g^{ik}(Q^1, Q^2, Q^3) = \mathbf{r}^i \mathbf{r}^k$.

Будем считать Q^1, Q^2 введенными так, что для некоторой силовой линии в трубке $Q^1, Q^2 = 0$ и везде в трубке $Q^1, Q^2 = 0(\varepsilon)$. Малыми порядка ε будут также компоненты векторного потенциала. Кроме того, в рассматриваемых движениях для обобщенных импульсов справедлива оценка

$$[R_L] \sim [\nu]/[\omega_L][L] = [R_L]/[L] = \varepsilon.$$

Введем поэтому новые координаты q^1, q^2, q^3 и новые обобщенные импульсы p_1, p_2, p_3 соотношениями $Q^i = \varepsilon q^i$, $P_i = \varepsilon p_i$. Такое преобразование является каноническим с валентностью $1/\varepsilon^2$; новый гамильтониан будет

$$H(pq) = \frac{1}{2} g^{ik} (p_i - A_i)(p_k - A_k). \quad (2.3)$$

Здесь $A_1 = -1/2q^2$, $A_2 = 1/2q^1$ — компоненты векторного потенциала, отличающиеся от обозначенных теми же символами величин в (2.2) множителем ε, а $g^{ik} = g^{ik}(\varepsilon q^1, \varepsilon q^2, \varepsilon q^3)$ — прежние составляющие метрического тензора, в которых положено $Q^i = \varepsilon q^i$.

В рассматриваемых движениях все канонические переменные, за исключением q^3, а также компоненты векторного потенциала и метрического тензора, величины порядка единицы; q^3 же может принимать большие значения порядка $1/\varepsilon$.

3. Функция Гамильтона в переменных действие–угол невозмущенной задачи

Перейдем от переменных $q^1, q^2, q^3, p_1, p_2, p_3$ к переменным $\varphi, y_L, z, J, x_L, p_\parallel$, используя производящую функцию вида (1.4) с отличиями, вызванными тем, что координаты q^1, q^2, q^3 безразмерные. Но составляющие метрического тензора будут теперь функциями координат. Имеем

$$W = (g_{13} q^1 + g_{23} q^2 + q^3) p_\parallel - \frac{1}{2} q^1 \left(\frac{g^{12}}{g^{11}} q^1 - q^2 \right) + \frac{x_L \sqrt{\omega}}{\sqrt{g^{11}}} q^1 + \frac{1}{2} \left[\sqrt{\frac{g^{11}}{\omega}} \left(\frac{g^{12}}{g^{11}} q^1 - q^2 \right) - x_L \right] \times \sqrt{2J - \left[\sqrt{\frac{g^{11}}{\omega}} \left(\frac{g^{12}}{g^{11}} q^1 - q^2 \right) - x_L \right]^2} + J \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{\frac{g^{11}}{\omega}} \left(\frac{g^{12}}{g^{11}} q^1 - q^2 \right) - x_L}{\sqrt{2J - \left[\sqrt{\frac{g^{11}}{\omega}} \left(\frac{g^{12}}{g^{11}} q^1 - q^2 \right) - x_L \right]^2}} \right). \quad (3.1)$$

В безразмерных координатах $\omega = B$. По определению координаты Q^3 имеем $\mathbf{B} = B\mathbf{r}_3$; с другой стороны, по свойству используемых координат $\mathbf{B} = \mathbf{r}^1 \times \mathbf{r}^2$. Но $\mathbf{r}^1 \times \mathbf{r}^2 = (1/\sqrt{q})\mathbf{r}_3$, где g — определитель, составленный из величин g_{ik}. Отсюда $\omega = 1/\sqrt{g}$

Составим соотношения, связывающие старые и новые переменные. Имеем

$$\varphi = \frac{\partial W}{\partial J} \equiv \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{\frac{g^{11}}{\omega}}\left(\frac{g^{12}}{g^{11}}q^1 - q^2\right) - x_L}{\sqrt{2J - \left[\sqrt{\frac{g^{11}}{\omega}}\left(\frac{g^{12}}{g^{11}}q^1 - q^2\right) - x_L\right]^2}},$$

$$y_L = \frac{\partial W}{\partial x_L} \equiv \sqrt{\frac{\omega}{g^{11}}}q^1 - \sqrt{2J - \left[\sqrt{\frac{g^{11}}{\omega}}\left(\frac{g^{12}}{g^{11}}q^1 - q^2\right) - x_L\right]},$$

$$z = \frac{\partial W}{\partial p_\parallel} \equiv g_{13}q^1 + g_{23}q^2 + q^3. \qquad (3.2)$$

Записывая вторую группу соотношений, выразим после дифференцирования некоторые члены φ, y_L из (3.2). Получим

$$p_k = \frac{\partial W}{\partial q^k} \equiv p_{k0} + p_{k1} = p_{k0} + \frac{\partial g_{13}}{\partial q^k}p_\parallel q_1^1 + \frac{\partial g_{23}}{\partial q^k}p_\parallel q^2$$
$$- \frac{q^1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial q^k}\frac{g^{12}}{g^{11}}\right)\sqrt{\frac{g^{11}}{\omega}}\left(-\sqrt{2J}\cos\varphi + y_L\right)$$
$$- \sqrt{\frac{\omega}{g^{11}}}\left(\frac{\partial}{\partial q^k}\sqrt{\frac{g^{11}}{\omega}}\right)[x_L y_L - 2J\cos\varphi\sin\varphi]. \qquad (3.3)$$

Здесь p_{k0} — выражения, которые получаются после дифференцирования W без учета зависимости метрических коэффициентов от εq^1, εq^2, εq^3,

$$p_{10} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\omega}{g^{11}}}\left(-\sqrt{2J}\sin\varphi + x_L\right) + \frac{1}{2}\frac{g^{12}}{\sqrt{g^{11}\omega}}\left(\sqrt{2J}\cos\varphi - y_L\right) + g_{13}p_\parallel,$$

$$p_{20} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g^{11}}{\omega}}\left(\sqrt{2J}\cos\varphi - y_L\right) + g_{23}p_\parallel,$$

$$p_{30} = p_\parallel. \qquad (3.4)$$

Чтобы получить функцию Гамильтона в новых переменных, нужно иметь выражения старых переменных через новые. Далее функция Гамильтона будет определяться с точностью до членов порядка ε, соответственно с нужной точностью будем выписывать выражения для старых переменных. Из (3.2) имеем

$$q^3 = z - g_{13}q^1 - g_{23}q^2, \qquad (3.5)$$

откуда видно, что координата z велика вместе с q^3. Поэтому величину ω с требуемой точностью можно представить в виде

$$\omega(\varepsilon q^1, \varepsilon q^2, \varepsilon q^3) = \omega(0,0,\varepsilon q^3) + \varepsilon\left(\frac{\partial\omega}{\partial(\varepsilon q^1)}\right)_0 q^1 + \varepsilon\left(\frac{\partial\omega}{\partial(\varepsilon q^2)}\right)_0 q^2$$
$$= \omega(0,0,\varepsilon z) + \varepsilon\left(\frac{\partial\omega}{\partial(\varepsilon q^1)} - g_{13}\frac{\partial\omega}{\partial(\varepsilon q^3)}\right)_0 q^1$$
$$+ \varepsilon\left(\frac{\partial\omega}{\partial(\varepsilon q^2)} - g_{23}\frac{\partial\omega}{\partial(\varepsilon q^3)}\right)_0 q^2$$
$$= \omega_0 + \varepsilon\left((\omega)_1 q^1 + (\omega)_2 q^2\right). \qquad (3.6)$$

Здесь индекс "нуль" означает подстановку $q^1, q^2 = 0$, $\varepsilon q^3 = \varepsilon z$; кроме того, введены обозначения

$$(\omega)_i = \left(\frac{\partial\omega}{\partial(\varepsilon q^i)} - g_{i3}\frac{\partial\omega}{\partial(\varepsilon q^3)}\right)_0; \qquad i = 1,\ 2. \qquad (3.7)$$

Как будет видно далее, соотношения (3.2) достаточно лишь "частично" разрешить относительно q^1, q^2, представив q^1, q^2 в виде

$$q^1 = \sqrt{\frac{g^{11}}{\omega}}\left(\sqrt{2J}\cos\varphi + y_L\right),$$

$$q^2 = \frac{g^{12}}{\sqrt{g^{11}\omega}}\left(\sqrt{2J}\cos\varphi + y_L\right) - \sqrt{\frac{\omega}{g^{11}}}\left(\sqrt{2J}\sin\varphi + x_L\right). \qquad (3.8)$$

Точно также из выражений для p_{i0} не требуется исключать q^1, q^2, q^3. Величины же p_{i1} в (3.2) — малые порядка ε, поскольку содержать производные от составляющих метрического тензора по q^i. Поэтому при вычислении p_{i1} можно подставить в величины g^{ik}, g_{ik} и в их производные по координатам $q^1, q^2 = 0$, $\varepsilon q^3 = \varepsilon z$, а q^1, q^2 взять из (3.8), вычисляя g^{11} и т.д. в том же приближении.

Перейдем теперь к вычислению функции Гамильтона в первом приближении. Внесем в (2.3) приведенные выше выражения. Вначале получим

$$H = \frac{1}{2}g^{ik}(p_{i0} + p_{i1} - A_i)(p_{k0} + p_{k1} - A_k)$$
$$= \frac{1}{2}g^{ik}(p_{i0} - A_i)(p_{k0} - A_k) + g^{ik}p_{i1}(p_{k0} - A_k). \qquad (3.9)$$

Учитывая, что $A_1 = -1/2q^2$, $A_2 = 1/2q^1$, подставим в прервое слагаемое в правой части выражения (3.8). После этого полученное выражение преобразуется тождественно точно так же, как в случае движения в однородном поле; зависимость составляющих метрического тензора от координат здесь не сказывается. В результате получим

$$\frac{1}{2}g^{ik}(p_{i0} - A_i)(p_{k0} - A_k) = \omega J + \frac{p_\parallel^2}{2}. \qquad (3.10)$$

Чтобы выделить в (3.10) немалый член и член порядка ε, достаточно воспользоваться соотношением (3.6). Вычисляя же второе (малое) слагаемое в правой части (3.9), в выражениях для $q^1, q^2, q^{ik}, p_{k0}, A_k$ надо учитывать только немалые члены. Окончательно получим

$$H = H_0+\varepsilon H_1 = \omega_0 J + \frac{p_\parallel^2}{2} + \varepsilon\Big[p_\parallel^2(x_L F_1+y_L F_2) + p_\parallel F_3$$
$$+ p_\parallel(y_L^2 - J)F_4 + p_\parallel x_L y_L F_5 + y_L J F_6 + x_L J F_7$$
$$+ (p_\parallel^2 F_1 + p_\parallel x_L F_9 + p_\parallel y_L F_8 + y_L^2 F_{10} + x_L y_L F_{11} + J F_{12})$$
$$\times \sqrt{2J}\sin\varphi + (p_\parallel^2 F_2 + p_\parallel y_L F_{13} + p_\parallel x_L F_{14} + y_L^2 F_{15}$$
$$+ x_L y_L F_{16} + J F_{17})\sqrt{2J}\cos\varphi + p_\parallel J F_{18}\sin 2\varphi$$
$$+ p_\parallel J F_{19}\cos 2\varphi + J\sqrt{2J}F_{20}\sin 3\varphi + J\sqrt{2J}F_{21}\cos 3\varphi\Big]. \tag{3.11}$$

Здесь введены следующие обозначения для функций аргумента εz:

$$F_1 = -\left(\sqrt{\frac{\omega}{g^{11}}}\frac{\partial g_{23}}{\partial(\varepsilon q^3)}\right)_0,$$

$$F_2 = \left(\sqrt{\frac{g^{11}}{\omega}}\right)_0\left(\frac{\partial g_{13}}{\partial(\varepsilon q^3)} + \frac{g^{12}\partial g_{23}}{g^{11}\partial(\varepsilon q^3)}\right)_0,$$

$$F_3 = \omega_0\left(\frac{\partial g_{23}}{\partial(\varepsilon q^1)} - \frac{\partial g_{13}}{\partial(\varepsilon q^2)} + (g_{23}-g_{13})\frac{\partial g_{13}}{\partial(\varepsilon q^3)}\right)_0,$$

$$F_4 = -\frac{1}{2}\left(\frac{g^{11}}{\omega}\right)_0\left(\frac{\partial}{\partial(\varepsilon q^3)}\frac{g^{12}}{g^{11}}\right)_0,$$

$$F_5 = -\left(\sqrt{\frac{\omega}{g^{11}}}\right)_0\left(\frac{\partial}{\partial(\varepsilon q^3)}\sqrt{\frac{g^{11}}{\omega}}\right)_0,$$

$$F_6 = (\omega)_1\left(\sqrt{\frac{g^{11}}{\omega}}\right)_0 + (\omega)_2\left(\frac{g^{12}}{\sqrt{g^{11}\omega}}\right)_0,$$

$$F_7 = -(\omega)_2\left(\sqrt{\frac{\omega}{g^{11}}}\right)_0,$$

$$F_8 = -\left(g^{11}\left(\frac{\partial g_{13}}{\partial(\varepsilon q^1)} + \frac{g^{12}}{g^{11}}\frac{\partial g_{23}}{\partial(\varepsilon q^1)}\right)\right.$$
$$+ g^{12}\left(\frac{\partial g_{13}}{\partial(\varepsilon q^2)} + \frac{g^{12}}{g^{11}}\frac{\partial g_{23}}{\partial(\varepsilon q^2)}\right)$$
$$\left.+ g^{13}\left(\frac{\partial g_{13}}{\partial(\varepsilon q^3)} + \frac{g^{12}}{g^{11}}\frac{\partial g_{23}}{\partial(\varepsilon q^3)}\right)\right)_0,$$

$$F_9 = \omega_0\left(\frac{\partial g_{23}}{\partial(\varepsilon q^1)} + \frac{g^{12}}{g^{11}}\frac{\partial g_{23}}{\partial(\varepsilon q^3)} + \frac{g^{13}}{g^{11}}\frac{\partial g_{23}}{\partial(\varepsilon q^3)}\right)_0,$$

$$F_{10} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{g^{11}}{\omega}}\right)_0\left(g^{11}\left(\frac{\partial}{\partial(\varepsilon q^1)} + \frac{g^{12}}{g^{11}}\right)\right.$$
$$\left.+ g^{12}\left(\frac{\partial}{\partial(\varepsilon q^3)}\frac{g^{12}}{g^{11}}\right) + g^{13}\left(\frac{\partial}{\partial(\varepsilon q^3)}\frac{g^{12}}{g^{11}}\right)\right)_0,$$

$$F_{11} = \omega_0\left(\left(\frac{\partial}{\partial(\varepsilon q^1)}\sqrt{\frac{g^{11}}{\omega}}\right) + \frac{g^{12}}{g^{11}}\right.$$
$$\left.\times\left(\frac{\partial}{\partial(\varepsilon q^2)}\sqrt{\frac{g^{11}}{\omega}}\right) + \frac{g^{13}}{g^{11}}\left(\frac{\partial}{\partial(\varepsilon q^3)}\sqrt{\frac{g^{11}}{\omega}}\right)\right)_0,$$

$$F_{13} = -\omega_0\left(\frac{\partial g_{13}}{\partial(\varepsilon q^2)} + \frac{g^{12}}{g^{11}}\frac{\partial g_{23}}{\partial(\varepsilon q^2)}\right.$$
$$\left.- g_{23}\frac{\partial g_{13}}{\partial(\varepsilon q^3)} - \frac{g_{23}g^{12}}{g^{11}}\frac{\partial g_{23}}{\partial(\varepsilon q^3)}\right)_0,$$

$$F_{14} = \left(\frac{\omega}{g^{11}}\right)_0\left(-\frac{\partial g^{23}}{\partial(\varepsilon q^2)} + g_{23}\frac{\partial g_{23}}{\partial(\varepsilon q^3)}\right)_0,$$

$$F_{15} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{g^{11}}{\omega}}\right)_0\left(-\left(\frac{\partial}{\partial(\varepsilon q^2)}\frac{g^{12}}{g^{11}}\right) + g_{23}\left(\frac{\partial}{\partial(\varepsilon q^3)}\frac{g^{12}}{g^{11}}\right)\right)_0,$$

$$F_{16} = \left(\frac{\omega}{g^{11}}\right)_0\left(-\left(\frac{\partial}{\partial(\varepsilon q^2)}\sqrt{\frac{g^{11}}{\omega}}\right) + g_{23}\left(\frac{\partial}{\partial(\varepsilon q^3)}\sqrt{\frac{g^{11}}{\omega}}\right)\right)_0,$$

$$F_{12} = F_7 + F_{20}, \qquad F_{17} = -\frac{1}{2}(F_{11} + 3F_{15}) + F_6,$$
$$F_{18} = F_8 + F_{14} - F_5, \qquad F_{19} = F_{13} - F_9 - F_4,$$
$$F_{20} = -\frac{1}{2}(F_{10} + F_{16}), \qquad F_{21} = \frac{1}{2}(F_{11} - F_{15}).$$

4. Применение метода усреднения и интегрирование усредненных уравнений

Рассмотрим уравнения Гамильтона, соответствующие функции Гамильтона (3.11). Малая часть этой функции представляет собой тригонометрический полином относительно φ

$$H_1 = H_{10} + \sum_{k=1}^{3}(H_{1k}\cos k\varphi + H_{1k}^*\sin k\varphi) = H_{10} + H_{11}. \tag{4.1}$$

Уравнения Гамильтона с точностью до членов порядка ε запишутся в виде

$$\dot\varphi = \frac{\partial H}{\partial J} = \omega_0 + \varepsilon\frac{\partial(H_{10}+H_{11})}{\partial J}, \quad \dot J = -\frac{\partial H}{\partial\varphi} = -\varepsilon\frac{\partial H_{11}}{\partial\varphi},$$
$$\dot z = \frac{\partial H}{\partial p_\parallel} = p_\parallel + \varepsilon\frac{\partial(H_{10}+H_{11})}{\partial p_\parallel},$$
$$\dot p_\parallel = -\frac{\partial H}{\partial z} = -\varepsilon J\frac{\partial\omega_0}{\partial(\varepsilon z)},$$
$$\dot y_L = \frac{\partial H}{\partial x_L} = \varepsilon\frac{\partial(H_{10}+H_{11})}{\partial x_L},$$
$$\dot x_L = -\frac{\partial H}{\partial y_L} = -\varepsilon\frac{\partial(H_{10}+H_{11})}{\partial y_L}. \tag{4.2}$$

Существенно, что в функцию Гамильтона переменная z входит только посредством произведения εz. Поэтому в выражении $\partial H/\partial z$ достаточно удержать член

$\partial H_0/\partial z$. Кроме того, в (4.2) можно ввести новую переменную $\zeta = \varepsilon z$, которая с принятой точностью удовлетворяет уравнению $\dot{\zeta} = \varepsilon p_\|$. Присоединяя это уравнение к (4.2) вместо третьего уравнения получим систему с одной быстрой фазой φ, что позволяет использовать метод усреднения. Будем обозначать эволюционные составляющие медленных переменных так же, как сами переменные, что допустимо в первом приближении. Усредненные уравнения получаются отбрасыванием в последних четырех уравнениях (4.2), зависящих от j-членов,

$$\dot{\zeta} = \varepsilon p_\|,$$

$$\dot{p}_\| = -\varepsilon J \frac{\partial \omega_0}{\partial \zeta},$$

$$\dot{y}_L = \varepsilon \left(p_\| F_5 y_L + p_\|^2 F_1 + J F_7 \right),$$

$$\dot{x}_L = -\varepsilon \left(p_\| F_5 x_L + 2 p_\| F_4 y_L + p_\|^2 F_2 + J F_6 \right). \qquad (4.3)$$

Для переменной J получается усредненное уравение $\dot{J} = 0$. Отсюда сразу следует, что с точностью до величин порядка ε на временах порядка $1/\varepsilon$ справедливо соотношение $J = J(0)$, т.е. J является адиабатическим инвариантом (при рассмотрении негамильтоновых уравнений это приходится специально доказывать; см., например, [3]). Поэтому в (4.3) следует считать $J = J(0) = \text{const}$.

Уравнения (4.3) интегрируются в квадратурах. Делается это следующим образом. Первые два уравнения имеют интеграл, представляющий собой закон сохранения энергии частицы, записанный с точностью до немалых членов

$$\frac{1}{2} p_\|^2 + J\omega_0 = h_0. \qquad (4.4)$$

Здесь $h_0 = \text{const}$. Отсюда можно, например, выразить $p_\|$ через ζ

$$p_\| = \sqrt{2(h_0 - J\omega_0)}. \qquad (4.5)$$

Подставив (4.5) в первое уравнение (4.3), придем к квадратуре

$$\int\limits_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{d\xi}{\sqrt{2(h - J\omega_0)}} = \tau - \tau_0, \qquad \tau = \varepsilon t. \qquad (4.6)$$

Обращая (4.6), можно найти $\zeta(\tau)$, а затем $p_\|(\tau)$. После этого для y_L получается линейное уравение первого порядка с известными коэффициентами, которое, очевидно, интегрируется в квадратурах. Найдя $y_L(\tau)$, можно найти $x_L(\tau)$ снова из линейного уравнения первого порядка с известными коэффициентами. Тем самым задача о движении частицы в слабонеоднородном магнитном поле в первом приближении оказывается в принципе решенной. Как выяснилось, это можно сделать без привлечения дополнительных предположений о существовании продольного и поперечного адиабатических инвариантов.

Однако решение конкретных задач может вызвать затруднение при введении координат Q^1, Q^2, Q^3 и вычислении указанных выше квадратур. Первая трудность в принципе исчезает, если можно выписать два интеграла уравнений силовых линий [2]. Но в любом случае расчет нужных геометрических характеристик сильно упрощается тем, что речь идет об области в виде тонкой трубки. Решение же линейных уравнений и вычисление квадратур могут упроститься, если в (4.3) принять ζ за новый аргумент, найти $p_\|(\zeta)$ из (4.5) и искать решения линейных уравнений $y_L(\zeta)$, $x_L(\zeta)$. Квадратуры, дающие зависимость от времени, при этом придется вычислять только в конце решения задачи.

Обычно (см., например, [2,3]) интересуются также случаем, когда на частицу креме силы Лоренца действует на порядок меньшая сила Кулона, порождаемая слабонеоднородным электрическим полем. В этом случае функции Гамильтона вместо (2.3) получим выражение

$$H = \frac{1}{2} g^{ik}(p_i - A_i)(p_k - A_k) - U(\varepsilon q^1, \varepsilon q^2, \varepsilon q^3), \qquad (4.7)$$

где величина U пропорциональна скалярному потенциалу.

После замены переменных в (3.11) добавится слагаемое

$$-U_0 - \varepsilon (U)_1 \sqrt{\frac{g^{11}}{\omega_0}} \left(\sqrt{2J} \cos\varphi + y_L \right) + \varepsilon (U)_2 \left[\frac{g^{12}}{\sqrt{g^{11}\omega_0}} \right.$$

$$\left. \times \left(\sqrt{2J} \cos\varphi + y_L \right) - \sqrt{\frac{\omega_0}{g^{11}}} \left(\sqrt{2J} \sin\varphi + x_L \right) \right]. \qquad (4.8)$$

Здесь

$$U_0 = U(0, 0, \varepsilon z), \ (U)_i = \left(\frac{\partial U}{\partial(\varepsilon q^i)} - g_{i3} \frac{\partial U}{\partial(\varepsilon q^3)} \right)_0, \qquad (4.9)$$

причем обозначения аналогичны (3.6), (3.7).

В результате после усреднения уравнений Гамильтона в первом приближении вместо (4.3) получим

$$\dot{\zeta} = \varepsilon p_\|, \qquad \dot{p}_\| = -\varepsilon \left(J \frac{\partial \omega_0}{\partial \zeta} + \frac{\partial U_0}{\partial \zeta} \right),$$

$$\dot{y}_L = \varepsilon \left(p_\| F_5 y_L + p_\|^2 F_1 + J F_7 + G_1 \right),$$

$$\dot{x}_L = -\varepsilon \left(p_\| F_5 x_L + 2 p_\| F_4 y_L + p_\|^2 F_2 + J F_6 + G_2 \right). \qquad (4.10)$$

Здесь

$$G_1 = \sqrt{\frac{\omega_0}{g^{11}}} (U)_2,$$

$$G_2 = -\sqrt{\frac{g^{11}}{\omega_0}} (U)_1 - \frac{g^{12}}{\sqrt{g^{11}\omega_0}} (U)_2. \qquad (4.11)$$

Первые два уравнения (4.10) имеют интеграл

$$\frac{1}{2}p_{\|}^{2} + J\omega_0 + U_0 = h_0, \qquad (4.12)$$

с помощью которого квадратурой находится связь ζ с τ. Последние два уравнения отличаются от соответствующих уравнений в (4.3) лишь слагаемыми $G_1(\zeta)$, $G_2(\zeta)$ и интегрируются, как указано выше.

Список литературы

[1] *Ступаков Г.В.* // Письма в ЖЭТФ. 1982. Т. 36. Вып. 9. С. 318.

[2] *Нотроп Т.* Адиабатическая теория движения заряженных частиц. М.: Атомиздат, 1967. 127 с.

[3] *Волосов В.М., Моргунов Б.И.* Метод усреднения в теории нелинейных колебательных систем. МГУ, 1971. 507 с.