01

О природе эффекта Ааронова–Бома

© А.Г. Чирков,[1] А.Н. Агеев[2]

[1] Санкт-Петербургский государственный технический университет,
195251 Санкт-Петербург, Россия
[2] Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН,
194021 Санкт-Петербург, Россия

(Поступило в Редакцию 31 марта 2000 г.)

Показано, что причиной эффекта Ааронова–Бома может являться присутствие в общей структуре потенциалов нулевых полей. Если физический смысл для полевых потенциалов $\mathbf{A}^f$ имеет магнитное поле $\mathbf{B} = \mathrm{rot}\mathbf{A}^f$, то для потенциалов нулевого поля $\mathbf{A}^0$ физический (калибровочно-инвариантный) смысл имеет циркуляция $\oint\limits_C \mathbf{A}^0 d\mathbf{r}$.

Введение

В 1939 и 1949 г. [1,2] был предсказан, а в 1959 г. [3] независимо переоткрыт и более подробно теоретически исследован своеобразный квантовомеханический эффект. Сущность его заключалась в том, что квантовая заряженная частица, движущаяся в области, где отсутствует постоянное магнитное (или электрическое) поле, но вектор-потенциал (или скалярный потенциал) отличен от нуля, испытывает электромагнитное воздействие. Понимание сущности эффекта Ааронова–Бома (ЭАБ) вырабатывалось в ходе длительной дискуссии [4,5], но до сих пор в физической литературе появляются неточные, а иногда и неверные утверждения по этой проблеме. Необходимым условием существования ЭАБ является наличие неустранимых калибровочными преобразованиями потенциалов, не создающих электромагнитных полей. Поскольку такие потенциалы должны иметь вид

$$\mathbf{A}^0 = \mathrm{grad}\Psi, \quad \varphi^0 = -\frac{1}{c}\frac{\partial\Psi}{\partial t}$$

("потенциалы нулевого поля"), то функцию Ψ практически во всех работах стали, вообще говоря, незаконно отождествлять с функцией градиентного преобразования потенциалов, что и приводило к парадоксу как в классическом, так и в квантовом случае: "... мы можем сохранить существующую локальную теорию, если будем рассматривать $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ как физическую переменную. Это значит, что мы должны быть способны обнаружить физическое различие между двумя квантовыми состояниями, которые различаются только калибровкой" [3]. В работах, посвященных ЭАБ, необходимое условие его существования практически не обсуждалось. В стационарном случае обычно ограничивались утверждением о том, что для существования ЭАБ необходима "нетривиальная топология области, где распространяется заряженная частица" [6].

После убедительных экспериментов Тономуры с сотрудниками [7] возможности исследований стационарного ЭПБ были, по-видимому, исчерпаны, и физики обратились к изучению нестационарного ЭАБ [8–12]. В работах [8,9] рассматривался вопрос о возможности наблюдения квазиЭАБ при наличии только полевых потенциалов. В работах [10–12] задавался переменный магнитный поток, а соответствующие поля и потенциалы не обсуждались. Тем не менее вопрос о происхождении и структуре полей является главным для выделения ЭАБ. Действительно, как было показано (см., например, [13]) что, за АЭБ в стационарном случае ответственны именно потенциалы нулевого поля, изменяющие только фазу волновой функции. Необходимым условием существования ЭАБ является присутствие в общей структуре потенциалов нулевого поля, неустронимых калибровочным преобразованием.

Понятие потенциалов нулевого поля ("избыточных потенциалов") было впервые введено для решения краевых задач электродинамики анизотропных сред [14–16] и практически неизвестно в физической литературе. Так, авторы [17] утверждают, что в анизотропных средах "вектора электрического и магнитного поля не удается выразить через векторные потенциалы". Традиционный подход в задачах этого типа состоял в использовании в качестве неизвестных функций напряженностей электрического и магнитного полей или пропорциональных им векторных потенциалов в отсутствие скалярных (кулоновская калибровка). Как оказалось, при таком подходе в силу самой структуры уравнений Максвелла в анизотропных средах исключалась возможность удовлетворения граничным условиям (см. раздел 2).

Впервые академик А.Н. Тихонов в 1959 г. предложил использовать электромагнитные потенциалы с отличным от нуля скалярным потенциалом с целью регулярного удовлетворения граничным условиям [18]. В результате развития этих идей возник общий метод решения краевых задач электродинамики анизотропных сред, получивший название метода избыточных потенциалов [14–16,19], основная идея которого состоит в использовании потенциалов, не создающих электромагнитного поля для регулярного удовлетворения граничным условиям. Основные результаты этого метода приведены в разделах 1, 2. Однако, как настаивали сами авторы, "эти потенциалы реального смысла не имеют, ибо они, являясь прямым следствием калибровочной инвариантности, порождают нулевые электромагнитные поля" [19].

Как показано в разделе 5, потенциалы нулевого поля, вообще говоря, отличаются от калибровочного преобразования, хотя и имеют одинаковый вид. Тот факт, что два отношения эквивалентности для векторных потенциалов $\mathbf{A}$ и A' ($\mathrm{rot}\mathbf{A} = \mathrm{rot}\mathbf{A}'$ и $\mathbf{A} - \mathbf{A}' = \mathrm{grad}\chi$), вообще говоря, не совпадают, был, по-видимому, впервые отмечен в работе [20] и строго доказывается в теории когомологий [21].

1. Потенциалы нулевого поля в одноосной диэлектрической среде

Рассмотрим анизотропную диэлектрическую среду с тензором диэлектрической проницаемости $\hat{\varepsilon} = \mathrm{diag}(\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon_1)$, т.е. одноосную среду, являющуюся простейшим частным случаем однородной анизотропной среды.

Уравнения Максвелла свободного поля, записанные для электромагнитных потенциалов, имеют вид (калибровка не фиксирована)

$$\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\mathbf{A} - \Delta\mathbf{A} + \frac{\mu}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\hat{\varepsilon}\mathbf{A} + \frac{\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t}\hat{\varepsilon}\,\mathrm{grad}\varphi = 0, \qquad (1a)$$

$$\mathrm{div}\left[\hat{\varepsilon}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} + \mathrm{grad}\varphi\right)\right] = 0 \qquad (1b)$$

или в проекциях на главные оси анизотропии

$$-\frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} + \frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial x\partial z} + \frac{\mu\varepsilon}{c}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial x} = 0, \qquad (2a)$$

$$\frac{\partial^2 A_x}{\partial y\partial x} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} + \frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2 A_y}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y\partial z} + \frac{\mu\varepsilon}{c}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial y} = 0, \qquad (2b)$$

$$\frac{\partial^2 A_x}{\partial z\partial x} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z\partial y} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\mu\varepsilon_1}{c^2}\frac{\partial^2 A_z}{\partial t^2} + \frac{\mu\varepsilon_1}{c}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial z} = 0, \qquad (2c)$$

$$\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial^2 A_x}{\partial x\partial t} + \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial^2 A_y}{\partial y\partial t} + \frac{\varepsilon_1}{c}\frac{\partial^2 A_z}{\partial z\partial t} + \varepsilon\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \varepsilon\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \varepsilon_1\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0. \qquad (2d)$$

Для исследования системы (2) используем метод Четаева [16,19]. Определитель системы (2), составленный из операторных коэффициентов этой системы, оказывается тождественно равным нулю, что означает линейную зависимость уравнений в системе (2). В этом случае одно из уравнений, например последнее, может быть отброшено. Решая оставшуюся систему по правилам Крамера, находим уравнения дифференциальных связей между неизвестными функциями

$$\frac{\partial}{\partial x_0}LL_2\mathbf{A} = -\nabla LL_2\varphi, \qquad (3)$$

где $x_0 = ct$, а операторы L, L_2 имеют вид

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial x_0^2}, \qquad (4a)$$

$$L_1 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \mu\varepsilon_1\frac{\partial^2}{\partial x_0^2}, \qquad (4b)$$

$$L_2 = L_1 - \left(1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\right)\frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \mu\varepsilon_1\frac{\partial^2}{\partial x_0^2}. \qquad (4c)$$

Из соотношений (3) следует, что общие потенциалы $\mathbf{A}$, φ представимы в виде сумм $\mathbf{A} = \mathbf{A}^f + \mathbf{A}^0$ и $\varphi = \varphi^f + \varphi^0$, где части $\mathbf{A}^f$, φ^f, создающие поля, независимо от калибровки удовлетворяют основному (дисперсионному) уравнению

$$LL_2\mathbf{A}^f = 0, \quad LL_2\varphi^f = 0. \qquad (5)$$

В свою очередь слагаемые $\mathbf{A}^0$, φ^0, тождественно удовлетворяющие системе (2), но не удовлетворяющие (5), связаны условием

$$\frac{\partial\mathbf{A}^0}{\partial x_0} + \mathrm{grad}\varphi^0 = 0,$$

т.е. они не порождают полей.

В квантовых задачах учет потенциалов нулевого поля приводит, так же как и в стационарном случае Ааронова–Бома, только к изменению фазы волновой функции. Поэтому присутствие в общей структуре потенциалов нулевого поля есть необходимое условие существования эффекта Ааронова–Бома.

В изотропном случае ($\varepsilon_1 = \varepsilon$) каждая декартова компонента векторного потенциала является независимым решением волнового уравнения. Для удовлетворения граничным условиям необходимо три независимых решения [9]. Следовательно, система граничных условий оказывается замкнутой. В анизотропном случае это не так: введение потенциалов нулевого поля становится необходимым для удовлетворения граничным условиям. Более подробно это положение будет разъяснено в следующем разделе.

2. Общие представления векторного потенциала в одноосной среде

Для доопределения системы (2) заменим в ней последнее уравнение линейным уравнением общего вида [19]:

$$L_x A_x + L_y A_y + L_z A_z + L_0 \varphi = 0, \tag{6}$$

являющимся наиболее общим условием калибровки (L_k — линейные операторы дифференцирования по координате x_k). Вычисляя определитель, получившейся системы, находим, что потенциалы должны удовлетворять уравнениям

$$LL_2 S\mathbf{A} = 0, \quad LL_2 S\varphi = 0, \tag{7}$$

где оператор

$$S = \frac{\partial}{\partial x} L_x + \frac{\partial}{\partial y} L_y + \frac{\partial}{\partial z} L_z - \frac{\partial}{\partial x_0} L_0.$$

Таким образом, общее представление потенциалов имеет вид $\mathbf{A} = \mathbf{A}^f_{(1)} + \mathbf{A}^f_{(2)} + \mathbf{A}^0$, где

$$L\mathbf{A}^f_{(1)} = 0, \quad \mathbf{A}^f_{(2)} = 0, \quad S\mathbf{A}^0 = 0, \tag{8}$$

причем потенциалы должны удовлетворять дополнительному условию

$$\frac{\partial \mathbf{A}^0}{\partial x_0} + \mathrm{grad}\varphi^0 = 0,$$

т.е. $\mathbf{A}^0 = \mathrm{grad}\Psi$, $\varphi^0 = -\partial\Psi/\partial x_0$, где Ψ — произвольная дифференцируемая функция.

Последнее уравнение в (8) называется избыточным [19].

Положим $L_\alpha = e_{\alpha\beta}\partial/\partial x_\beta$ $(\alpha, \beta = x, y, z)$, $L_0 = \mu\partial/\partial x_0$. Тогда уравнение (6) можно записать в виде обобщенного условия Лоренца

$$\mathrm{div}\hat{e}\mathbf{A}^f + \mu\frac{\partial \varphi^f}{\partial x_0} = 0, \tag{9}$$

а оператор избыточного уравнения

$$S = \mathrm{div}\hat{e}\mathrm{grad} - \mu\frac{\partial^2}{\partial x_0^2}. \tag{10}$$

Выбирая тензор $\hat{e}$ в виде

$$\hat{e} = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{e}, \frac{1}{e}, \frac{1}{e_1}\right),$$

получим

$$S = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{e}{e_1}\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \mu e\frac{\partial^2}{\partial x_0^2}. \tag{10a}$$

При $e = e_1 = \varepsilon$ избыточный оператор S совпадает с L, а в случае $e = \varepsilon_1$, $e_1 = \varepsilon$ имеем $S = L_2$. Первый случай совпадает с оптимальным калибровочным условием Четаева [19], а второй — Тихонова [18]. В этих и только в этих случаях избыточное уравнение появляется, маскируясь под одно из уравнений второго порядка, на которое распадается основное уравнение [19]. При условии $e = e_1 = \varepsilon$ общая система (2) принимает вид

$$LA^f_x = 0, \qquad LA^f_y = 0, \tag{11a, 11b}$$

$$L_2 A^f_z = \left(1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\right)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{A^f_x}{\partial x} + \frac{A^f_y}{\partial y}\right), \tag{11c}$$

откуда следует, что

$$A^{f(2)}_x = 0, \quad A^{f(2)}_y = 0, \quad A^f_z = A^{f(1)}_z + A^{f(2)}_z, \tag{12}$$

причем $LA^{f(1)}_z = 0$, $L_2 A^{f(2)}_z = 0$ в соответствии с (8). Из последних уравнений в (11), (12) следует уравнение

$$L_2 A^{f(1)}_z = \left(1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\right)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A^{f(1)}_x}{\partial x} + \frac{\partial A^{f(1)}_y}{\partial y}\right). \tag{13}$$

Из (13) с учетом калибровки Четаева следуют равенство

$$\frac{\partial A^{f(1)}_z}{\partial x_0} + \frac{\partial \varphi^{f(1)}}{\partial z} = 0, \tag{14}$$

т.е. $A^{f(1)}_z$ и $\varphi^{f(1)}$ совпадают с потенциалами нулевого поля, а поэтому $A^{f(1)}_z = 0$, что приводит к условию

$$\frac{\partial A^{f(1)}_x}{\partial x} + \frac{\partial A^{f(1)}_y}{\partial y} = 0. \tag{15}$$

Окончательно общее представление векторного потенциала в одноосной среде при калибровочном условии Четаева (для A_k, $\varphi \sim e^{i\omega t}$) имеет вид [19]

$$A_x = A^{f(1)}_x + \frac{1}{ik_0}\frac{\partial \varphi^{(1)}_0}{\partial x}, \tag{16a}$$

$$A_y = A^{f(1)}_y + \frac{1}{ik_0}\frac{\partial \varphi^{(1)}_0}{\partial y}, \tag{16b}$$

$$A_z = Z^{f(1)}_z + \frac{1}{ik_0}\frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial z}, \tag{16c}$$

где $k_0 = \omega/c$ и $\omega^{(1)}_0$ удовлетворяют избыточному уравнению $L\varphi^{(1)}_0 = 0$.

Полученное общее представление потенциалов (16) позволяет решать краевые задачи электродинамики одноосных сред. Однако по сравнению со случаем изотропной среды появилось дополнительное условие (15), которым связаны компоненты $A^{f(1)}_x$ и $A^{f(1)}_y$, но только компонентами полевых потенциалов удовлетворить граничным условиям нельзя. Действительно, пусть, например, требуется решить обобщение задачи Фока–Зоммерфельда о поле диполя для анизотропного полупространства. В этом случае необходимо определить семь функций:

три компоненты A_x^0, A_y^0, A_z^0 векторного потенциала в вакууме ($z < 0$), три компоненты $A_x^{f(1)}$, $A_y^{f(1)}$, $A_z^{f(1)}$ векторного потенциала и функцию $\varphi_0^{(1)}$ в анизотропном полупространстве ($z > 0$), ограниченных в бесконечности. Для обеспечения граничных условий мы располагаем четырнадцатью постоянными. Для их определения мы имеем семь уравнений ограниченности на бесконечности. Еще три уравнения дает требование непрерывности компонент векторного потенциала при $z = 0$. Два уравнения дает непрерывность нормальных производных тангенциальных составляющих векторного потенциала. Одно уравнение дает условие связи компонент $A_x^{f(1)}$ и $A_y^{f(1)}$ (15). Кроме того, следует учесть условие возбуждения поля Тихонова (скачок нормальной производной той проекции векторного потенциала, которая параллельна направлению тока), учитывающее наличие диполя.

Таким образом, очевидно, что только введение потенциалов нулевого поля позволяет единственным образом решить эту задачу. В свою очередь это означает, что наряду с полевыми потенциалами единственным образом (в данной калибровке) определяются и потенциалы нулевого поля.

3. Связь потенциалов нулевого поля с калибровочным преобразованием

Пусть исходные потенциалы $\mathbf{A}$, φ связаны общим калибровочным соотношением (6):

$$\sum_{k=1}^{3} L_k A_k + L_0\varphi = 0, \quad \varphi = -L_0^{-1}\sum_{k=1}^{3} L_k A_k, \qquad (17)$$

а новые потенциалы $\mathbf{A}'$, φ' — другим условием

$$\sum_{k=1}^{3} L'_k A'_k + L'_0\varphi' = 0, \quad \varphi' = -(L'_0)^{-1}\sum_{k=1}^{3} L'_k A'_k, \qquad (18)$$

где L_k, L'_k, L_0, L'_0 — произвольные линейные операторы с постоянными коэффициентами.

Электомагнитные поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$, как известно, не изменяются при калибровочном преобразовании

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \mathrm{grad}\chi, \quad \varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\chi}{\partial t}.$$

Подставляя эти выражения в (18), придем к уравнению

$$\sum_{k=1}^{3} L'_k\frac{\partial\chi}{\partial x_k} - \frac{1}{c}L'_0\frac{\partial\chi}{\partial t} = -\sum_{k=1}^{3}(L'_k - L'_0 L_0^{-1}L_k)A_k. \qquad (19)$$

Последнее уравнение представляет собой условие, которому с необходимостью должна удовлетворять функция калибровочного преобразования χ, если потенциалы связаны различными калибровочными соотношениями (17), (18), которое в общем случае не совпадает с избыточным уравнением $S\Psi = 0$. Только в том частном случае, когда рассматриваются ограниченное калибровочное преобразование $L_k = L'_k$, $L_0 = L'_0$, уравнение (19) совпадает с избыточным.

Далее следует учесть, что добавляемый $\mathrm{grad}\,\chi$ должен быть градиентом от однозначной функции (что всегда выполняется в односвязной области), так как только в этом случае совпадают циркуляции векторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}'$, т. е.

$$\oint \mathbf{A}d\mathbf{l} = \oint \mathbf{A}d\mathbf{l}. \qquad (20)$$

Таким образом, равенства $\mathrm{rot}\,\mathbf{A} = \mathrm{rot}\,\mathbf{A}'$ и $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \mathrm{grad}\,\chi$ оказываются эквивалентными только в односвязной области [21]. Последнее условие (20) характеризует глобальные свойства векторных полей $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}'$ в отличие от дифференциальных свойств, характеризующих их локальные свойства.

Таким образом, даже в том случае, когда избыточное уравнение для потенциалов нулевого поля совпадает с уравнением для функции калибровочного преобразования, решения их (с учетом условия (20)) для неодносвязных областей могут оказаться разными. Именно этот случай и имеет место в ЭАБ [3].

4. Структура векторного потенциала в случае магнитостатического ЭАБ

В первоначальном варианте магнитостатического ЭАБ [3] изучалось влияние на движение электронов области вне бесконечного цилиндрического соленоида с постоянным током. Рассмотрим структуру векторного потенциала в этой задаче на основе изложенной теории. Для этого следует отметить, что если рассматривать намотку как гладкий тонкостенный сплошной цилиндр, то, очевидно, можно считать все пространство однородной анизотропной средой с проводимостью, существующей только при $\rho = R$ ($\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, ось z совпадает с осью симметрии соленоида) и в направлении $\mathbf{e}_a$. Такая трактовка тем более точна, чем тоньше провод и меньше шаг намотки. Поэтому потенциал должен иметь вид $\mathbf{A} = \mathbf{A}^f + \mathbf{A}^0$, где $\mathbf{A}^f$ — полевая часть потенциала, $\mathbf{A}^0 = \mathrm{grad}\Psi$ — потенциал нулевого поля.

В магнитостатическом случае ($\varphi = 0$, $\mu = \varepsilon = 1$) оператор $L = L_2 = \Delta$. Уравнения дифференциальных связей (3) примут вид

$$\frac{\partial}{\partial z}\Delta A_x = \frac{\partial}{\partial x}\Delta A_z, \qquad (21a)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\Delta A_y = \frac{\partial}{\partial y}\Delta A_z, \qquad (21b)$$

Откуда следует, что либо $\Delta A_x = \Delta A_y = \Delta A_z = 0$, либо

$$\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = B_y = 0,$$

$$\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = B_x = 0.$$

Доопределяя систему оператором (6) с $L_x = \partial/\partial x$, $L_y = \partial/\partial y$, $L_z = \partial/\partial z$, $L_0 = 0$, т.е. условием $\mathrm{div}\mathbf{A} = 0$, получим уравнение (7) в виде $\Delta^2\mathbf{A} = 0$. Отсюда следует, что оператор избыточного уравнения $S = \Delta$ и совпадает с основным оператором L. В силу симметрии задачи можно считать $A_\rho = A_z = 0$, $A_\alpha = A_\alpha(\rho)$. С учетом ограниченности в нуле решение в области $0 \leqslant \rho < R$ можно выбрать в виде $A_{1\alpha} = c_1\rho(A_1^f = A_{1\alpha}, A_1^0 = 0)$. Во внешней области ($\rho > R$) общее решение имеет вид $A_{2\alpha} = c_3\rho + c_2/\rho$. Однако, так как система бесконечна, нельзя требовать ограниченности потенциала на бесконечности. Как ясно из физических соображений, магнитное поле вне соленоида равно нулю ($A_2^f = 0$), поэтому во внешней области должно решаться избыточное уравнение $\Delta\mathbf{A}^0 = 0$ с условием $\mathrm{rot}\mathbf{A}^0 = 0$. Последнее условие и отбирает правильное решение $A_{2\alpha} = c_2/\rho$. Этот факт ранее не был обнаружен из-за совпадения в этой задаче операторов избыточного и основного уравнения. Условия возбуждения поля Тихонова имеет в данном случае вид

$$\frac{\partial A_{1\alpha}}{\partial\rho} - \frac{\partial A_{2\alpha}}{\partial\rho}\bigg|_{\rho=R} = \frac{2I}{cR},$$

где I — ток на единицу длины соленоида и совпадает с условием скачка касательной составляющей магнитного поля при обычной формулировке задачи.

Используя условие Тихонова и непрерывность потенциала при $\rho = R$, находим окончательное решение $A_{1\alpha} = I\rho/cR(0 \leqslant \rho < R)$, $A_{2\alpha} = IR/c\rho(R < \rho < \infty)$. Постоянные в этих формулах можно выразить через поток магнитного поля в солениде, так что $A_{1\alpha} = (\Phi/2\pi R^2)\rho$, $A_{2\alpha} = \Phi/2\pi\rho$.

Потенциал во внешней области есть потенциал нулевого поля, так что $\mathbf{A}_2 = \mathrm{grad}\Psi$, но поскольку область двусвязная, функция Ψ многозначна и $\oint \mathbf{A}_2 d\mathbf{r} \neq 0$, несмотря на то, что в этой области $(R < \rho < \infty)\mathrm{rot}\mathbf{A}_2 \equiv 0$. Здесь проявляется неэквивалентность, указанная в разделе 3. Отмеченный факт означает, что теорема Стокса (в форме $\oint \mathbf{A}d\mathbf{r} = \oint \mathbf{B}d\mathbf{s}$, где контур C охватывает соленоид во внешней области, S — площадь внутри контура C) не применима [21]. Тем не менее эта формула некорректно используется во всех работах по ЭАБ.

Вне соленоида теорема Стокса применима к области между двумя замкнутыми контурами C_1, C_2, охватывающими соленоид, превращенной в односвязную с помощью разреза между ними. В этом случае $\oint\limits_{C_1} \mathbf{A}_1 dr = \oint\limits_{C_2} \mathbf{A}_2 d\mathbf{r} = \omega_1$, где ω_1 — циклическая постоянная [21], равная в нашем случае потоку $\Phi = 2\pi IR/c = \pi R^2 B$, где B — поле внутри соленоида. В рамках ограниченного калибровочного преобразования функция калибровочного преобразования χ (одна и та же как внутри соленоида, так и снаружи) должна удовлетворять уравнению Лапласа $\Delta\chi = 0$ $(0 \leqslant \rho < \infty)$. Как известно [22,23], решение уравнения Лапласа во всем пространстве с условием $\chi|_{\rho=\infty} = 0$ есть тождественный нуль. Тем самым потенциалы $A_{1\alpha}$, $A_{2\alpha}$ (в рамках данной калибровки $\mathrm{div}\mathbf{A} = 0$) определяются однозначно.

5. Структура векторного потенциала для соленоида с переменным током

В качестве примера существования нестационарных потенциалов нулевого поля, обобщающего стационарный случай магнитостатического ЭАБ, рассмотрим задачу о нестационарном возбуждении цилиндрического соленоида бесконечной длины с бесконечно тонкими стенками. Выбирая цилиндрическую систему координат (ρ, α, z) с осью z вдоль оси соленоида, представим объемное распределение тока в виде выражений

$$j_\alpha(\rho, \alpha, z) = I_0\delta(\rho - R)\exp i(-n\alpha + \omega t),$$

$$j_\rho = j_z = 0, \tag{22}$$

где R — радиус соленоида, ω — круговая частота тока.

Отличные от нуля компоненты векторного потенциала A_ρ и A_α имеют вид [17] (гармоническую зависимость от времени далее не показываем)

$$A_{\boldsymbol{\rho}} = \int\limits_V j_\alpha(\boldsymbol{\rho}')\sin(\alpha - \alpha')G(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}')dV', \tag{23a}$$

$$A_\alpha = \int\limits_V j_\alpha(\boldsymbol{\rho}')\cos(\alpha - \alpha')G(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}')dV', \tag{23b}$$

где $G(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') = -\frac{i\pi}{c}H_0^{(2)}(k|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'|)$ — функция Грина уравнения Гельмгольца [17], $H_0^{(2)}$ — функция Ханкеля, $k = \omega/c$.

Интегралы, входящие в (23), легко вычисляются с помощью формулы сложения для функций Ханкеля [17]

$$H_0^{(2)}\left(k\sqrt{\rho^2 + R^2 - 2\rho R\cos(\alpha - \alpha')}\right) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-im(\alpha-\alpha')}\begin{cases} H_m^{(2)}(kR)J_m(k\rho), & \rho < R, \\ J_m(kR)H_m^{(2)}(k\rho), & \rho > R. \end{cases} \tag{24}$$

В результате получаем

$$A_\alpha = -\frac{i\pi^2 I_0 R}{c}e^{-in\alpha} \times \begin{cases} H_{n+1}^{(2)}(kR)J_{n+1}(k\rho) + H_{n-1}^{(2)}(kR)J_{n-1}(k\rho), & \rho < R, \\ J_{n+1}(kR)H_{n+1}^{(2)}(k\rho) + J_{n-1}(kR)H_{n-1}^{(2)}(k\rho), & \rho > R, \end{cases} \tag{25a}$$

$$A_\rho = -\frac{\pi^2 I_0 R}{2c}e^{-in\alpha} \times \begin{cases} H_{n+1}^{(2)}(kR)J_{n+1}(k\rho) - H_{n-1}^{(2)}(kR)J_{n-1}(k\rho), & \rho < R, \\ J_{n+1}(kR)H_{n+1}^{(2)}(k\rho) - J_{n-1}(kR)H_{n-1}^{(2)}(k\rho), & \rho > R, \end{cases} \tag{25b}$$

В случае $n = 0$, т. е. отсутствие модуляции по углу, из (11) получаем соотношения

$$A_\alpha = -\frac{2i\pi^2 I_0 R}{c} \begin{cases} H_1^{(2)}(kR) J_1(k\rho), & \rho < R, \\ J_1(kR) H_1^{(2)}(k\rho), & \rho > R, \end{cases}$$

$$A_\rho = 0, \tag{26}$$

которые в стационарном случае ($\omega \to 0$) приводят к известным соотношениям $A_\alpha = J\rho/cR$ и $A_\alpha = JR/c\rho$ ($\rho > R$), где $J = 2\pi R I_0$ — ток в стенке соленоида на единицу длины.

Единственная ненулевая компонента магнитного поля, соответствующая потенциалам (26), имеет вид a) в случае переменного тока

$$B_z = -\frac{2i\pi^2 I_0 R k}{c} \begin{cases} H_1^{(2)}(kR) J_0(k\rho), & \rho < R, \\ J_1(kR) H_0^{(2)}(k\rho), & \rho > R, \end{cases} \tag{27}$$

b) в стационарном случае

$$B_z = \frac{4\pi I_0}{c} (\rho < R), \quad B_z = 0 (\rho > R). \tag{28}$$

В соответствии с (1) разобъем полный векторный потенциал вне соленоида на две части. Для этого выделим в (12) слагаемое, ротор которого равен нулю. Это можно сделать следующим и единственным образом:

$$A_\alpha = -\frac{2i\pi^2 I_0 R}{c} J_1(kR) \tilde{H}_1^{(2)}(k\rho) + \frac{4\pi I_0 R J_1(kR)}{\rho} \equiv A_\alpha^f + A_\alpha^0, \tag{29}$$

где A_α^f — компонента полевого потенциала, A_α^0 — компонента потенциала нулевого поля и $\tilde{H}_1^{(2)}(k\rho) = H_1^{(2)}(k\rho) - 2i/\pi k\rho$.

Выделим реальные части компонент потенциалов в (29)

$$\mathrm{Re} A_\alpha^f = W \left\{ \pi J_1(k\rho) \sin \omega t - \left[\frac{2}{k\rho} + \pi Y_1(k\rho) \right] \cos \omega t \right\}, \tag{30a}$$

$$\mathrm{Re} A_\alpha^0 = W \frac{2}{k\rho} \cos \omega t, \tag{30b}$$

где

$$W = \frac{2\pi I_0 R J_1(kR)}{c},$$

Y_1 — функция Неймана.

В стационарном случае $A_\alpha^f = 0$, $A_\alpha^0 = JR/c\rho$. Из условия отсутствия электрического поля можно получить выражение для скалярного потенциала нулевого поля

$$\varphi^0 = -\frac{4\pi i I_0 R}{c} J_1(kR) \alpha, \tag{31}$$

где α — азимутальный угол; в стационарном случае $\varphi^0 = 0$.

Можно отметить, что существует соотношение между радиусом соленоида и длиной волны электромагнитного поля, которое определяется корнями уравнения $J_1(kR) = 0$ и при котором, как видно из соотношения (15), поля вне соленоида отсутствуют. В этом нестационарном случае, однако, отсутствуют и потенциалы нулевого поля; это случай волновода закрытого типа. Потенциалы нулевого поля отсутствуют также и для всех $n \neq 0$. Легко вычисляется поток внутри соленоида

$$\Phi = \int_0^R \int_0^{2\pi} B_{1z}(\rho) \rho d\rho d\alpha = -\frac{i4\pi^3 R^2 I_0}{c} J_1(k_0 R) H_1^{(2)}(k_0 R). \tag{32}$$

В то же время циркуляция вектора $\mathbf{A}^0$ по произвольному контуру, охватывающему соленоид (циклическая постоянная)

$$\omega_1 = \oint_C \mathbf{A}_0 d\mathbf{r} = \frac{8\pi^2 I_0 R}{ck_0} J_1(k_0 R). \tag{33}$$

Очевидно, что в общем (нестационарном случае) $\omega_1 \neq \Phi$, поэтому их совпадение в стационарном случае ($k_0 \to 0$) следует признать случайным.

Этот факт, вообще говоря, полностью меняет физическое понимание природы ЭАБ. Причиной существования ЭАБ являются потенциалы нулевых полей и, если физический смысл для полевых потенциалов $\mathbf{A}^f$ имеет магнитное поле $\mathbf{B} = \mathrm{rot}\mathbf{A}^f$, для потенциалов нулевого поля $\mathbf{A}^0$ физический (калибровочно-инвариантный) смысл имеет циркуляцию $\oint_c \mathbf{A}^0 dr$.

Список литературы

[1] *Franz W.* Deutsche physik. Ges. 1939. Bd 20. S. 65–66.
[2] *Ehrenberg W., Siday R.E* // Proc. Phys. Soc. London Sect. 1949. Vol. B 62. P. 8.
[3] *Aharonov V., Bohm D.* // Phys. Rev. 1959. Vol. 115. P. 485–491.
[4] *Olariu S., Popesku I.I.* // Rev. Mod. Phys. 1985. Vol. 57. P. 339–436.
[5] *Peskin M., Tonomura A.* // Lectura Notes in Physics. 1989. Vol. 340. P. 115.
[6] *Багров В.Г., Гитман Д.Н., Скаржинский В.Д.* // Труды ФИАН. 1986. Т.176. С. 151–155.
[7] *Tonomura A.* и др. // Phys. Rev. Lett. 1986. Vol. 56. P. 792–795.
[8] *Lee B., Yin E., Gustafson T.K., Chiao R.* // Phys. Rev. 1992. Vol. A45. P. 4319–4325.
[9] *Агеев А.Н., Давыдов С.Ю., Чирков А.Г.* // Письма в ЖТФ. 2000. Т. 26. Вып. 9. С. 70–74.
[10] *Vourdas A.* // Europhysics Lett. 1995. Vol. 32. P. 289–294.
[11] *Vourdas A.* // Phys. Rev. 1997. Vol. A56. P. 2408–2411.
[12] *Afanasiev G., Nelhiebel M.* // Physica Scripta. 1996. Vol. 54. P. 417–427.

[13] *Kobe D.H.* // Annals of Physics. 1979. Vol. 123. P. 381–410.
[14] *Четаев Д.Н.* // ЖТФ. 1962. Т. 32. С. 1342–1344.
[15] *Четаев Д.Н.* // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1966. Т. 10.
[16] *Четаев Д.Н.* // ДАН СССР. 1967. Т. 174. С. 775–778.
[17] *Марков Г.Т., Чаплин А.Ф.* Возбуждение электромагнитных волн. М., Л., 1967. 376 с.
[18] *Тихонов А.Н.* // ДАН СССР. 1959. Т. 126. С. 967–969.
[19] *Савин М.Г.* Проблемы калибровки Лоренца в анизотропной среде. М., 1979. 122 с.
[20] *Valz-Gris F., Magni C.* // J. Math. Phys. 1995. Vol. 36. P. 177–186.
[21] *Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т.* Современная геометрия. Методы теории гомологий. М., 1984. 343 с.
[22] *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. Т. 2. М.: Наука, 1968. 655 с.
[23] *Кочин Н.Е.* Векторное исчисление. М., 1967. 454 с.