

## Вклады поляризуемостей в четыре базисные поляризации электромагнитных сред

© Е.Н. Букина, В.М. Дубовик

Объединенный институт ядерных исследований,  
141980 Дубна, Московская область, Россия  
E-mail: bukina@thsun1.jinr.ru

(Поступило в Редакцию 8 февраля 2000 г.)

Перечислены все вклады в четыре базисные плотности распределения поляризации произвольной электромагнитной среды за счет смешанных поляризуемостей вплоть до тензоров четвертого порядка. Рассмотрены конкретные физические примеры.

### Введение

Имеются вещества (например, кристаллические [1]), электромагнитные свойства которых можно описывать преимущественно распределениями диполей. Мультипольное разложение плотности такого распределения имеет ряд отличий от разложения тока зарядов, что приводит к интересным следствиям относительно характера взаимодействий дипольных систем с внешними полями. Полный анализ этих разложений имеет не только академический интерес. Известно [2,3], что в рамках электродинамики Максвелла–Лоренца мультипольное разложение плотности заряда–тока содержит три вида базисных диполей: электрический  $\mathbf{Q}$ , магнитный  $\mathbf{M}$  и (полярный) тороидный  $\mathbf{T}$ . Электромагнитная среда, в которой нет ни свободных, ни связанных зарядов ( $\rho \equiv 0$ ), ни незамкнутых токов ( $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$ ), описывается только магнитными и тороидными поляризациями [4]. При описании распределения намагниченности в ядре Блатт и Вайскопф (см. их книгу [5], в которой цитируются их предшественники), по-видимому, впервые под названием ”индуцированные электрические поперечные моменты” ввели магнитные вклады в тороидальные поляризации. При классификации точечных групп магнитной симметрии кристаллов на выделенность типа симметрии, которым обладает тороидный диполь, указывалось в [6–9]. Магнетики, допускающие существование тороидального упорядочения, были названы тороиками. Примеры магнитных кристаллов, допускающих тороидное упорядочение, приведены в упомянутых выше работах. Из последних работ по экспериментальному изучению тороидной поляризации отметим ее измерения в магнитном пьезоэлектрике  $\text{Ga}_{2-x}\text{Fe}_x\text{O}_3$  [10] и в магнитоэлектрике  $\text{Cr}_2\text{O}_3$  [11].

В 1986 г. в аппарат электродинамики сплошных сред было введено семейство аксиальных тороидных моментов [12].<sup>1</sup> Довольно скоро этим моментам было найдено весьма яркое применение в физике молекул. В 1991 г. было указано [13], что молекулы ряда ароматических соединений (антрацен, фенантрен, пентацен и др.) при кри-

сталлической упаковке могут создать аксиальный тороидный микродиполь за счет упорядочения электрических диполей атомов в составе включенного в сложную молекулу циклического фрагмента бензольного кольца  $\text{C}_6$  (см. рисунок). Это позволило объяснить взаимодействие микрокристаллов ароматических веществ с переменным магнитным полем [14]. Такой необычный вид магнитоэлектрической индукции был назван аромагнетизмом.

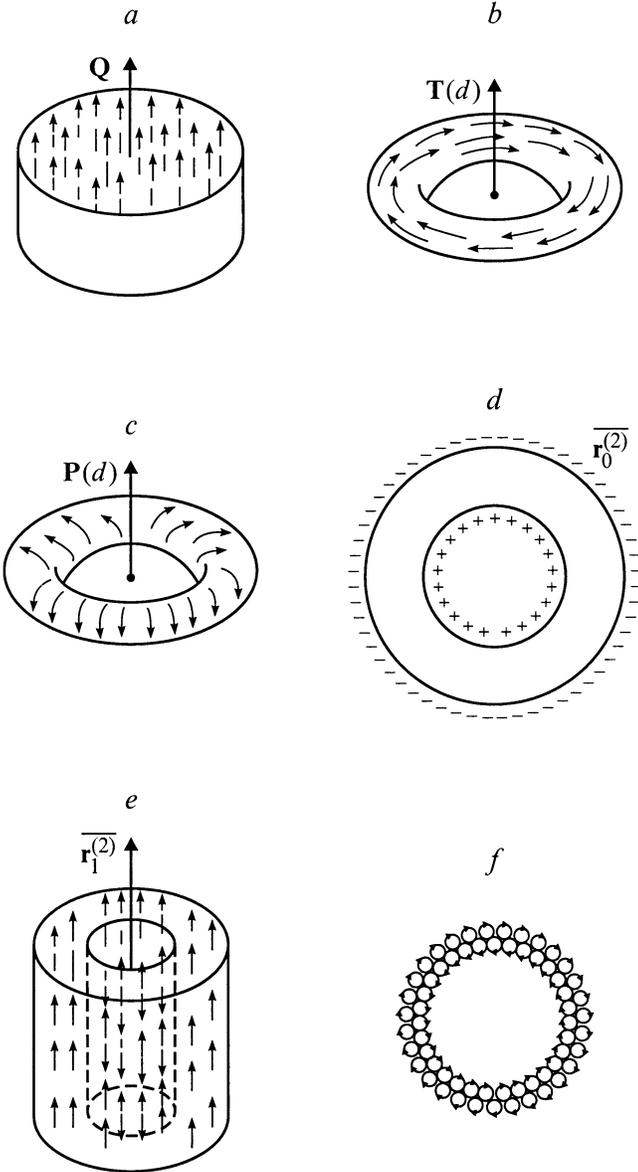
Эти успехи, а также неудовлетворенность современным состоянием теории эффекта Бома–Ааронова [15] и появление его аналогов (см., например, [16]) заставляют более систематически отнестись к вопросам мультипольных представлений различных конфигураций, которые могут возникать, например, в дипольных средах, и к выбору параметров для описания электромагнитных свойств квантовых объектов, например молекул со сложным строением.

В настоящей работе найдены полные наборы базисных диполей для физически наиболее значимых дипольных сред [9]. Далее, исходя из математического факта их существования, указан ряд возможных необычных функций отклика вещества, находящегося в конденсированном состоянии, на неоднородные и/или динамические электрические и магнитные поля. В этом отношении данная работа является развитием [12,17].

### Построение мультипольных моментов для спиновых (дипольных) сред и их взаимодействие с внешними полями

Представим, что имеется некая ”среда” (система) непрерывно распределенных элементарных электрический диполей, которая описывается ограниченной в пространстве функцией  $\mathbf{d} : \mathbf{r} \in V$ , в общем случае зависящей от времени. Допустим, что в такой среде по различным причинам — вследствие внутренних взаимодействий или под влиянием внешних полей могут возникнуть и выстраиваться агрегаты различных конфигураций, состоящие из конечного числа элементарных диполей. Описывая свойства агрегатов с помощью мультипольных параме-

<sup>1</sup> По историческим причинам [8] базисный диполь этого семейства иногда обозначается как  $G$ .



*a* — образец, электрические микродиполи которого составляют его полный электрический дипольный момент  $\mathbf{Q}$ ; *b* — модель аксиального тороидного дипольного момента  $\mathbf{T}^{(d)}$ , реализующаяся в диэлектрической среде, когда электрические микродиполи ориентируются по азимутальным направлениям в некотором физическом объеме тороидальной формы; *c* — модель полоидального дипольного момента  $\mathbf{P}^{(d)}$ , реализующаяся в диэлектрической среде, когда электрические микродиполи ориентируются по меридиональным направлениям в некотором физическом объеме тороидальной формы; *d* — центрально симметричная поляризация сферического диэлектрического слоя, совпадающего по симметрии со сферическим конденсатором; главной мультипольной характеристикой этой конструкции является скалярный момент  $\overline{r_0^{(2)}}$ ; *e* — модель продольного среднеквадратичного радиуса электрического дипольного момента  $\overline{r_1^{(2)}}$  (двойной цилиндрический слой); *f* — экваториальное сечение тонкостенного тора с расположенными на нем по меридианам магнитными микродиполями; при стягивании этой конструкции в точку мультипольной ее характеристикой является полоидальный дипольный момент  $\mathbf{P}^{(\mu)}$ .

тров, выпишем первые члены разложения энергии их взаимодействия с внешними полями

$$\begin{aligned}
 W = & - \int_V \mathbf{d}(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}) d^3 r = \frac{1}{6} \overline{r_0^2} \operatorname{div} \mathbf{E} - \mathbf{Q} \mathbf{E} - \mathbf{T}^{(d)} \operatorname{rot} \mathbf{E} \\
 & - \mathbf{P}^{(d)} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} - \frac{1}{2} Q_{ij} (\nabla_i E_j + \nabla_j E_i) - T_{ij}^{(d)} \nabla_i (\operatorname{rot} \mathbf{E})_j \\
 & + \frac{1}{10} \overline{r_d^2} (\nabla \operatorname{div} \mathbf{E} + \dots) \Rightarrow -\mathbf{Q} \mathbf{E} - \mathbf{T}^{(d)} \operatorname{rot} \mathbf{E} \\
 & + \mathbf{P}^{(d)} (\nabla \rho - \Delta \mathbf{E}) + \dots \Rightarrow -\mathbf{Q} \mathbf{E} + \mathbf{T}^{(d)} \dot{\mathbf{H}} \\
 & + \mathbf{P}^{(d)} (\mathbf{j} - \dot{\mathbf{E}}) + \dots, \quad (1)
 \end{aligned}$$

где  $\mathbf{Q} = \int \mathbf{d}(\mathbf{r}) d^3 r$  — обычный полный электрический дипольный момент системы (см. рисунок, *a*),  $\mathbf{T}^{(d)} = (1/2) \int \mathbf{r} \times \mathbf{d} d^3 r$  — аксиальный тороидный дипольный момент системы (см. рисунок, *b*),  $\mathbf{P}^{(d)} = (1/10) \int [\mathbf{r}(\mathbf{r} \mathbf{d}) - 2r^2 \mathbf{d}] d^3 r$  — полярный полоидальный дипольный момент (см. рисунок, *c*).

Вместе они составляют базисную тройку векторов для разложения плотности распределения данного вида. Кроме них в (1) имеются  $\overline{r_0^2} = \int \mathbf{r} \mathbf{E} d^3 r$  — скалярный момент, который в разложении тока соответствует временной производной от среднеквадратичного радиуса заряда, т.е. двойному сферическому слою (см. рисунок, *d*);  $\overline{r_d^2} = \int [2\mathbf{r}(\mathbf{r} \mathbf{E}) + r^2 \mathbf{E}] d^3 r$  — среднеквадратичный радиус продольной части дипольного момента  $\mathbf{Q}$ , который образуется двойным цилиндрическим слоем диполей (см. рисунок, *e*);  $Q_{ij}$  и  $T_{ij}^{(d)}$  — электрический и тороидальный квадрупольные моменты, определяемые по обычным правилам. Все взаимодействия мультипольных характеристик с полем или производными от него в выражении (1) локальны и относятся к некоторой средней точке: "центру" системы.

Если же взаимодействие  $\mathbf{d} \mathbf{E}$  заменить на  $\boldsymbol{\mu} \mathbf{H}$ , то первые члены разложения энергии взаимодействия распределения плотности магнитных диполей с внешним неоднородным магнитным полем принимают вид

$$\begin{aligned}
 W = & - \int \boldsymbol{\mu}(\mathbf{r}) \mathbf{H}(\mathbf{r}) d^3 r = -\mathbf{M} \mathbf{H} - \mathbf{T}^{(\mu)} \operatorname{rot} \mathbf{H} \\
 & - \mathbf{P}^{(\mu)} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{1}{2} M_{ij} (\nabla_i H_j + \nabla_j H_i) \\
 & - T_{ij}^{(\mu)} \nabla_i (\operatorname{rot} \mathbf{H})_j + \dots \Rightarrow -\mathbf{M} \mathbf{H} - \mathbf{T}^{(\mu)} \dot{\mathbf{E}} \\
 & - \mathbf{P}^{(\mu)} (\operatorname{rot} \mathbf{j} - \dot{\mathbf{H}}) \Rightarrow -\mathbf{M} \mathbf{H} - \mathbf{T}^{(\mu)} \operatorname{rot} \mathbf{H} \\
 & + \mathbf{P}^{(\mu)} \Delta \mathbf{H}^{\text{своб}} + \dots \quad (2)
 \end{aligned}$$

Видим, что, согласно дуальности электромагнетизма, момент  $\mathbf{Q}$  в (1) заменяется на магнитный дипольный

<sup>2</sup> Такую конфигурацию в частном случае при равном нулю внутреннем радиусе иногда называют "ежом".

момент  $\mathbf{M}$ , характеризующий эквивалентную рамку с током,  $\mathbf{T}^{(d)}$  — на полярный тороидный диполь  $\mathbf{T}^{(\mu)}$ , а векторный полоидальный дипольный момент  $\mathbf{P}^{(d)}$  — на аксиальный  $\mathbf{P}^{(\mu)}$ . Когда носителями магнитных моментов являются спиновые частицы, например нейтроны, то мультипольное разложение распределения их магнитных моментов (например, в ядре или в нейтронной звезде) получает первичный смысл. В теории конденсированного состояния вещества на возможность тороидального упорядочения спиновых магнитных моментов в перовскитах впервые указывалось в [6]. Упорядочение же магнитных частиц в сверхтонких пленках в замкнутых конфигурациях, которые можно описывать тороидными моментами, по-видимому, вообще представляет собой общий случай [18,19]. Отметим, что обменные взаимодействия между спинами, расположенными на плоскости, также приводят к известной решетке вихрей Кестерлица–Таулеса, расположенных в "антитороидном" порядке.

Разложения, подобные (1) и (2), очевидно, можно выполнить для двух оставшихся фундаментальных (тороидных) дипольных распределений  $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{r})$  и  $\mathbf{g}(\mathbf{r})$ . Полученные в результате таких разложений вихри высокого порядка вряд ли реализуются в кристаллических веществах. Для их образования нужны экзотические среды, в которых элементарные носители уже обладают, например, тороидными диполями. Отметим, что последние эксперименты указывают, что нейтрино — видимо майорановские частицы и образуют среды высокой плотности ( $10^{15} \text{ см}^{-3}$ ). Известно [20,21], что такие нейтрино обладают только тороидными дипольными моментами. На возможность когерентных возбуждений, в такой среде, обеспечивающих возбуждение между адронами на уровне гравитационных, было впервые указано в [22].

## Векторные параметры и нелинейные среды

Изложенный выше материал относится к так называемой линейной электродинамике. Согласно ее уравнениям, элементарные объекты, например диполи, управляются полем какого-либо типа или током при контактном взаимодействии и не меняют при этом своих параметров. Кроме диполей можно ввести и более сложные объекты, составленные из диполей: квадруполь, октоуполь и т.д. Простейшие макроскопические конструкции такого рода можно представить, например, в виде двух или трех токовых петель, расположенных вблизи друг друга или связанных в единый контур. Рассмотрим, например, проволочное кольцо, изогнутое в форме пропеллера. При прохождении по такому кольцу тока каждая из петель создает магнитное поле, и мы можем приближенно описывать их магнитные свойства с помощью магнитных моментов. Тогда энергия локальных взаимодействий этих двух петель с внешним магнитным полем произвольной конфигурации записывается так:

$$W_L = \mu_i H_i \{1\} + \mu_k H_k \{2\}. \quad (3)$$

Под локальностью подразумевается отнесенность вводимых введенной энергии к центрам петель. Введем теперь кроме векторов  $\mu_i$  и  $\mu_k$ , которые, относясь к различным петлям, приписаны к различным точкам пространства  $\{1\}$  и  $\{2\}$ , квадрупольный момент системы в виде симметричного тензора второго ранга  $\mu_{ik}$ . Как и в предыдущем разделе, параметр  $\mu_{ik}$  учитывает вклад в энергию, создающийся за счет градиента налагаемого на систему внешнего магнитного поля, т.е. за счет неоднородности поля между центрами петель. Тогда выражение (3) можно приближенно переписать в виде

$$W_L = \mu_i H_i \{0\} + \mu_k H_k \{0\} + \mu_{ik} \nabla_i H_k \{0\}. \quad (4)$$

Видим, что теперь все члены разложения отнесены к некоторой средней точке, которую мы называем центром системы и в таком представлении энергии взаимодействия и состоит вся суть мультипольного разложения.

Предположим теперь, что материал, из которого сделаны петли, гибок и магнитное поле, ориентирующее магнитные моменты может деформировать контуры петель. Это возмущение мы можем учесть введением квадрупольной поляризуемости системы  $\alpha^{(m)}$ . Дополнительная энергия локального взаимодействия системы с магнитным полем описывается уже нелинейным по полю выражением

$$W_{NL} = \alpha_{ik}^{(m)} H_i H_k \{0\}. \quad (5)$$

Таким образом, мы получаем новое качество в изучении свойств системы диполей. Обобщая, скажем, что наложение поля  $H_i$  индуцирует в среде дополнительную магнитную дипольную поляризацию  $M_k = \alpha_{ik}^{(m)} H_i$ , которая в свою очередь способна взаимодействовать с полем  $H_k$ . Здесь  $\alpha_{ik}^{(m)}$  будем называть квадратичной магнитной восприимчивостью среды.

Итак, мы ввели нелинейное взаимодействие, учитывающее нелинейный отклик среды на магнитное поле. В принципе тензор  $\alpha$  может иметь произвольное количество индексов, и в выражении для энергии он должен быть свернут с соответствующим симметричным тензором, составленным из вектора напряженности внешнего магнитного поля. Естественно, что деформации, подобные описанным для системы магнитных диполей, может испытывать и система, составленная из электрических диполей. В этом случае выражения для энергии их взаимодействия с внешним электрическим полем будут совершенно идентичны введенным выше, а магнитную восприимчивость в них мы заменим на электрическую  $\alpha^e$ . Поскольку реальные системы, из которых состоит любая среда, — это атомы и молекулы, находящиеся в состоянии непрерывной внутренней и внешней динамики, то вследствие взаимосвязей источников через поля возможны и смешанные поляризуемости, например магнитоэлектрические с энергией взаимодействия,

$$W_{NL} = \beta_{ijk}^{(em)} E_i H_j H_k. \quad (6)$$

Имея в виду организацию компьютерной памяти, введем поляризуемость третьего ранга, отвечающую симме-

трии эффекта Холла, и соответственно энергию взаимодействия

$$W_{NL} = \frac{1}{c} \alpha_{ikl}^{(em)} E_i H_k J_l, \quad (7)$$

где  $J_l$  — внешний ток, протекающий через рассматриваемую систему.

В частности, этот ток может быть током смещения, что реализуется, когда изучаемая система размещается в поле конденсатора. Будем считать, что тензор  $\alpha_{ikl}^{(em)}$  — асимметричен по индексам  $i$  и  $k$ . Тогда в тензоре  $E_i H_k$  можно выделить только асимметричную часть, и мы в праве для конкретной экспериментальной ситуации связать с ним вектор Умова–Пойнтинга для света, проходящего через кристалл с подобающими нелинейными свойствами. По аналогии с предыдущими рассуждениями мы можем ввести индуцированную тороидную поляризацию

$$T_i = \frac{1}{c} \alpha_{[ik]l}^{(em)} E_i H_k \equiv \alpha_{jl}^{(em)} S_j, \quad (8)$$

которая откликается на проходящий через кристалл ток  $J_l$ . Действительно, электромагнитная волна, проходя, например, через ферромагнитный диэлектрик, может в принципе совершать в нем переориентацию поляризации, превращая его в слабый ферромагнетик, обладающий тороидной поляризацией. Конкретно такими свойствами могут обладать различные перовскиты, манганиты [23] и другие достаточно сложные соединения.

Экспериментаторы при измерении тороидной поляризации кристаллов, естественно, поступают проще. Например, в [10] изучался отклик монокристалла Fe–Ga-оксида на магнитное поле. Известно, что у такого материала ферромагнитные свойства сочетаются с пьезоэлектрическими (вспомните аналогию с упругими петлями). В эксперименте измерялась величина индуцированной электрической поляризации при наложении на кристалл магнитного поля  $\mathbf{H}$

$$P_i = \alpha_{ij}^{(em)} H_j, \quad (9)$$

где тензор  $\alpha_{ij}^{(em)}$  называется тензором магнитоэлектрической восприимчивости.

Асимметричная часть тензора  $\alpha_{ij}^{(em)}$  как раз и определяет тороидный дипольный момент согласно соотношению дуальности

$$\alpha_{ij}^{(em)} - \alpha_{ji}^{(em)} = \epsilon_{ijk} T_k, \quad (10)$$

где  $\epsilon_{ijk}$  — симметричный единичный тензор Леви–Чивита.

Поляризация, приходящаяся на одну элементарную ячейку кристалла изучаемого оксида, привела к значению тороидного дипольного момента равного  $|\mathbf{T}|24\mu_B \text{ \AA}$ . Аналогичный эффект был получен для магнитоэлектрика  $\text{Cr}_2\text{O}_3$ , помещенного в сильное магнитное поле, превышающее поле спин-флор перехода.

## Вклады поляризуемостей в векторные поляризации сред и их мультипольные разложения

В настоящем разделе мы разовьем полный формализм вкладов высших (смешанных) поляризуемостей в четыре базисные плотности распределения поляризации произвольной среды:  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{T}^{(\mu)}$  и  $\mathbf{T}^{(d)}$ . В принципе, производя далее мультипольные разложения этих полных выражений для энергии их взаимодействий с внешними поляризациями, мы получим обобщение предыдущих формул на случай нелинейных сред. В соответствии с фундаментальными взаимодействиями каждой из поляризаций введем поляризуемости, учитывающие все возможные варианты индуцирования данной поляризации внешними полями и токами. Обозначая количество свернутых индексов в каждом члене точками, выпишем самые общие выражения для электрической поляризации с учетом всех вкладов вплоть до четвертого порядка

$$\begin{aligned} \mathbf{P} = & \alpha_2^{(e)} \cdot \mathbf{E} + \alpha_3^{(e)} : \mathbf{E}\mathbf{E} + \alpha_4^{(e)} : \mathbf{E}\mathbf{E}\mathbf{E} + \dots + \alpha_3^{(em)} : \mathbf{E}\mathbf{H} \\ & + \alpha_4^{(em)} : \mathbf{E}\mathbf{E}\mathbf{H} + \dots + \beta_2^{(m)} \cdot \mathbf{H} + \beta_3^{(m)} : \mathbf{H}\mathbf{H} \\ & + \beta_4^{(m)} : \mathbf{H}\mathbf{H}\mathbf{H} + \dots + \beta_3^{(me)} : \mathbf{H}\mathbf{E} + \beta_4^{(me)} : \mathbf{H}\mathbf{H}\mathbf{E} + \dots \\ & + \gamma_2^{(\tau)} \cdot \mathbf{J}^{(m)} + \gamma_3^{(\tau)} : \mathbf{J}^m \mathbf{J}^m + \gamma_4^{(\tau)} : \mathbf{J}^m \mathbf{J}^m \mathbf{J}^m + \dots \\ & + \gamma_3^{(e\tau)} : \mathbf{E}\mathbf{J}^m + \gamma_3^{(m\tau)} : \mathbf{H}\mathbf{J}^m + \dots + \gamma_4^{(em\tau)} : \mathbf{E}\mathbf{H}\mathbf{J}^m + \dots \\ & + \delta_2^{(\tau)} \cdot \mathbf{J}^e + \delta_3^{(\tau)} : \mathbf{J}^e \mathbf{J}^e + \delta_4^{(\tau)} : \mathbf{J}^e \mathbf{J}^e \mathbf{J}^e + \dots \\ & + \delta_3^{(e\tau)} : \mathbf{E}\mathbf{J}^e + \delta_3^{(m\tau)} : \mathbf{H}\mathbf{J}^e + \dots + \delta_4^{(em\tau)} : \mathbf{E}\mathbf{H}\mathbf{J}^e + \dots, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $\mathbf{J}^m := 1/c(\mathbf{j} + \mathbf{D}) \equiv \text{rot } \mathbf{H}$ ;  $\mathbf{J}^e := \text{rot } \mathbf{E}$ ; числа при поляризуемостях обозначают их тензорный ранг, и можно перейти к неприводимым тензорам, например, вводя полусумму и полуразность  $\alpha_3^{(em)}$  и  $\beta_3^{(me)}$  и т.п., для магнитной поляризации

$$\begin{aligned} \mathbf{M} = & \hat{\alpha}_2^{(m)} \cdot \mathbf{H} + \hat{\alpha}_3^{(m)} : \mathbf{H}\mathbf{H} + \hat{\alpha}_4^{(m)} : \mathbf{H}\mathbf{H}\mathbf{H} + \dots \\ & + \hat{\alpha}_3^{(em)} : \mathbf{H}\mathbf{E} + \hat{\alpha}_4^{(em)} : \mathbf{H}\mathbf{E}\mathbf{E} + \dots + \hat{\beta}_2^{(e)} \cdot \mathbf{E} + \hat{\beta}_3^{(e)} : \mathbf{E}\mathbf{E} \\ & + \hat{\beta}_4^{(e)} : \mathbf{E}\mathbf{E}\mathbf{E} + \dots + \hat{\beta}_3^{(me)} : \mathbf{E}\mathbf{H} + \hat{\beta}_4^{(me)} : \mathbf{E}\mathbf{H}\mathbf{H} + \dots \\ & + \hat{\gamma}_2^{(\tau)} \cdot \mathbf{J}^{(m)} + \hat{\gamma}_3^{(\tau)} : \mathbf{J}^m \mathbf{J}^m + \hat{\gamma}_4^{(\tau)} : \mathbf{J}^m \mathbf{J}^m \mathbf{J}^m + \dots \\ & + \hat{\gamma}_3^{(e\tau)} : \mathbf{H}\mathbf{J}^m + \hat{\gamma}_3^{(m\tau)} : \mathbf{E}\mathbf{J}^m + \dots + \hat{\gamma}_4^{(em\tau)} : \mathbf{H}\mathbf{E}\mathbf{J}^m + \dots \\ & + \hat{\delta}_2^{(\tau)} \cdot \mathbf{J}^e + \hat{\delta}_3^{(\tau)} : \mathbf{J}^e \mathbf{J}^e + \hat{\delta}_4^{(\tau)} : \mathbf{J}^e \mathbf{J}^e \mathbf{J}^e + \dots \\ & + \hat{\delta}_3^{(e\tau)} : \mathbf{E}\mathbf{J}^e + \hat{\delta}_3^{(m\tau)} : \mathbf{H}\mathbf{J}^e + \dots + \hat{\delta}_4^{(em\tau)} : \mathbf{E}\mathbf{H}\mathbf{J}^e + \dots; \end{aligned} \quad (12)$$

для тороидной поляризации магнитного происхождения

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_M = & \tilde{\alpha}_2^{(\tau)} : J^m + \tilde{\alpha}_3^{(\tau)} : J^m J^m + \tilde{\alpha}_4^{(\tau)} : J^m J^m J^m + \dots \\
& + \tilde{\alpha}_3^{(\tau e)} : J^m E + \tilde{\alpha}_4^{(\tau e)} : J^m E E + \dots + \tilde{\beta}_2^{(e)} : E + \tilde{\beta}_3^{(e)} : E E \\
& + \tilde{\beta}_4^{(e)} : E E E + \dots + \tilde{\beta}_3^{(e\tau)} : E J^m + \tilde{\beta}_4^{(e\tau)} : E E J^m + \dots \\
& + \tilde{\gamma}_2^{(m)} : H + \tilde{\gamma}_3^{(m)} : H H + \tilde{\gamma}_4^{(m)} : H H H + \dots \\
& + \tilde{\gamma}_3^{(\tau m)} : J^m H + \tilde{\gamma}_3^{(\tau e)} : J^m E + \dots + \tilde{\gamma}_4^{(\tau m e)} : J^m H E + \dots \\
& + \tilde{\delta}_2^{(\tau)} : J^e + \tilde{\delta}_3^{(\tau)} : J^e J^e + \tilde{\delta}_4^{(\tau)} : J^e J^e J^e + \dots \\
& + \tilde{\delta}_3^{(e\tau)} : E J^e + \tilde{\delta}_3^{(m\tau)} : H J^e + \dots + \tilde{\delta}_4^{(m e\tau)} : E H J^e + \dots ;
\end{aligned} \quad (13)$$

для тороидной поляризации электрического происхождения

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_p = & \tilde{\alpha}_2^{(\tau)} : J^e + \tilde{\alpha}_3^{(\tau)} : J^e J^e + \tilde{\alpha}_4^{(\tau)} : J^e J^e J^e + \dots \\
& + \tilde{\alpha}_3^{(\tau e)} : J^e E + \tilde{\alpha}_4^{(\tau e)} : J^e E E + \dots + \tilde{\beta}_2^{(e)} : E + \tilde{\beta}_3^{(e)} : E E \\
& + \tilde{\beta}_4^{(e)} : E E E + \dots + \tilde{\beta}_3^{(e\tau)} : E J^e + \tilde{\beta}_4^{(e\tau)} : E E J^e + \dots \\
& + \tilde{\gamma}_2^{(m)} : H + \tilde{\gamma}_3^{(m)} : H H + \tilde{\gamma}_4^{(m)} : H H H \\
& + \tilde{\gamma}_3^{(\tau m)} : J^e H + \tilde{\gamma}_3^{(\tau e)} : J^e E + \dots + \tilde{\gamma}_4^{(\tau m e)} : J^e H E + \dots \\
& + \tilde{\delta}_2^{(\tau)} : J^m + \tilde{\delta}_3^{(\tau)} : J^m J^m + \tilde{\delta}_4^{(\tau)} : J^m J^m J^m + \dots \\
& + \tilde{\delta}_3^{(e\tau)} : E J^m + \tilde{\delta}_3^{(m\tau)} : H J^m + \dots + \tilde{\delta}_4^{(m e\tau)} : E H J^m + \dots
\end{aligned} \quad (14)$$

Нетрудно учесть в этих выражениях для данного рассматриваемого кристалла дуальные симметрии, которые приведут к равенствам типа  $\beta_2^{(m)} = \hat{\beta}_2^{(e)}$ ,  $\tilde{\delta}_2^{(\tau)} = \tilde{\delta}_2^{(\tau)}$  и т. п. Все вклады в поляризации, содержащие векторы  $J^m$  и  $J^e$ , называют нелокальными, и в последнее время экспериментаторы научились их измерять в некоторых случаях отдельно от локальных эффектов [24]. Естественно, что в приведенных выше формулах часть векторов напряженностей можно заменить на их производные. Ранг поляризуемостей при этом возрастет, и эти вклады в соответствующие поляризации также будем называть нелокальными. Возможны и другие нелинейные кросс-счлены, кроме магнитоэлектрических: механомагнитные, термоэлектрические др.

Теперь произведем мультипольные разложения векторных поляризаций сред с учетом свойств их поляризуемости. Для этого воспользуемся формулами для энергии взаимодействия этих поляризаций с внешними полями (1) и (2). Начнем с анализа электрической поляризации. Присутствие в выражении для поляризации вектора электрической напряженности модифицирует определение мультипольных моментов, например, электрический

дипольный момент  $\mathbf{Q} = \int \mathbf{P}(\mathbf{r}) d^3 r$  получит добавки за счет поляризуемостей  $\alpha_2^{(e)}$ ,  $\alpha_3^{(e)}$ ,  $\dots$ ,  $\gamma_4^{(em\tau)}$ ,  $\dots$ . Приведем для примера вклад от  $\alpha_3^{(e)}$

$$\mathbf{Q}_3^{(e)} = \alpha_3^{(e)} : \int E E d^3 r. \quad (15)$$

Такой вклад может быть достаточно велик, если среда обладает сильными нелинейными свойствами и величина  $\alpha_3^{(e)}$  существенна. Кроме того, этот вклад может усиливаться и за счет интеграла. Переходя в сферическую систему координат, мы можем переписать его в виде

$$\int E_i E_k d^3 r = \int E^2 r^2 dr \int n_i n_k d\Omega, \quad (16)$$

где  $\mathbf{n} = \mathbf{E}/|\mathbf{E}|$ .

Такие интегралы часто встречаются в электродинамике и статистической механике и их значения находятся согласно общей формуле

$$\begin{aligned}
& \int \underbrace{n_i n_j n_k \dots n_l}_L \\
& = \frac{1}{L!} \{ \delta_{ij} \delta_k \dots \delta_{\dots l} - \delta_{ik} \delta_j \dots \delta_{\dots l} + \dots \}. \quad (17)
\end{aligned}$$

При наличии дополнительных условий типа  $\text{div } \mathbf{E} = 0$  или  $\text{div } \mathbf{H} = 0$  взятие таких интегралов усложняется. В физическом эксперименте налагаемые на кристалл поля могут иметь разное происхождение, в частности, могут иметь разную частоту. Так, электрооптический эффект Покельса, обычно называемый линейным, есть эффект второго порядка, так как является результатом одновременного воздействия электрического поля низкой частоты и световой волны, в которой существенной обычно является электрическая составляющая. Знаменитый эффект Керра обычно называют квадратичным, поскольку показатель преломления кристалла пропорционален квадрату смещающего низкочастотного поля, однако по числу полей, стоящих в выражении для энергии взаимодействия, этот эффект, вообще говоря, третьего порядка. Следует также различать статический и динамический эффекты. При изучении механизмов динамических эффектов учитывать суммовые и разностные частоты и от их надлежащего выбора может сильно зависеть величина эффекта.

Нетрудно выписать формулу для  $\mathbf{Q}$ , учитывающую все нелинейные локальные вклады, используя выражение (11). В поляризациях (11)–(14) нелокальные поляризуемости будем обозначать теми же буквами, что и прежде, но заглавными. Тогда, например, вклад за счет нелокальной поляризуемости второго ранга в дипольный момент будет выглядеть так:

$$\mathbf{Q}_3^{(e)} = A_3^{(e)} : \int \nabla E d^3 r. \quad (18)$$

Тензор под интегралом можно, естественно, разбить на неприводимые части. Тогда след его, равный  $\text{div } \mathbf{E}$ , сведется к распределению плотности внешнего заряда, симметричная часть фиксирует квадрупольные свойства действующего на систему электрического поля, а антисимметричная — аксиальные свойства этого поля.

## Заключение

Не представляет большого труда развить полный формализм подобных мультипольных разложений. Полная параметризация выражения для энергии взаимодействия какой-либо поляризации с внешним полем окажется кубической решеткой, заполняющей пространство, вообще говоря, неограниченно, например, в положительных направлениях осей  $X$ ,  $Y$  и  $Z$ . На оси  $X$ , которую будем считать главной, расположим, анализируя какую-либо сложную электромагнитную систему, значения описывающих ее моментов в порядке возрастания  $l$ -польности. В направлении оси  $Y$  будем фиксировать значения вкладов  $2n$ -степенных радиусов распределения каждого момента в порядке возрастания степени  $n$ . Напомним, что мультипольный анализ в его математической подоплеке основывается на теории обобщенных функций и, несмотря на общепринятые заблуждения о доминировании моментов, величины радиусов могут оказаться гораздо более существенными при описании какой-либо конкретной системы. Так, эллипсоидальный двойной слой с небольшим эксцентриситетом прежде всего описывается среднеквадратичным зарядовым радиусом, а потом уже электрическим квадрупольным моментом. С геометрической же точки зрения радиусы описывают меру отклонения каждого  $l$ -польного момента от задания его в точке с актуально нулевыми размерами [25]. Далее, и моменты, и радиусы, как мы видим из материала этой работы, могут иметь поправки за счет нелинейности взаимодействия изучаемой системы с внешним полем. Эти поправки можно расположить вертикально, параллельно оси  $Z$ , в порядке возрастания числа индексов у тензоров поляризуемости, над каждой позицией матрицы, фиксирующей значения моментов или радиусов.

Отметим, что в большинстве экспериментов по изучению свойств системы обычно используются либо статические, либо изменяющиеся со временем гармонические поля. Мы обращаем внимание на то, что для выявления вихревых структур первого порядка — тороидных диполей "чистую" функцию отклика (без примеси других мультипольных взаимодействий) мы будем получать, накладывая на изучаемую систему поля, растущие линейно во времени. Для выявления вкладов полоидальных диполей (назовем их вихревыми структурами второго порядка или 2-торами [26]) надо накладывать на систему магнитное поле, растущее во времени квадратично (и т. д. соответственно порядку  $n$ -тора). Естественно, что величина отклика будет стремительно падать с возраста-

нием порядка  $n$  из-за наличия релятивистского фактора  $(1/c)^n$  в энергии взаимодействия  $n$ -тора с внешним полем.

Подчеркнем, что выделение векторных вкладов наиболее удобно для экспериментаторов при анализе, например, кристаллических объектов малых размеров. Еще более наглядно применение этой методики при исследовании электромагнитных откликов низкоразмерных структур, применяемых в нанотехнологиях.

Авторы благодарны МНТП "Фундаментальная метрология" за поддержку этой тематики по соглашению 2.51.

## Список литературы

- [1] Венецьев Ю.Н., Гагулин В.В., Любимов В.Н. Сегнетомагнетики. М.: Наука, 1982. 224 с.
- [2] Дубовик В.М., Чешков А.А. // Физ. элем. частиц и ат. ядра (ЭЧАЯ). 1974. Т. 5. № 3. С. 791–837.
- [3] Дубовик В.М., Тосунян Л.А. // Физ. элем. частиц и ат. ядра (ЭЧАЯ). 1983. Т. 14. № 5. С. 1193–1228.
- [4] Дубовик В.М. // Теоретико-групповые методы в физике. Труды третьего семинара. Т. 2. М.: Наука, 1986. С. 356–362.
- [5] Блатт Дж., Вайскопф В. Теоретическая ядерная физика. М., 1960.
- [6] Желудев И.С. // Изв. АН. Сер. Физ. 1969. Т. 33. № 2. С. 204–206.
- [7] Schmid H. // Int. J. Magnetism. 1973. Vol. 4. P. 337.
- [8] Ascher E. // Magnetoelectric Interaction Phenomena in Crystals / Ed. A. Freeman, H. Schmid. New York, 1975. P. 69.
- [9] Дубовик В.М., Кротов С.С., Тугушев В.В. // Кристаллография. 1987. Т. 32. № 3. С. 540–549.
- [10] Попов Ю.Ф., Звездин А.К., Кадомцева А.М. и др. // ЖЭТФ. 1998. Т. 114. Вып. 1(7). С. 263–272.
- [11] Попов Ю.Ф., Кадомцева А.М., Звездин А.К. и др. // Письма в ЖЭТФ. 1999. Т. 69. Вып. 4. С. 302–306.
- [12] Дубовик В.М., Тосунян Л.А., Тугушев В.В. // ЖЭТФ. 1986. Т. 63. Вып. 2. С. 590–605.
- [13] Марценюк М.А., Марценюк Н.М. // Письма в ЖЭТФ. 1991. Т. 53. Вып. 5. С. 229–232.
- [14] Толстой Н.А., Спартаков А.А. // Письма в ЖЭТФ. 1990. Т. 52. Вып. 3. С. 796–798.
- [15] Афанасьев Г.Н. // Физика. ЭЧАЯ. 1990. Т. 21. Вып. 1. С. 172–240.
- [16] He X.G., McKellar V.H.J. // Phys. Rev. 1993. Vol. A47. P. 3424–3429. Афанасьев Г.Н. // Физика. ЭЧАЯ. 1993. Т. 24. Вып. 2. С. 512–593.
- [17] Дубовик В.М., Марценюк М.А., Марценюк Н.М. // Физика элем. частиц и ат. ядра (ЭЧАЯ). 1993. Т. 24. Вып. 4. С. 1056–1132.
- [18] Филиппов Б.Н., Корзунин Л.Г. и др. // ФММ. 1999. Т. 87. № 6. С. 17–23.
- [19] Usov N.A. // J. Mag. and Mag. Mat. 1999. Vol. 203. P. 277–279.
- [20] Dubovik V.M., Kuznetsov V.E. // J. Mod. Phys. A. 1998. Vol. 143. N 30. P. 5257–5277.
- [21] Bukina E.N., Dubovik V.M., Kuznetsov V.E. // Phys. Lett. B. 1998. Vol. 435. N 1–2. P. 134–138.
- [22] Кориюкин В.М. // Изв. вузов. Физика. 1996. № 10. С. 119–120.

- [23] *Sandraskii L.M. and Kübler J.* // Phys. Rev. Lett. 1996. Vol. 76. P. 4963–4966.
- [24] *Драчев В.П., Перминов С.В., Раутиан С.Г., Сафонов В.П.* // Письма в ЖЭТФ. 1981. Т. 68. Вып. 8. С. 618–622.
- [25] *Dubovik V.M., Tugushev V.V.* // Phys. Rep. 1990. Vol. 187. N 4. P. 145–202.
- [26] *Afanasiev G.N., Dubovik V.M.* // Phys. Elem. Part. and At. Nucl. (Particles & Nuclei). 1998. Vol. 29. N 4. P. 891–945.