01;10

Заряженный эллипсоидальный сгусток в магнитном поле

© А.С. Чихачев

Государственный космический научно-производственный центр им. М.В. Хруничева,
121087 Москва, Россия

(Поступило в Редакцию 9 ноября 1999 г. В окончательной редакции 13 марта 2000 г.)

Изучаются состояния длинного вращающегося заряженного эллипсоидального сгустка в продольном однородном магнитном поле. Для описания состояний использованы два интеграла движения, связывающие поперечные скорости $\dot{x}$ и $\dot{y}$ с координатами x, y и частотой $\omega_H = eH/mc$ (H — полное магнитное поле), а также величинами ω_1 и ω_2, характеризующими кулоновское расталкивание в x- и y-направлениях. Возможны равновесные расстояния с большой погонной плотностью заряда $\nu \gtrsim 1$.

Интенсивное развитие ускорительной техники, наблюдаемое в течение весьма длительного времени, требует решения ряда задач, связанных с динамикой частиц в различных условиях. Особый интерес представляют ситуации, когда заряженные частицы взаимодействуют с собственными полями плотных сгустков. В связи с этим далее рассматривается вращающийся в магнитном поле сгусток частиц, взаимодействующих с собственными полями.

Следует заметить, что состояния длинных сгустков (или пучков) заряженных частиц с эллиптическим сечением в продольном магнитном поле изучены недостаточно. В работе [1] рассматривалось поведение пучка с эллиптическим сечением в магнитном поле при наличии внешней квадрупольной системы, в [2] изучалось поведение нестационарного эллипсоидального сгустка в пренебрежении магнитным полем.

Диамагнитные свойства пучков с круговым сечением изучены при помощи модели "жесткого ротатора" [3]. В настоящей работе для описания поведения эллипсоидального сгустка используется модель, не являющаяся жестким ротатором, — средняя угловая скорость зависит от угла. При этом будет изучено влияние запаздывания взаимодействия, которое может быть существенным для плотных сгустков.

1. Уравнения движения заряженных частиц в однородном магнитном поле, направленном вдоль оси z при наличии расталкивающих сил со стороны собственного пространственного заряда в координатах x, y, связанных с главными осями эллиптического сечения вращающегося сгустка имеют вид

$$\ddot{x} - \dot{y}(2\dot{\Theta} + \omega_H) - x\left(\dot{\Theta} + \frac{\omega_H}{2}\right)^2 = \left(\omega_1^2 - \frac{\omega_H^2}{4}\right)x,$$

$$\ddot{y} + \dot{x}(2\dot{\Theta} + \omega_H) - y\left(\dot{\Theta} + \frac{\omega_H}{2}\right)^2 = \left(\omega_2^2 - \frac{\omega_H^2}{4}\right)y, \quad (1)$$

где $\dot{\Theta}$ — угловая скорость вращения сгустка; $\omega_H = eH/mc$; H — полное магнитное поле; ω_1, ω_2 описывают кулоновское расталкивание частиц эллипсоидального сгустка.

В системе координат, связанной с главными осями,

$$\omega_1^2 = \frac{\nu c^2}{R_x(R_x + R_y)}, \quad \omega_2^2 = \frac{\nu c^2}{R_y(R_x + R_y)},$$

где ν — погонная плотность заряда

$$\nu = \frac{3e^2 N}{mc^2 R_z},$$

N — полное число частиц в сгустке; продольный размер $R_z \gg R_x, R_y$.

Уравнения (1) имеют периодические решения $x \sim e^{i\Omega t}$, $y \sim e^{i\Omega t}$, причем

$$\Omega_{1,2}^2 = \frac{\omega_H^2 + 2\dot{\Theta}^2 + 2\dot{\Theta}\omega_H - \omega_1^2 - \omega_2^2}{2} \pm \sqrt{\left(\dot{\Theta} + \frac{\omega_H}{2}\right)^2 (\omega_H^2 - 2(\omega_1^2 + \omega_2^2)) \left(\frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{2}\right)^2}. \quad (2)$$

Из выведенного ниже уравнения (8) следует, что физически разумные (действительные) значения величины R_x/R_y могут быть получены при условии

$$\frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2} - \frac{\omega_H^2}{4} = \omega_0^2 - \frac{\omega_H^2}{4} = K_0^2 > 0.$$

Это неравенство существенным образом ограничивает область параметров, при которых возможно существование изучаемого нестационарного равновесного состояния. При использовании соотношения

$$\delta_0^4 = -4K_0^2\left(\frac{\omega_H}{2} + \dot{\Theta}\right)^2 + \frac{\Delta^2}{4} \to 0 \quad (\Delta = \omega_1^2 - \omega_2^2)$$

из (8) также следует, что $\dot{\Theta} + \omega_H/2 \simeq \omega_0^2/\omega_H$, что приводит к действительным значениям частот Ω. При постоянных значениях величин $\dot{\Theta}$, ω_H уравнения (1) имеют инварианты следующего вида:

$$I_1 = \left(\dot{x} + (\omega_H + 2\dot{\Theta})\frac{\omega_2^2 + \dot{\Theta}^2 + \dot{\Theta}\omega_H}{\omega_2^2 + \dot{\Theta}^2 + \dot{\Theta}\omega_H + \Omega_1^2}y\right)^2 + \left(\frac{(\omega_H + 2\dot{\Theta})\Omega_1}{\omega_2^2 + \dot{\Theta}^2 + \dot{\Theta}\omega_H + \Omega_1^2}\dot{y} - \frac{\dot{\Theta}^2 + \dot{\Theta}\omega_H + \omega_1^2}{\Omega_1}x\right)^2,$$

$$I_2=\left(\dot y-(\omega_H+2\dot\Theta)\frac{\omega_1^2+\dot\Theta^2+\dot\Theta\omega_H}{\omega_1^2+\dot\Theta^2+\dot\Theta\omega_H+\Omega_2^2}x\right)^2$$
$$+\left(\frac{(\omega_H+2\dot\Theta)\Omega_2}{\omega_1^2+\dot\Theta^2+\dot\Theta\omega_H+\Omega_2^2}\dot x+\frac{\dot\Theta^2+\dot\Theta\omega_H+\omega_2^2}{\Omega_2}y\right)^2.$$

Если, далее, положить

$$I=\alpha_1I_1+\alpha_2I_2,$$

где $\alpha_{1,2}$ — положительные константы, и взять функцию распределения в виде

$$f=\varkappa\delta(I-v_0^2),$$

то интегрирование по скоростям этой функции приводит к плотности, отличной от нуля в эллиптической области в координатах x,y. Полное выражение для интеграла движения I имеет вид

$$I=A\dot x^2+B\dot y^2+2C_1\dot xy+2C_2x\dot y+Dx^2+Ey^2, \qquad (3)$$

причем коэффициенты выражаются следующим образом:

$$A=\alpha_1+\alpha_2\frac{(\omega_H+2\dot\Theta)^2\Omega_2^2}{(\dot\Theta^2+\dot\Theta\omega_H+\omega_1^2+\Omega_2^2)^2},$$

$$B=\alpha_1\frac{(\omega_H+2\dot\Theta)^2\Omega_1^2}{(\dot\Theta^2+\dot\Theta\omega_H+\omega_2^2+\Omega_1^2)^2}+\alpha_2,$$

$$C_1=(\omega_H+2\dot\Theta)(\dot\Theta^2+\dot\Theta\omega_H+\omega_2^2)$$
$$\times\left(\frac{\alpha_1}{\dot\Theta^2+\dot\Theta\omega_H+\omega_2^2+\Omega_1^2}+\frac{\alpha_2}{\dot\Theta^2+\dot\Theta\omega_H+\omega_1^2+\Omega_2^2}\right),$$

$$C_2=-\frac{\dot\Theta^2+\dot\Theta\omega_H+\omega_1^2}{\dot\Theta^2+\dot\Theta\omega_H+\omega_2^2}C_1,$$

$$D=(\dot\Theta^2+\dot\Theta\omega_H+\omega_1^2)^2\left\{\frac{\alpha_1}{\Omega_1^2}+\alpha_2\frac{(\omega_H+2\dot\Theta)^2}{(\dot\Theta^2+\dot\Theta\omega_H+\omega_1^2+\Omega_2^2)^2}\right\},$$

$$E=(\dot\Theta^2+\dot\Theta\omega_H+\omega_2^2)^2$$
$$\times\left\{\frac{\alpha_1(\omega_H+2\dot\Theta)^2}{(\dot\Theta^2+\dot\Theta\omega_H+\omega_2^2+\Omega_1^2)^2}+\frac{\alpha_2}{\Omega_2^2}\right\}. \qquad (4)$$

Величины полуосей эллиптического сечения сгустка при заданной выше функции распределения определяются равенствами

$$\frac{R_x^2}{B}=\frac{v_0^2\Omega_1^2(\dot\Theta^2+\dot\Theta\omega_H+\omega_1^2+\Omega_2^2)^2}{\alpha_1\alpha_2(\dot\Theta^2+\dot\Theta\omega_H+\omega_1^2)^2(\Omega_1^2-\Omega_2^2)^2},$$

$$\frac{R_y^2}{A}=\frac{v_0^2\Omega_2^2(\dot\Theta^2+\dot\Theta\omega_H+\omega_2^2+\Omega_1^2)^2}{\alpha_1\alpha_2(\dot\Theta^2+\dot\Theta\omega_H+\omega_2^2)^2(\Omega_1^2-\Omega_2^2)}. \qquad (5)$$

Из выражений для ω_1^2 и ω_2^2 и соотношений (5) следуют равенства

$$R_x=\frac{v_0\Omega_1(\dot\Theta^2+\dot\Theta\omega_H+\omega_1^2+\Omega_2^2)^2}{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}(\dot\Theta^2+\dot\Theta\omega_H+\omega_1^2)(\Omega_1^2-\Omega_2^2)}$$
$$\times\sqrt{\alpha_2+\alpha_1\frac{(\omega_H+2\dot\Theta)^2\Omega_1^2}{(\dot\Theta^2+\dot\Theta\omega_H+\omega_2^2+\Omega_1^2)^2}}$$
$$=\sqrt{\nu}c\frac{\omega_2}{\omega_1\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2}}, \qquad (6)$$

$$R_y=\frac{v_0\Omega_2(\dot\Theta^2+\dot\Theta\omega_H+\omega_2^2+\Omega_1^2)^2}{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}(\dot\Theta^2+\dot\Theta\omega_H+\omega_2^2)(\Omega_1^2-\Omega_2^2)}$$
$$\times\sqrt{\alpha_1\frac{(\omega_H+2\dot\Theta)^2\Omega_2^2}{(\dot\Theta^2+\dot\Theta\omega_H+\omega_1^2+\Omega_2^2)^2}+\alpha_2}$$
$$=\sqrt{\nu}c\frac{\omega_1}{\omega_2\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2}}. \qquad (7)$$

Как указывалось выше, будет рассмотрен случай $\delta_0\to 0$, т.е.

$$\Omega_1\simeq\Omega_2\simeq\Omega_0, \quad |\delta_0/\Omega_0|\ll 1.$$

При этом из равенств (6) и (7) следует, что отношение $v_0/\sqrt{\nu}c\ll 1$ во вращающейся системе координат скорости частиц оказывается достаточно малым. Отношение (6) к (7) дает уравнение

$$\frac{R_x}{R_y}=\frac{\omega_2^2}{\omega_1^2}=\frac{\sqrt{\dot\Theta+\frac{\omega_H}{2}-K_0}}{\sqrt{\dot\Theta+\frac{\omega_H}{2}+K_0}}. \qquad (8)$$

2. Вычислим собственное продольное магнитное поле сгустка. В покоящихся координатах x_1,y_1

$$x_1=x\cos\Theta-y\sin\Theta, \quad y_1=x\sin\Theta+y\cos\Theta,$$

x,y — вращающаяся система, связанная с главными осями эллиптического сечения сгустка.

Интегрирование выражений

$$A_{x_1}=\frac{1}{c}\int\frac{j_{x_1}(\mathbf r')(\mathbf r_{1\perp}\mathbf r'_\perp)d\mathbf r'}{r'^3},$$

$$A_{y_1}=\frac{1}{c}\int\frac{j_{y_1}(\mathbf r')(\mathbf r_{1\perp}\mathbf r'_\perp)d\mathbf r'}{r'^3}$$

с учетом равенств

$$\bar{\dot x}=-\frac{C_1}{A}y, \quad \bar{\dot y}=-\frac{C_2}{B}x, \quad \rho_0=\frac{eN}{\frac{4\pi}{3}R_xR_yR_z}$$

приводит к соотношениям

$$A_{x_1} = \frac{2\pi R_x R_y \rho_0}{c(R_x+R_y)}\left\{x_1\left[R_x\left(\frac{C_2}{B}-\dot\Theta\right)\right.\right.$$
$$\left.+R_y\left(\frac{C_1}{A}+\dot\Theta\right)\right]\frac{\sin 2\Theta}{2}$$
$$+y_1\left[R_x\left(\frac{C_2}{B}-\dot\Theta\right)\frac{1-\cos 2\Theta}{2}\right.$$
$$\left.\left.-R_y\left(\frac{C_1}{A}+\dot\Theta\right)\frac{1+\cos 2\Theta}{2}\right]\right\}, \quad (9)$$

$$A_{y_1} = \frac{2\pi R_x R_y \rho_0}{c(R_x+R_y)}\left\{x_1\left[-\frac{1+\cos 2\Theta}{2}\left(\frac{C_2}{B}-\dot\Theta\right)R_x\right.\right.$$
$$\left.+\frac{1-\cos 2\Theta}{2}\left(\frac{C_1}{A}+\dot\Theta\right)R_y\right]$$
$$\left.-y_1\left[\left(\frac{C_2}{B}-\dot\Theta\right)R_x+\left(\frac{C_1}{A}+\dot\Theta\right)R_y\right]\frac{\sin 2\Theta}{2}\right\}, \quad (10)$$

Из (9) и (10) можно получить выражение для собственного магнитного поля сгустка

$$H_z^{(\text{in})} = \frac{\partial A_{y_1}}{\partial x_1} - \frac{\partial A_{x_1}}{\partial y_1}.$$

Если внешнее поле характеризуется величиной $\Omega_H = eH^{(\text{ext})}/mc$, то собственное поле описывается разностью $\omega_H - \Omega_H$. Можно получить

$$\omega_H - \Omega_H = \nu\dot\Theta + \nu\left(\frac{C_1}{A}\frac{R_y}{R_x+R_y} - \frac{C_2}{B}\frac{R_x}{R_x+R_y}\right). \quad (11)$$

Так как в соответствии с (4) при $\delta_0 \to 0$

$$\frac{C_1}{A} = -\left(\dot\Theta + \frac{\omega_H}{2} - K_0\right), \quad \frac{C_2}{B} = \dot\Theta + \frac{\omega_H}{2} + K_0,$$

при помощи (9) это равенство преобразуется к виду

$$\omega_H - \Omega_H = \nu\dot\Theta - \nu|\Omega_0|. \quad (13)$$

Приведем здесь также выражение для поправки к потенциалу сгустка, возникающей при учете запаздывания в низшем приближении,

$$\Phi^{(1)}(x_1, y_1) = \frac{\dot\Theta^2\rho_0}{2c^2}\int\frac{d\mathbf{r}'}{r'^3}(x'^2 - y'^2)$$
$$\times\left[(x_1^2 - y_1^2)\cos 2\Theta + 2x_1y_1\sin 2\Theta\right]$$
$$= \frac{\dot\Theta^2\rho_0}{2c^2}\pi R_x R_y\frac{R_x - R_y}{R_x + R_y}$$
$$\times\left[(x_1^2 - y_1^2)\cos 2\Theta + 2x_1y_1\sin 2\Theta\right]. \quad (13)$$

3. Проанализируем уравнение (8) вместе с (12) с учетом соотношения

$$2K_0\left(\dot\Theta + \frac{\omega_H}{2}\right) - \frac{\Delta}{2} \simeq 0, \quad (14)$$

следующего из условия

$$\delta_0 \simeq 0 \quad \left(\dot\Theta + \frac{\omega_H}{2} > 0\right).$$

Из (8) следует

$$\dot\Theta + \frac{\omega_H}{2} = \frac{\omega_0^2}{\omega_H},$$

при этом

$$\Omega_0 = \left|\frac{\omega_0^2}{\omega_H} - \frac{\omega_H}{2}\right|,$$

и если $\omega_H^2 > 2\omega_0^2$ то из (12) получим

$$\Omega_H = \omega_H(1+\nu) - 2\nu\frac{\omega_0^2}{\omega_H}. \quad (15)$$

Внешнее поле ослаблено вращающимися частицами $\Omega_H > \omega_H$. При $\omega_H^2 < 2\omega_0^2$ система уравнений (8) и (12) не имеет физически разумного решения. При учете запаздывания электрического поля использование выражений (9), (10), (12) и равенства

$$\mathbf{E}^{(1)} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\Phi^{(1)}$$

можно получить следующие выражения для ω_1^2, ω_2^2:

$$\omega_1^2 = \frac{\nu}{R_x+R_y}\left(\frac{c^2}{R_x} - \dot\Theta\left(R_x\frac{C_2}{B} + R_y\frac{C_1}{A}\right)\right), \quad (16)$$

$$\omega_2^2 = \frac{\nu}{R_x+R_y}\left(\frac{c^2}{R_y} + \dot\Theta\left(R_x\frac{C_2}{B} + R_y\frac{C_1}{A}\right)\right). \quad (17)$$

Соответственно вместо (8) получим

$$\frac{R_x}{R_y} = \frac{\omega_2^2 + \nu\dot\Theta\left(\dot\Theta + \frac{\omega_H}{2} - K_0\right)}{\omega_1^2 + \nu\dot\Theta\left(\dot\Theta + \frac{\omega_H}{2} + K_0\right)} = \frac{\sqrt{\dot\Theta + \frac{\omega_H}{2} - K_0}}{\sqrt{\dot\Theta + \frac{\omega_H}{2} + K_0}}, \quad (18)$$

откуда следует уравнение

$$2\left(\dot\Theta + \frac{\omega_H}{2}\right)\left(\dot\Theta + \frac{\omega_H}{2} + |\Omega_0|\right) = \omega_0^2 - \nu\dot\Theta|\Omega_0|. \quad (19)$$

Величина внешнего поля может быть определена из следующей системы:

$$(4+\nu)\dot\Theta^2 + \frac{2\dot\Theta}{\nu}\left[\omega_H(\nu-1) + \Omega_H(\nu+2)\right]$$
$$+\frac{\omega_H}{\nu}\left(\omega_H\frac{\nu-2}{2} + \Omega_H\right) - \omega_0^2 = 0, \quad (20)$$

$$\dot\Theta = \frac{\omega_0^2 - \frac{\omega_H^2}{2} + \left(\frac{\omega_H - \Omega_H}{\nu}\right)^2}{\omega_H + 2\frac{\omega_H - \Omega_H}{2}}. \quad (21)$$

Если считать в (18) и (19) член $\nu\dot\Theta|\Omega_0|$ малой поправкой, то для внешнего поля получим

$$\Omega_H \simeq \omega_H + \nu\left(\omega_H - 2\frac{\omega_0^2}{\omega_H}\right) + \frac{4\nu^2\left(\frac{\omega_H}{2} - \frac{\omega_0^2}{\omega_H}\right)^3}{\omega_H^2}, \quad (22)$$

причем слагаемое, пропорциональное ν^2, всегда положительно, т. е. при учете запаздывания потенциала ослабление внешнего поля оказывается бóльшим, чем в случае, когда запаздыванием можно пренебречь.

4. Скорости частиц в покоящейся системе координат выражаются равенствами

$$\dot{x}_1 = (\dot{x} - y\dot{\Theta})\cos\Theta - (\dot{y} + x\dot{\Theta})\sin\Theta,$$

$$\dot{y}_1 = (\dot{x} - y\dot{\Theta})\sin\Theta + (\dot{y} + x\dot{\Theta})\cos\Theta.$$

Поскольку для средних величин справедливы соотношения

$$\bar{\dot{x}} = -\frac{C_1}{A}y, \quad \bar{\dot{y}} = -\frac{C_2}{B}x,$$

то максимальные средние скорости частиц в покоящейся системе определяются равенствами

$$(\bar{\dot{x}}_1)_{\max} = \left(\frac{\omega_H}{2} - K_0\right)R_y, \quad (\bar{\dot{y}}_1)_{\max} = \left(\frac{\omega_H}{2} + K_0\right)R_x,$$

причем

$$R_y = \frac{\sqrt{\nu}c\omega_1}{\omega_2\omega_0\sqrt{2}}, \quad R_x = \frac{\sqrt{\nu}c\omega_2}{\omega_1\omega_0\sqrt{2}}.$$

При выполнении неравенства $\omega_1 \gg \omega_2$ и соотношения $\omega_0^2 \simeq \omega_H^2/2$ $(\bar{\dot{x}}_1)_{\max} \ll c$ и $(\bar{\dot{y}}_1)_{\max} \ll c$ при $\nu \gtrsim 1$.

Среднеквадратичные скорости имеют порядок v_0, причем $v_0 \ll c$ при любых значениях ν. Это означает, что возможно удержание плотных сгустков во внешнем поле. Разлет частиц длинного сгустка вдоль поля является относительно медленным.

Таким образом, в настоящей работе изучены состояния длинного заряженного вращающегося сгустка с большой плотностью в магнитном поле и дана оценка влияния запаздывания взаимодействия на эти состояния.

Список литературы

[1] *Чихачев А.С.* // ЖТФ. 1985. Т. 55. Вып. 6. С. 1179–1182.
[2] *Чихачев А.С.* // РиЭ. 1994. Т. 39. Вып. 3. С. 453–460.
[3] *Девидсон Р.* Теория заряженной плазмы. М.: Мир, 1978. 218 с.