

01;04;10

Многопоточковая неустойчивость скрещенных электронных пучков в плазме

© А.Е. Дубинов

Российский федеральный ядерный центр
Всероссийский научно-исследовательский институт экспериментальной физики,
607188 Саров, Нижегородская область, Россия
e-mail: dubinov@ntc.vniief.ru

(Поступило в Редакцию 21 февраля 2000 г. В окончательной редакции 3 мая 2000 г.)

Аналитически исследованы многопоточковые неустойчивости скрещенных электронных пучков в плазме. Методом последовательного усложнения рассматриваемых моделей изучены неустойчивость конечного числа скрещенных моноэнергетических пучков, неустойчивость непрерывного распределения скрещенных моноэнергетических пучков по азимуту для различных распределений направленности и сделан вывод о неустойчивости изотропной плазмы по отношению к возбуждению продольных волн.

Естественным обобщением теории известной двухпоточковой неустойчивости электронных пучков в плазме [1] является теория многопоточковой неустойчивости, которая, с одной стороны, служит дискретной моделью кинетической неустойчивости плазмы с непрерывной функцией распределения электронов, а с другой стороны, описывает реальные эксперименты по инжекции многих электронных пучков в плазму.

Существует ряд работ, в которых многопоточковая неустойчивость рассматривалась теоретически [2,3] и экспериментально [4] для системы параллельных электронных пучков, отличавшихся друг от друга плотностью и скоростью электронов в них. Но интересна также ситуация, когда направления распространения пучков непараллельны, поэтому главной целью данной работы является рассмотрение неустойчивости конечного числа скрещенных пучков. Далее методом последовательного усложнения рассматриваемых моделей изучаются неустойчивость непрерывного распределения скрещенных моноэнергетических пучков по азимуту для различных распределений направленности и неустойчивость изотропной плазмы по отношению к возбуждению продольных волн. Укажем, что к последней из перечисленных задач близка работа [5] с исследованием неустойчивости плазмы при анизотропии электронной температуры (см. также [6]). Кроме того, в случае СВЧ [7] и опти-

ческого [8,9] пробоя газа в сверхсильных полях, когда энергия осциллирующих электронов намного больше энергии ионизации атомов, реализуются одномерные изотропные распределения электронов, для рассмотрения которых возможно применение излагаемого в данной работе формализма.

Рассмотрим сначала набор конечного числа прямолинейных неограниченных в поперечном направлении моноэнергетических электронных пучков, распространяющихся в неподвижном нейтрализующем ионном фоне. Пусть скорости всех пучков лежат в одной плоскости (рис. 1). Будем исходить из выведенного в [3] дисперсионного соотношения

$$1 = \sum_{j=1}^N \frac{\omega_{bj}^2}{(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}_j)^2} = \sum_{j=1}^N \frac{\omega_{bj}^2}{(\omega - kv_j \cos \theta_j)^2}, \quad (1)$$

где ω_{bj} — плазменная частота в j -м пучке, \mathbf{v}_j — вектор скорости электронов j -го пучка, N — число пучков, ω и \mathbf{k} — частота и волновой вектор возбуждаемой волны, θ_j — угол между векторами \mathbf{v}_j и \mathbf{k} .

Уравнение (1) удобно переписать следующим образом, предварительно домножив его на k^2 :

$$k^2 = \sum_{j=1}^N \frac{\omega_{bj}^2}{(v_{ph} - v_j \cos \theta_j)^2}, \quad (2)$$

где v_{ph} — фазовая скорость волны.

Анализ уравнения (2) стандартен. В качестве примера рассмотрим систему 8 пучков, имеющих одинаковые значения скорости электронов $v_0 = v_j$ и одинаковые плотности $\omega_{b0} = \omega_{bj}$, направления распространения которых равномерно по азимуту разбивают полный угол 2π (рис. 2, а). Тогда график функции $k^2(v_{ph})$ будет иметь вид, показанный на рис. 3, а. Этот график внешне похож на соответствующий график из [2,3] для системы параллельных моноэнергетических пучков, имеющих разные значения скорости электронов. Однако имеется деталь, различающая графики рис. 3, а и работы [2]:

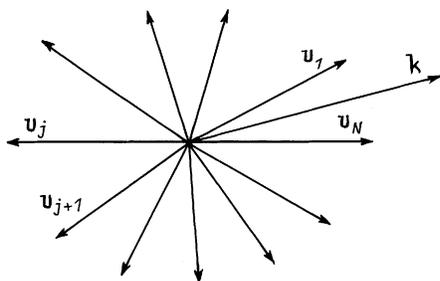


Рис. 1. Общая конфигурация скрещенных электронных пучков.

оггибающая локальных минимумов функции $k^2(v_{ph})$ на рис. 3, *a* выгнута книзу (штриховая линия), в то время как в модели [2] — кверху. Это объясняется тем, что в рассматриваемой нами модели волна с пучками, почти параллельными возбуждаемой волне, взаимодействует эффективнее, чем с почти перпендикулярными; в модели же параллельных пучков [2] волна эффективнее взаимодействует с пучком, скорость электронов в котором близка к среднему значению скорости всего набора пучков.

Корни уравнения (2) легко найти, пересекая график на рис. 3, *a* горизонтальной прямой $k^2 = \text{const}$. Если же эта прямая проходит ниже некоторых локальных минимумов функции $k^2(v_{ph})$, то в уравнении появляются комплексные корни, мнимые части которых определяют инкременты неустойчивости.

Легко видеть, что при достаточно малых k^2 комплексные корни существуют всегда, однако размеры реальных плазменно-пучковых систем обычно ограничены и поэтому в них неустойчивость не развивается, если характерный размер системы L не превышает минималь-

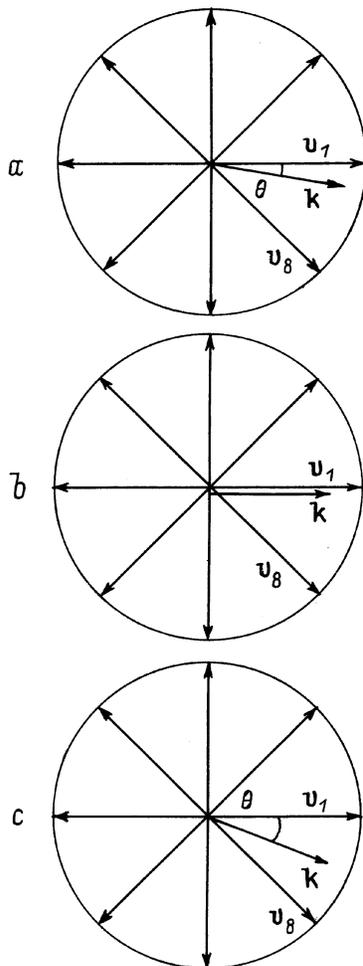


Рис. 2. Конфигурация из восьми одинаковых по плотности и по величине электронной скорости пучков: *a* — общий случай, *b* — случай *a*, *c* — случай *b*.

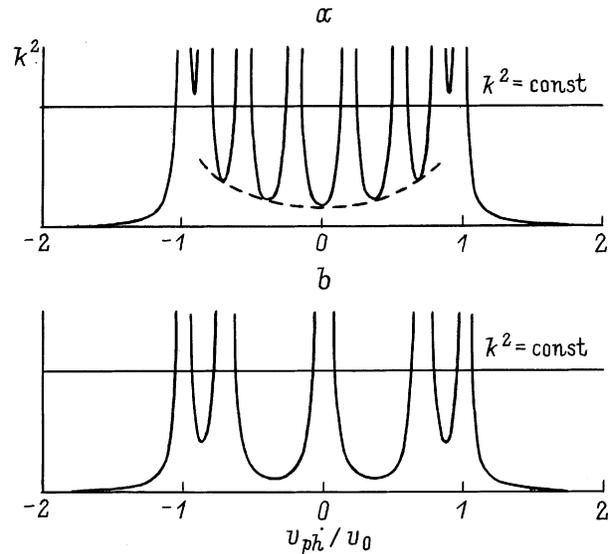


Рис. 3. Зависимость $k^2(v_{ph})$: *a* — общий случай, *b* — случай *a*.

ной длины волны, для которой комплексные корни еще существуют.

В общем случае, а также в рассматриваемом нами случае 8 пучков комплексные корни точно найти нельзя, но их можно найти либо численно, либо используя приближенный графический метод, описанный в [9].

Укажем еще на одну особенность, которую необходимо учитывать при анализе уравнения (2). При определенном подборе векторов скоростей электронов в некоторых пучках проекции скоростей на направление волнового вектора \mathbf{k} могут совпадать. В этом случае вертикальные асимптоты графика функции $k^2(v_{ph})$, соответствующие резонансам волны с такими пучками, сливаются, так как их знаменатели дробей в (2) становятся равными, а парциальные плотности ω_{bj}^2 складываются. При этом значения локальных минимумов графика вблизи таких слившихся резонансов изменяются. Эта ситуация в общем приводит к уменьшению резонансов, причем для симметрично распределенных по углу N пучков существует два случая: когда волновой вектор возбуждаемой волны совпадает по направлению с одним из пучков (случай *a* — рис. 2, *b*) и когда волновой вектор параллелен биссектрисе угла между двумя смежными пучками (случай *b* — рис. 2, *c*), но для четного и нечетного N это уменьшение происходит в обоих случаях по-разному (см. таблицу). В качестве примера график функции $k^2(v_{ph})$ для $N = 8$ и случая *a* с пятью резонансами представлен на рис. 3, *b*.

Интерес представляет также то, как изменяются значения локальных минимумов при варьировании направления вектора \mathbf{k} относительно ориентации системы пучков. Для равномерных по азимуту симметричных угловых распределений это изменение достаточно рассмотреть в диапазоне углов $\varphi \in [0; \pi/N]$ между направлением вектора \mathbf{k} и направлением вектора скорости \mathbf{v}_j одного

Число резонансов при различной ориентации волнового вектора \mathbf{k}

Общее положение	Четное N	Нечетное N
	N	N
Случай a	$\frac{N+2}{2}$	$\frac{N+1}{2}$
Случай b	$\frac{N}{2}$	$\frac{N+1}{2}$

из пучков, причем края этого диапазона представляют собой соответственно случай a и случай b .

На рис. 4 представлена зависимость значений локальных минимумов графика $k^2(v_{ph})$ рассматриваемой симметричной системы 8 пучков. Эта зависимость имеет 4 ветви, так как вследствие симметрии системы пучков значения некоторых локальных минимумов совпадают. Скажем, что здесь имеет место частичное вырождение минимумов. В общем случае произвольного распределения вырождение в указанном смысле может отсутствовать, но можно сконструировать систему пучков, имеющую произвольную, в том числе достаточно высокую степень вырождения.

Обращает на себя внимание то, что вблизи положений вектора \mathbf{k} , соответствующих случаям a и b , значения некоторых локальных максимумов расходятся, что говорит о возможности возбуждения в таких ситуациях очень коротковолновых колебаний. Эти случаи физически соответствуют тому, что в резонанс с волной входит не один пучок, а несколько, количество которых определяется кратностью вырождения.

Перейдем теперь от дискретных угловых распределений к непрерывным. Будем считать, что 2-мерное пространство пронизывают потоки части, имеющих одинаковое значение скорости v_0 , но разные значения плотности, при этом непрерывное угловое распределение будет задаваться функцией направленности $\omega_p^2 f(\theta)$. Как

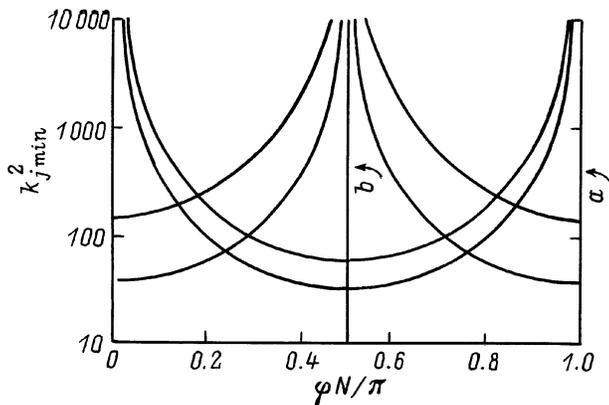


Рис. 4. Зависимость значений локальных минимумов функции $k^2(v_{ph})$ от ориентации вектора \mathbf{k} .

и выше, будем считать, что пространственный заряд скомпенсирован неподвижным ионным фоном.

Волновые свойства такой системы будут определяться величиной комплексной диэлектрической проницаемости

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{k^2} \int_0^{2\pi} \frac{f(\theta) d\theta}{(v_{ph} - v_0 \cos \theta)^2}. \quad (3)$$

Математически задача сводится к вычислению интеграла в (3) и определении величины мнимой части ε . Для ряда модельных функций направленности это удастся сделать точно. Результаты этих вычислений с учетом различной ориентации волнового вектора \mathbf{k} представлены на рис. 5 и в Приложении.

Наибольший интерес представляет равномерная направленность. Как показывают расчеты, мнимая часть (3) в этом случае отлична от нуля, как и ожидалось, при выполнении условия черенковского излучения для продольных волн

$$|v_{ph}/v_0| < 1. \quad (4)$$

Раскачка продольной волны обуславливает при этом развитие черенковской неустойчивости. Отметим, что такая ситуация является довольно общей и не требует наличия, как в [5], анизотропии. Не составляет также труда обобщение этого примера с изотропной направленностью с моанознергетичным распределением на случай изотропной дискретной или непрерывной функцией распределения электронов (см. ниже).

Все последующие примеры касаются анизотропных функций направленности, поэтому результат вычислений существенным образом зависит от направления волнового вектора \mathbf{k} относительно функции направленности $f(\theta)$.

В частности, для случая 1-лепесткового распределения рассмотрены три направления вектора \mathbf{k} . Для поперечного направления \mathbf{k} мнимая часть строго равна нулю (\mathbf{k}_2); для продольного направления \mathbf{k} присутствует лишь прямой черенковский резонанс (\mathbf{k}_4), причем при переходе в другую систему отсчета, движущуюся относительно исходной со скоростью $v_0/2$, мы приходим к рассмотренному выше примеру с изотропной направленностью со скоростью $v_0/2$; для косого направления \mathbf{k} также имеется черенковский резонанс при $|v_{ph}/v_0| = 1$, кроме того, на зависимости $\text{Im } \varepsilon(v_{ph})$ имеются особенности в виде конечных скачков при $v_{ph}/v_0 = \pm \sqrt{2}/2$.

2-лепестковая направленность является обобщением двухпучковой неустойчивости, а 8-лепестковая неустойчивость — обобщением рассмотренной выше модели дискретного набора 8 электронных пучков. Эти примеры также представлены для нескольких направлений волнового вектора \mathbf{k} . В них также имеется черенковская неустойчивость, но в случае 8 лепестков, кроме этого, в зависимости $\text{Im } \varepsilon(v_{ph})$ наблюдается ряд смен знака.

В заключение обратим внимание на немонотонные распределения пучков. Для дискретной по скоростям и равномерной по углу функции распределения

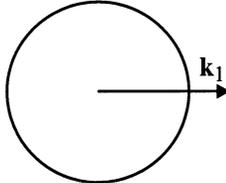
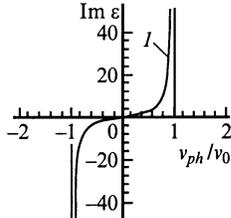
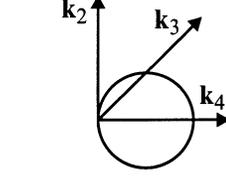
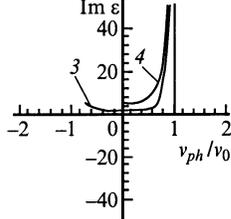
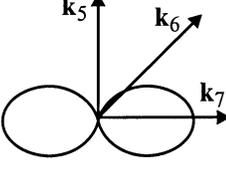
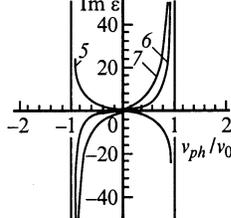
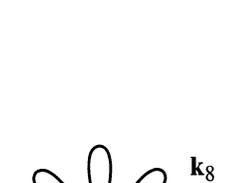
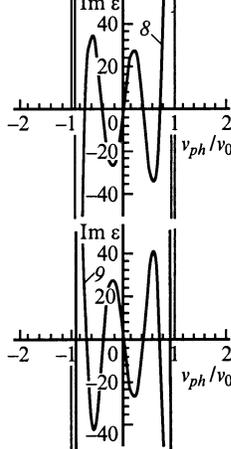
$f(\theta)$ 1	$f(\theta); \mathbf{k}$ 2	Equation (3); Π 3	$\text{Im } \varepsilon(v_{ph})$ 4
$f(\theta) = \text{const}$		$\mathbf{k}_1: (\Pi 1)$	
$f(\theta) = \cos \theta$		$\mathbf{k}_2: (\Pi 2)$ $\mathbf{k}_3: (\Pi 3)$ $\mathbf{k}_4: (\Pi 4)$	
$f(\theta) = \cos^2 \theta$		$\mathbf{k}_5: (\Pi 5)$ $\mathbf{k}_6: (\Pi 6)$ $\mathbf{k}_7: (\Pi 7)$	
$f(\theta) = \cos^2 4\theta$		$\mathbf{k}_8: (\Pi 8)$ $\mathbf{k}_9: (\Pi 9)$	

Рис. 5. Результаты вычислений $\text{Im } \varepsilon(v_{ph})$. 1 — функция направленности $f(\theta)$: $f(\theta) = \text{const}$ — равномерная направленность, $f(\theta) = \cos \theta$ — 1-лепестковая направленность, $f(\theta) = \cos^2 \theta$ — 2-лепестковая направленность, $f(\theta) = \cos^2 4\theta$ — 8-лепестковая направленность; 2 — полярный график $f(\theta)$; ориентация вектора \mathbf{k} ; 3 — точное значение интеграла b (3), в Приложении; 4 — график зависимости $\text{Im } \varepsilon(v_{ph})$.

электронов приходим к анализу мнимого значения суммы в следующем выражении

$$\varepsilon = 1 - \sum_{j=1}^N \frac{\omega_{pj}^2}{k^2} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(v_{ph} - v_j \cos \theta)^2}. \quad (5)$$

Ясно, что сумма в (5) равна сумме слагаемых типа (П1), а $\text{Im}(\varepsilon)$ отлична от нуля в диапазоне фазовых

скоростей

$$\left| \frac{v_{ph}}{\max\{v_j\}} \right| < 1. \quad (6)$$

Аналогичные соображения справедливы и для непрерывных по скорости изотропных функций распределения. Для анализа этой ситуации достаточно заменить в (5) суммирование на интегрирование по v . При этом может быть, что $\text{Im}(\varepsilon) \neq 0$ и здесь.

Итак, от анализа многопучковой неустойчивости конечного набора скрещенных пучков, последовательно усложняя конфигурацию, мы приходим к выводу, что плазма с изотропным и непрерывным (например, максвелловским) распределением может быть неустойчива относительно возбуждения продольных волн.

Автор благодарен проф. А.А. Рухадзе за постоянные консультации, а также Ю.Б. Кудасову — за помощь в работе.

Приложение

Ниже приведены точные значения интеграла I_j из (3), причем их нумерация j соответствует таблице,

$$I_1 = -2\pi i v_{ph} \frac{C}{R^{3/2}}, \quad (\text{П1})$$

$$I_2 = -\frac{2}{R}, \quad \theta \in [0; \pi], \quad (\text{П2})$$

$$I_3 = 2 \frac{\left\{ R^{1/2}(-2v_0^4 - 8v_{ph}^4 + 8v_0^2 v_{ph}^2) + \sqrt{2} [A(v_0^5 - 4v_0^3 v_{ph}^2 + 4v_0 v_{ph}^4)] \right\}}{R^{3/2}(2v_0^2 - 4v_{ph}^2)[2(v_0 + v_{ph})^2 - (v_0 + 2v_{ph})^2]},$$

$$\theta \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4} \right], \quad (\text{П3})$$

$$I_4 = 2 \frac{2 \operatorname{arcth} \left(\frac{v_0 + v_{ph}}{R^{1/2}} \right) - R^{1/2}}{R^{3/2}}, \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]. \quad (\text{П4})$$

Здесь обращаем внимание на пределы интегрирования, указанные в (П2–П4). Но в (П1) и везде далее пределы интегрирования взяты в полном угле, как и представлено в (3),

$$I_5 = 2 \frac{\pi v_{ph} C - R^{1/2}}{v_0^2 R^{1/2}}, \quad (\text{П5})$$

$$I_6 = \frac{\pi i v_{ph} C}{R^{3/2}}, \quad (\text{П6})$$

$$I_7 = -2\pi \frac{iC(v_0^2 v_{ph} - v_{ph}^3) - R^{3/2}}{v_0^2 R^{3/2}}, \quad (\text{П7})$$

$$I_8 = -8\pi \frac{Z_1}{v_0^8 R^{1/2}}, \quad (\text{П8})$$

$$I_9 = 2\pi \frac{Z_2}{v_0^8 R^{3/2}}. \quad (\text{П9})$$

Были использованы следующие обозначения: i — мнимая единица,

$$R = v_0^2 - v_{ph}^2, \quad C = \operatorname{csgn} [i(R^{1/2})^* (v_0 + v_{ph})],$$

звездочкой обозначена операция комплексного сопряжения; $\operatorname{csgn}(\dots)$ — комплексная знаковая функция, определяемая следующим образом:

$$\operatorname{csgn}(z) =$$

$$\begin{cases} 1 & \text{при } (\operatorname{Re}(z) > 0) \cup [(\operatorname{Re}(z) = 0) \cap (\operatorname{Im}(z) \geq 0)], \\ -1 & \text{при } (\operatorname{Re}(z) < 0) \cup [(\operatorname{Re}(z) = 0) \cap (\operatorname{Im}(z) < 0)], \end{cases}$$

$$A = \operatorname{arcth} \frac{(\sqrt{2} - 1)(v_0 - v_{ph})}{R^{1/2}} + \operatorname{arcth} \frac{(\sqrt{2} + 1)(v_0 + v_{ph})}{R^{1/2}},$$

$$Z_1 = -v_0^6 R^{1/2} + 30v_0^4 v_{ph}^2 R^{1/2} - 120v_0^2 v_{ph}^4 R^{1/2} + 112v_{ph}^6 R^{1/2}$$

$$+ 8iv_0^6 v_{ph} C - 76iv_0^4 v_{ph}^3 C + 176iv_0^2 v_{ph}^5 C - 112iv_{ph}^7 C,$$

$$Z_2 = -4v_0^8 R^{1/2} + 124v_0^6 v_{ph}^2 R^{1/2} - 600v_0^4 v_{ph}^4 R^{1/2}$$

$$+ 928v_0^2 v_{ph}^6 R^{1/2} - 448v_{ph}^8 R^{1/2} + 31iv_0^8 v_{ph} C$$

$$- 336iv_0^6 v_{ph}^3 C + 1008iv_0^4 v_{ph}^5 C - 1152iv_0^2 v_{ph}^7 C$$

$$+ 448iv_{ph}^9 C.$$

Список литературы

- [1] Бриггс Р. // Достижения физики плазмы / Пер. с англ. / Под ред. М.С. Рабиновича. М.: Мир, 1974. С. 132–170.
- [2] Dawson J.M. // Phys. Rev. 1960. Vol. 118. N 2. P. 381–389.
- [3] Stix T.H. The Theory of Plasma Waves. New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1962 (Стикс Т. Теория плазменных волн. М.: Атомиздат, 1965. 344 с.).
- [4] Федорченко В.Д., Мазалов Ю.П., Бакай А.С., Руткевич Б.Н. // ЖЭТФ. 1973. Т. 65. Вып. 6 (12). С. 2225–2235.
- [5] Weibel E.S. // Phys. Rev. Lett. 1959. Vol. 2. N 3. P. 83–84.
- [6] Александров А.Ф., Богданкевич Л.С., Рухадзе А.А. Основы электродинамики плазмы. М.: Высшая школа, 1978. 407 с.
- [7] Арутюнян С.Г., Игнатьев А.В., Рухадзе А.А. // Физика плазмы. 1981. Т. 7. № 3. С. 604–608.
- [8] Коробкин В.В., Романовский В.В. // ЖЭТФ. 1993. Т. 103. Вып. 4. С. 1221–1227.
- [9] Смирнов В.М. // Физика плазмы. М.: Атомиздат, 1969. Вып. 2. С. 79–86.