01;03

О неоднородных флуктуациях в жидкостях и газах

© С.О. Гладков, И.В. Гладышев

Московский государственный институт радиотехники, электроники и автоматики (технический университет),
117454 Москва, Россия

(Поступило в Редакцию 25 января 2000 г.)

С помощью динамических уравнений "движения" для флуктуаций плотности и температуры описаны их совместные неоднородные колебания. При заданном начальном распределении температуры исследована динамика развития флуктуаций и доказано, что при учете неоднородного распределения температуры стационарные точки становятся асимптотически устойчивыми. Показано, что установление температуры по газу определяется конкуренцией между механизмами вязкости и теплопроводности. Численный анализ полученных уравнений позволил графически изобразить ход фазовых траекторий на плоскости $T-\rho$ в неоднородном случае.

Ранее [1] был намечен общий путь исследования флуктуационного поведения во времени и пространстве любых статистически независимых параметров физических подсистем. На конкретном примере флуктуаций температуры T и плотности ρ была продемонстрирована модель математического описания развития этих флуктуаций во времени и было показано, что они имеют строго периодический характер с некоторым характерным периодом осцилляций. Неоднородность T и ρ при этом не учитывалась.

Настоящая работа является логическим продолжением намеченного в работе [1] подхода, а ее цель — описание температуры и плотности при учете их неоднородного распределения.

Будем исходить из общих неоднородных уравнений "движения", учитывающих лишь линейные поправки по δT и $\delta\rho$. Согласно работе [1], в случае идеального газа имеем следующие уравнения:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \nu t_0 \left(\Delta u - \frac{\ddot{u}}{c_S^2}\right) - k_1 \Delta v - u + v + \Psi_1(u, v), \quad (1)$$

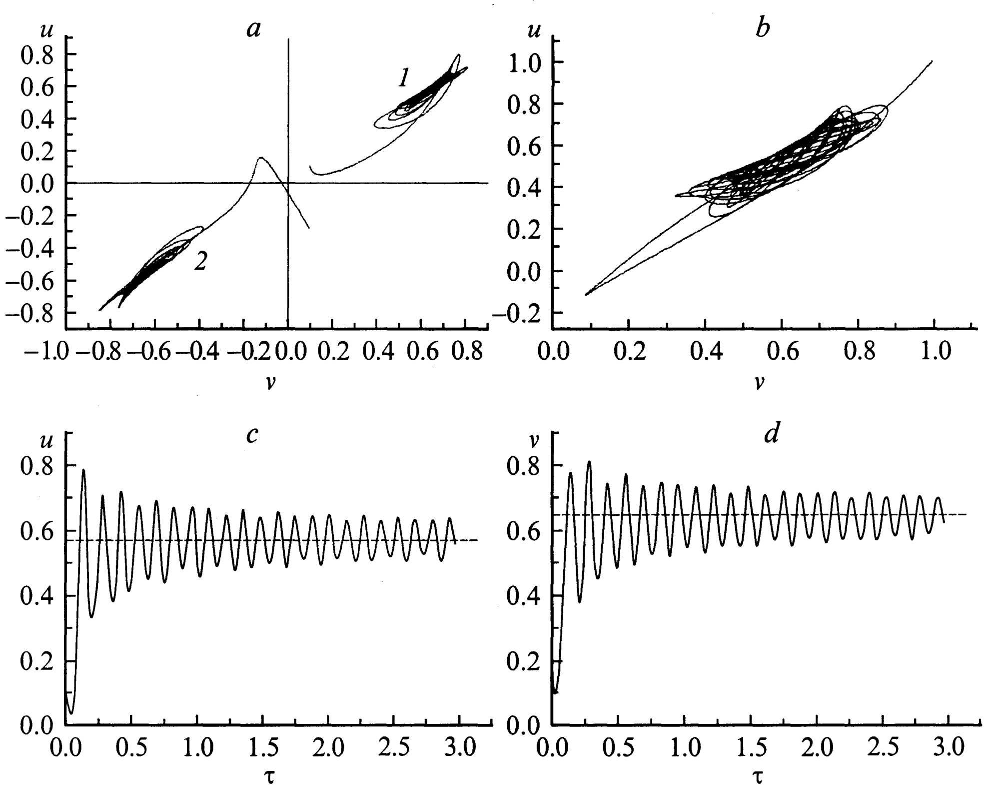

Рис. 1. "Фазовые траектории" при начальном распределении (11) $u(0) = v(0) = 0.1$ $(a, 1)$; $u(0) = -0.3$, $v(0) = 0.1$ $(a, 2)$; $u(0) = v(0) = 1$ (b), зависимость $u(c)$ и $v(d)$ от времени для кривой *1* на рис. 1, *a*. Штриховые прямые (c, d) — "координаты" устойчивого узла для $c_v = 3/2$ [1].

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = t_0\chi\left(\Delta v - \frac{\ddot{v}}{c_T^2}\right) - k_1\Delta u + c_v v + u + \Psi_2(u, v), \quad (2)$$

где

$$u = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}, \qquad v = \frac{T - T_0}{T_0}, \quad (3)$$

ν — кинематическая вязкость, χ — температуропроводность газа, t_0 — некоторое феноменологическое время релаксации, k_1 — константа, c_v — изохорическая теплоемкость, c_T — скорость распространения температуры, c_S — скорость звука в газе, безразмерное время $\tau = t/t_0$,

$$\Psi_1(u, v) = \frac{1}{3}v^2 + u^2 + \frac{3}{4}u^2 v - u^3 - u^4 - 2u^3 v - u^5 - u^4 v, \quad (4)$$

$$\Psi_2(u, v) = \frac{2}{3}uv - 3c_v v^2 + \frac{1}{4}u^3 + \frac{1}{3}c_v v^3 - \frac{1}{4}c_v v^4 - \frac{1}{2}u^4 + \frac{1}{5}c_v v^5 - \frac{1}{5}u^5. \quad (4')$$

По поводу скорости c_T следует сказать несколько слов. Как видно из уравнения (2), на временах

$$\tau_1 \ll \delta\tau \ll \chi/c_T^2, \quad (5)$$

где τ_1 — некоторый характерный квантовый масштаб времен, можно говорить о специфических температурных волнах с законом дисперсии $\omega = c_T q$. Этот спектр, как видно из (5), будет проявлять себя при

$$\tau_1 \ll \delta\tau \ll \tau_2\left(\frac{v_T}{c_T}\right)^2, \quad (6)$$

где v_T — средняя тепловая скорость молекул в газе ($v_T \sim \sqrt{T}$), τ_2 — время между столкновениями молекул.

Если $c_T \ll v_T$, то диапазон (6) вполне реален и можно говорить о температурных волнах. Вернемся к уравнениям (1) и (2). Нас интересует сейчас поведение флуктуаций на временах

$$\delta t \gg \max\left\{\tau_2\left(\frac{v_T}{c_T}\right)^2,\ \tau_2'\left(\frac{v_T}{c_S}\right)^2\right\}, \quad (7)$$

где τ_2' определяется из газокинетического приближения:

$$\nu \sim v_T^2 \cdot \tau_2', \quad (8)$$

а поэтому система уравнений (1), (2) примет вид

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \nu t_0\Delta u - k_1\Delta v - u + v + \Psi_1(u, v), \quad (9)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \chi t_0\Delta v - k_1\Delta u + c_v v + u + \Psi_2(u, v). \quad (10)$$

В отсутствии слагаемого, пропорционального константе k_1, и для начального распределения в виде

$$v(0, x) = v(0)e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \quad u(0, x) = u(0)e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \quad (11)$$

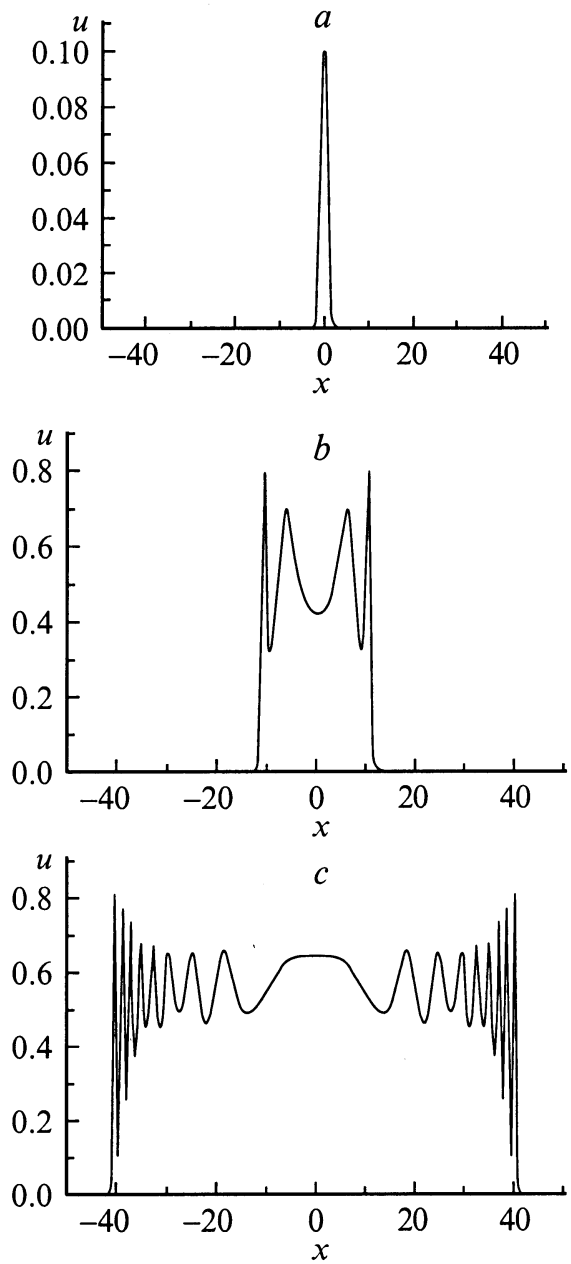

Рис. 2. "Пространственное" распределение флуктуаций в различные моменты времени τ_1 (*a*) $<$ τ_2 (*b*) $<$ τ_3 (*c*). Начальные условия соответствуют кривой *1* на рис. 1, *a*.

где σ — малая ширина гауссовского распределения, численное решение уравнений (9), (10) приводит к следующим зависимостям, проиллюстрированным на рис. 1 и 2. Замена в (11) одного из распределений на константу качественно картины не изменяет.

Заметим здесь, что учет слагаемого $k_1\Delta v$ в (9) и $k_1\Delta u$ в (10) (в том числе для $k_1 < 0$) практически не влияет на ход кривых, приведенных на рис. 1, 2. При $k_1 > \nu t_0$, χt_0 изменения затрагивают картину "пространственного" распределения флуктуаций.

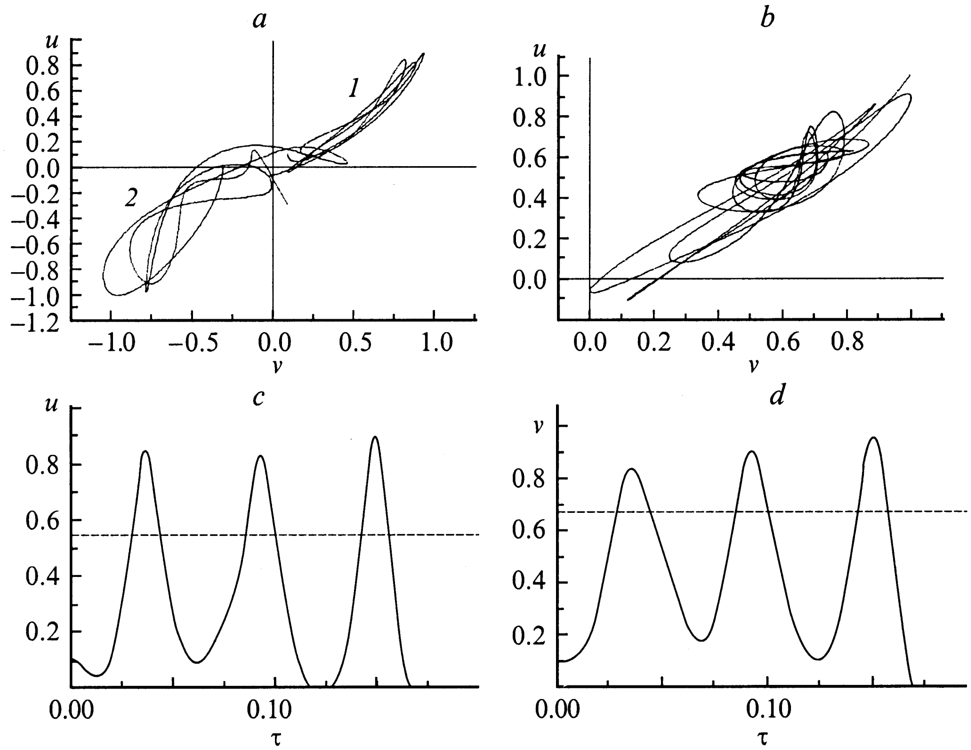

Рис. 3. "Фазовые траектории" при начальном распределении (12) $u(0) = v(0) = 0.1$ (*a, 1*); $u(0) = -0.3$, $v(0) = 0.1$ (*a, 2*); $u(0) = v(0) = 1$ (*b*), зависимость $u(c)$ и $v(d)$ от времени для кривой *1* на рис. 3, *a*. Штриховые прямые (*c, d*) — "координаты" устойчивого узла для $c_v = 3/2$ [1].

Для более реального начального распределения, а именно для

$$v(0,x) = \frac{v(0)}{3}\left\{e^{-\frac{(x+x_0)^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}}\right\},$$

$$u(0,x) = \frac{u(0)}{3}\left\{e^{-\frac{(x+x_0)^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}}\right\}, \qquad (12)$$

при сближении пиков ($x_0 \approx 10\sigma$ и менее) картина поведения $u(\tau)$, $v(\tau)$ качественно меняется, о чем можно судить по рис. 3 (пространственная картина приведена на рис. 4). Увеличение числа пиков в начальном распределении (12) до пяти к качественным изменениям не приводит: и для трех, и для пяти пиков в случае, когда $x_0 \ll 10\sigma$, их можно рассматривать независимо друг от друга, как одиночные возмущения (чему соответствует распределение (11)). Блок-схема программы по численному интегрированию уравнений (9), (10) представлена на рис. 5.

Остановимся теперь на аналитическом решении системы уравнений (9), (10) в линейном по u и v приближении, положив $k_1 = \Psi_1 = \Psi_2 = 0$. Имеем

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \alpha\Delta u - u + v, \qquad (13)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \beta\Delta v + c_v v + u, \qquad (14)$$

где $\alpha = \nu t_0$, $\beta = \chi t_0$.

Выразив из (14) u через v и подставив в уравнение (13), найдем

$$\ddot{v} - (\alpha+\beta)\Delta\dot{v} - (c_v - 1)\dot{v} + \alpha\beta\Delta^2 v$$
$$+ (c_v\alpha - \beta)\Delta v - c_p v = 0, \qquad (15)$$

где точка над соответствующей величиной означает дифференцирование по безразмерному времени τ, $c_p = c_v + 1$ — изобарическая теплоемкость.

Решим уравнение (15) в одномерном случае, когда $\Delta = \partial^2/\partial x^2$, с помощью преобразования Фурье. Действительно, пусть

$$v(x,\tau) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} v_p(\tau) e^{ipx} \frac{dp}{2\pi}, \qquad (16)$$

тогда из (15) следует уравнение

$$\ddot{v} + \gamma(p)\dot{v}_p + \Omega_p^2 v_p = 0, \qquad (17)$$

где

$$\gamma(p) = (\alpha+\beta)p^2 + 1 - c_v,$$
$$\Omega_p^2 = \alpha\beta p^4 + (\beta - c_v\alpha)p^2 - c_p. \qquad (18)$$

Решение уравнения (17) будет

$$v_p(\tau) = e^{-\gamma_p\frac{\tau}{2}}(C_1 e^{+\lambda\tau} + C_2 e^{-\lambda\tau}), \qquad (19)$$

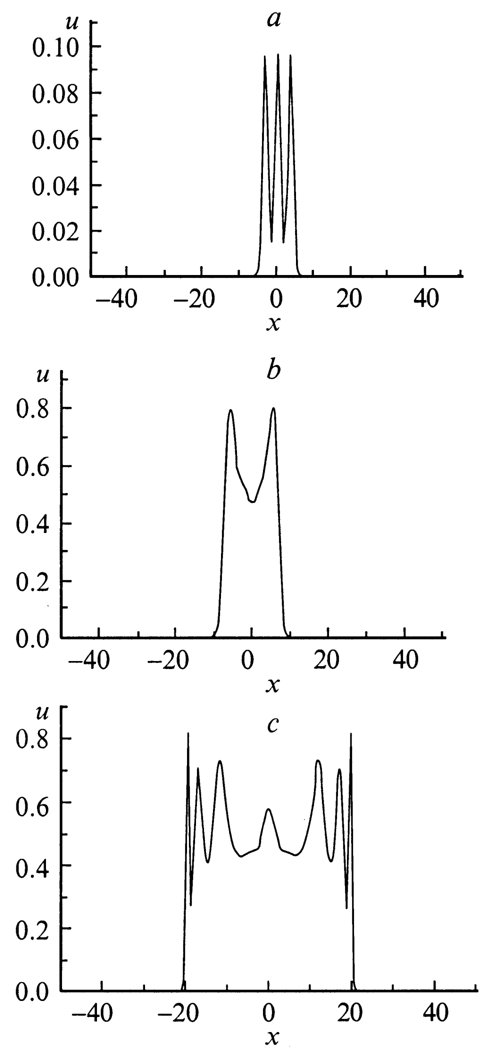

Рис. 4. "Пространственное" распределение флуктуаций в различные моменты времени τ_1 (a) $<$ τ_2 (b) $<$ τ_3 (c). Начальные условия соответствуют кривой *1* на рис. 3, *a*.

где

$$\lambda = \sqrt{\frac{\gamma_p^2}{4} - \Omega_p^2}. \tag{20}$$

После простых преобразований найдем, что

$$\lambda = \frac{1}{2}\sqrt{(\alpha-\beta)^2 p^4 + 2p^2 c_p(\alpha-\beta) + c_p^2 + 4}. \tag{21}$$

С помощью же (16) имеем в результате

$$v(x,\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} c(p,0) e^{ipx - \gamma_p \frac{\tau}{2} - \lambda\tau} \frac{dp}{2\pi}. \tag{22}$$

Заметим, что решение (22) записано для случая $C_1 = 0$ (см. (19)), а $C_2 = C(p,0)$, причем

$$C(p,0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx} v(0,x)dx. \tag{23}$$

Полученный интеграл (22) может быть взят с помощью метода перевала. В самом деле, введем функцию

$$f(p) = ixp - \gamma_p \frac{\tau}{2} - \lambda\tau. \tag{24}$$

Дифференцируя ее по ρ и приравнивая к нулю, находим

$$f' = ix - p\tau\cdot(\alpha+\beta) - \frac{\tau p[(\alpha-\beta)^2 p^2 + (\alpha-\beta)c_p]}{2\lambda} = 0.$$

Но поскольку мы считаем, что время t_0 велико, то приближенно можно положить, что

$$\lambda \approx |\alpha-\beta|\frac{p^2}{2},$$

а потому уравнение $f' = 0$ дает следующую точку перевала

$$p_0 \approx \frac{ix}{2\alpha\cdot\tau} \quad \text{при } \alpha > \beta,$$
$$p_0 \approx \frac{ix}{2\beta\cdot\tau} \quad \text{при } \alpha < \beta. \tag{25}$$

Подставив это значение p_0 в $f(p)$, из (24) имеем

$$f(p_0) \approx -\frac{x^2}{4\alpha\cdot\tau} \quad \text{при } \alpha > \beta,$$
$$f(p_0) \approx -\frac{x^2}{4\beta\cdot\tau} \quad \text{при } \alpha < \beta. \tag{26}$$

Вторая производная в точке перевала есть

$$f'' = -2\alpha\tau\left(1 + \frac{2\alpha\tau^2}{x^2}c_p\right). \tag{27}$$

Следовательно, при $\alpha > \beta$ (22) приходим к

$$v(x,t) \approx C(p_0) e^{-\frac{x^2}{4\nu\cdot t}} \sqrt{\frac{\pi}{2\nu t\left(1 + \frac{2\nu\cdot t^2 c_p}{t_0 x^2}\right)}}, \tag{28}$$

а при $\alpha < \beta$

$$v(x,t) \approx C(p_0) e^{-\frac{x^2}{4\chi\cdot t}} \sqrt{\frac{\pi}{2\chi t\left(1 + \frac{2\chi\cdot t^2 c_p}{t_0 x^2}\right)}}. \tag{29}$$

Мы получили, таким образом, ожидаемые выражения с единственным отличием от традиционных результатов [2–4] — это присутствие в знаменателях (28),

Кинематическая вязкость и температуропроводность некоторых веществ при нормальных условиях

Вещество	Вода	Воздух	Ртуть
Температуропроводность χ, cm^2/s	0.00144	0.187	0.044
Кинематическая вязкость ν, cm^2/s	0.01	0.15	0.0012

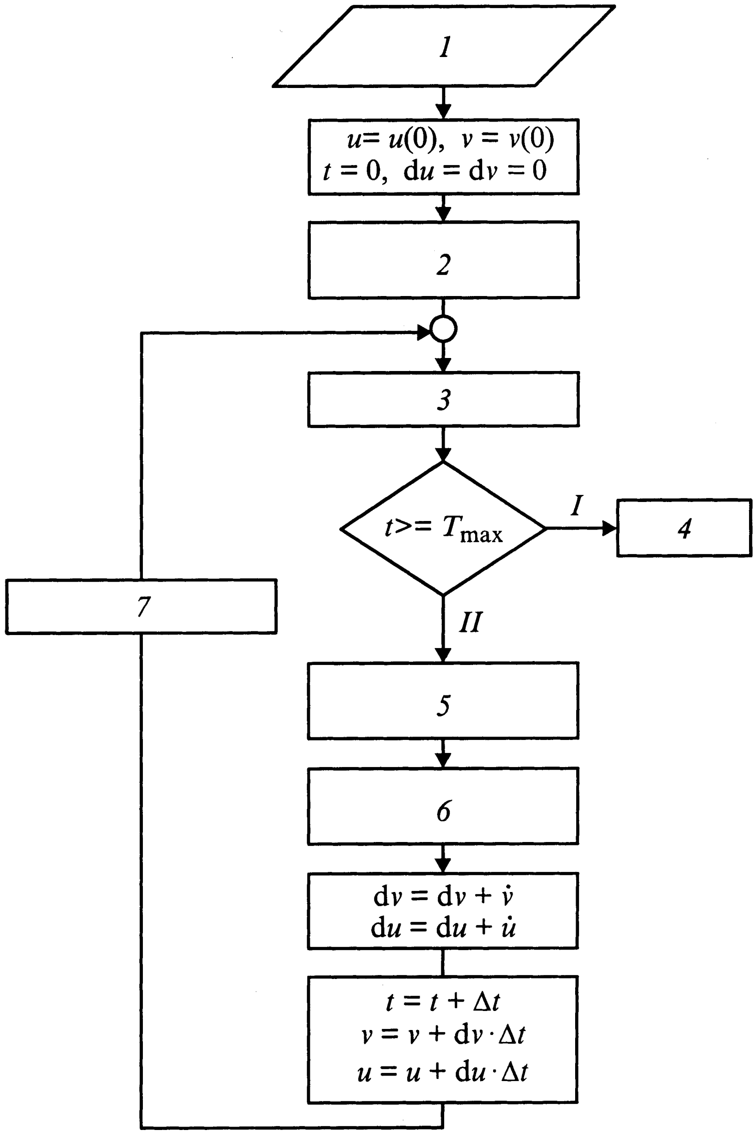

Рис. 5. Блок-схема программы расчета "фазовых траекторий": *1* — ввод начальных данных; *2* — расчет функции распределения; *3* — вывод u, v, t; *I* — да; *4* — стоп, *II* — нет; *5* — расчет производных; *6* — определение $\dot{u}(u, v)$ и $\dot{v}(u, v)$; *7* — расчет изменившейся функции распределения.

(29) малого слагаемого, пропорционального изобарической теплоемкости c_p. Если им пренебречь, то получится классический результат [2–4]. В таблице для справки приведены значения χ и ν для трех типов веществ.

Проведенный выше теоретический и численный анализ показал следующее.

1. В неоднородных жидкостях и газах имеется асимптотически устойчивая стационарная точка, в которую "падает" с течением времени система.

2. В таких веществах (с $\nabla\rho$ и ∇T) нет флуктуационных точек — параметры не совершают осциллирующего движения вблизи седловой точки, как было описано в [1] для однородной субстанции.

3. Построенная выше теория теплопроводности, учитывающая наличие вязкости, предсказывает сильный эффект ее влияния на установление температуры по веществу.

Список литературы

[1] *Гладков С.О., Гладышев И.В.* // ЖТФ. 2001. Т. 71. Вып. 4. С. 000.
[2] *Карслоу Г., Егер Д.* Теория теплопроводности. М.: Наука, 1964.
[3] *Лыков А.В.* Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967.
[4] *Беляев Н.М., Рядно А.А.* Методы нестационарной теплопроводности. М.: Высшая школа, 1978.