10

# Корреляционный метод поиска угловой фокусировки высших порядков

© А.А. Трубицын

Рязанская государственная радиотехническая академия,
390000 Рязань, Россия

(Поступило в Редакцию 21 марта 2000 г. В окончательной редакции 8 августа 2000 г.)

Предлагается численный метод оценки одного из важнейших параметров электронно-оптических систем порядка угловой фокусировки. Метод основывается на определении величины взаимной корреляции степенной функции и сформированной в ходе траекторного анализа функции угла влета заряженных частиц. Проводится проверки метода на системах, допускающих аналитические решения.

Порядок фокусировки является одной из важнейших характеристик электронно-оптических систем. Так, для электронных линз данный параметр фиксирует величину сферичеких аберраций, а для дисперсионных энерго- и масс-анализаторов определяет степень противоречия, заключенного в требовании одновременного достижения высоких значений пропускания и разрешающей способности.

Численные методы в отличие от аналитических позволяют теоретически исследовать системы, наиболее приближенные к реальным. Описываемый численный метод поиска угловой фокусировки высших порядков можно рассматривать как развитие метода, изложенного в работах [1,2], где показано, что условие фокусировки $N$-го порядка относительно центрального угла влета $\alpha_0$ будет иметь место при

$$\delta_n(\alpha_0) = R^{(n)}(\alpha_0)t'(\alpha_0) - R'(\alpha_0)t^{(n)}(\alpha_0) = 0, \qquad (1)$$

где $n = 2, 3, \ldots, N$; $\alpha$ — начальный угол движения; $R(\alpha) = y_c(\alpha) + x_c(\alpha)t(\alpha)$; $t(\alpha) = \mathrm{tg}(\gamma)$; $\gamma(\alpha)$ и $x_c(\alpha)$, $y_c(\alpha)$ — угол и координаты вылета частицы из области градиента поля.

Однако численный расчет производных высших порядков ($n > 2$) приводит к большим погрешностям, и поэтому функция $\delta_n(\alpha)$ не может быть вычислена с требуемой точностью.

Практика использования изложенного метода показывает, что метод эффективен при поиске фокусировки второго порядка и непригоден для поиска фокусировки более высоких порядков. В этой связи возникает задача адаптации метода и поиску условий фокусировки выше, чем второго порядка. Если ввести функцию

$$F(\alpha) = R''(\alpha)t'(\alpha) - R'(\alpha)t''(\alpha), \qquad (2)$$

то можно показать, что условием фокусировки порядка $N + 2$ являются равенства

$$F^{(n)}(\alpha_0) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, N. \qquad (3)$$

Разложим в ряд Тейлора функцию $F(\alpha)$ вблизи $\alpha_0$:

$$F(\alpha) = F(\alpha_0) + F'(\alpha_0)(\alpha - \alpha_0) + (1/2)F''(\alpha_0)(\alpha - \alpha_0)^2 + \ldots \ldots + (1/N!)F^{(N)}(\alpha_0)(\alpha - \alpha_0)^N + \ldots .$$

С учетом (3) в случае фокусировки порядка $(N + 2)$ имеем

$$F(\alpha) = 1/(N+1)!F^{(N+1)}(\alpha_0)(\alpha - \alpha_0)^{N+1} + 1/(N+2)!F^{(N+2)}(\alpha_0)(\alpha - \alpha_0)^{N+2} + \ldots . \qquad (4)$$

Поскольку $F(\alpha)$, вычисляемая по формуле (2), является результатом численных расчетов, то она будет представлять собой суперпозицию истинных значений функции и некоторого шума, поэтому естественно считать указанную функцию случайной функцией неслучайного аргумента $\alpha$. Обозначим функцию, определяемую в соответствии с формулой (4), как $S^*(\alpha)$. Ясно, что

$$S^*(\alpha) \approx 1/(N+1)!F^{(N+1)}(\alpha_0)(\alpha - \alpha_0)^{N+1}.$$

Будем считать $S^*(\alpha)$ также случайной функцией с пренебрежительно малым уровнем шума, а $1/(N + 1)!F^{(N+1)}(\alpha_0)$ — неслучайным множителем. Достаточно очевидным является то, что в случае фокусировки порядка $N + 2$ функции $F(\alpha)$ и $S^*(\alpha)$ являются коррелированными.

Для оценки степени зависимости сечений двух случайных функций пользуются характеристикой — нормированной взаимной корреляционной функцией [3,4]. Поскольку при умножении случайной функции на неслучайные множители нормированная взаимная корреляционная функция не изменяется, то для оценки корреляционной зависимости функций $F(\alpha)$ и $S^*(\alpha)$ достаточно исследовать корреляцию между $F(\alpha)$ и $S(\alpha) = (\alpha - \alpha_0)^{N+1}$.

При дискретном изменении аргумента $\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_L$ и для случая нулевого сдвига между функциями $F_i = F(\alpha_i)$ и $S_i = S(\alpha_i) = (\alpha_i - \alpha_0)^{N+1}$, $i = 1, 2, \ldots, L$ нормированная взаимная корреляционная функция определяется формулой

$$\rho_0(N) = R_{FS}/(K_F \cdot K_S)^{1/2}, \qquad (5)$$

где

$$R_{FS} = 1/L \sum_{i=1}^{L} (F_i - \bar{F})(S_i - \bar{S}),$$

$$K_F = 1/L \sum_{i=1}^{L} (F_i - \bar{F})^2, \qquad K_S = 1/L \sum_{i=1}^{L} (S_i - \bar{S})^2,$$

$$\bar{F} = 1/L \sum_{i=1}^{L} F_i, \qquad \bar{S} = 1/L \sum_{i=1}^{L} S_i,$$

и чем выше степень корреляции функций $F_i$ и $S_i$, тем ближе к 1 функция $\rho_0$. Здесь мы рассматриваем $\rho_0$ как функцию параметра $N$, определяющего степень соответствующего полинома.

Предлагаемая методика поиска фокусировки высших порядков заключается в следующем. В соответствии с методом [1,2] определяется угол $\alpha_0$ фокусировки второго порядка как результат решения уравния $F(\alpha) = 0$. Затем по формуле (5) оценивается корреляция функции $F(\alpha)$ (см. (2)) со степенной функцией $S(\alpha) = (\alpha - \alpha_0)^{m+1}$ при последовательном изменении значения $m = 0, 1, \ldots, M$, где $M$ — верхняя граница поиска, выбираемая в соответствии с конкретно поставленной практической задачей. Далее определяется величина $N$ $(0 \leqslant N \leqslant M)$, при которой $\rho_0(N) = \max\{\rho_0(0), \rho_0(1), \ldots, \rho_0(M)\}$. Близость $\rho_0(N)$ к 1 будет свидетельствовать о взаимной корреляции $F(\alpha)$ и $S(\alpha) = (\alpha - \alpha_0)^{N+1}$, т.е. о наличии фокусировки порядка $N + 2$. На практике достаточно ограничиться $M = 10-20$.

Во избежание операций с большими числами функцию $S(\alpha) = (\alpha - \alpha_0)^{N+1}$ следует нормировать на множитель $(\alpha_{\max} - \alpha_{\min})^{N+1}$.

Из формулы (4) следует, что при высоких порядках фокусировки функция $F(\alpha)$ будет близка к нулю в достаточно широком диапазоне углов $\alpha$. Поэтому вследствие шума в $F(\alpha)$ при решении уравнения $F(\alpha) = 0$ могут наблюдаться ложные корни. В таких случаях с целью уточнения $\alpha_0$ необходимо оценивать максимум взаимной корреляционной функции $\rho_0(\alpha_0 N)$ по двум переменным: центральному углу фокусировки и степени полинома. Ниже представляются результаты тестирования предлагаемого метода на моделях, допускающих аналитические решения.

Цилиндрическое зеркало, как известно [5], обладает угловой фокусировкой второго порядка вблизи $\alpha_0 \approx 42°$. Траекторный анализ цилиндрического зеркала в соответствии с методикой, описанной в работе [6], показывает, что фокусировка второго порядка $\alpha_0 \approx 42°$ имеет место и при коррекции краевого поля реального прибора с помощью трех пар корректирующих колец, а соответствующее значение нормированной функции взаимной корреляции $F(\alpha)$ и $(\alpha - \alpha_0)^{m+1}$ максимально при $m = 0$ и равно $\rho_0 = 0.99$.

Энергоанализатор с тремя цилиндрическими электродами [7] обеспечивает фокусировку третьего порядка с центральным угололм $\alpha_0 \approx 40°$. Максимум корреляционной функции $\rho_0$ достигает величины 0.97 для $m = 1$ в случае вычисления траекторий заряженных частиц методом Рунге–Кутта в аналитически задаваемом электростатическом поле. При этом параметры фокусировки оказываются в пределах ошибки численного интегрирования уравнений движения по отношению к параметрам, определенным в работе [7].

Траекторный анализ сферического зеркала, обеспечивающего идеальную угловую фокусировку [8] при $\alpha = 90°$, и проведенная оценка соответствующей корреляционной функции $\rho_0 > 0.95$ для максимально используемой в данной работе степени полинома $N + 1 = 25$ позволяют сделать заключение о возможности исследования с помощью описываемой методики электронно-оптических систем с высоким уровнем фокусировки.

## Заключение

Предложен корреляционный метод оценивания порядка угловой фокусировки при численном анализе электронно-оптических систем и проведено его тестирование на системах, допускающих аналитические решения.

## Список литературы


[1] *Горелик В.А.* // Тез. VI Всесоюз. симпозиума по вторично-электронной, фотоэлектронной эмиссии и спектроскопии поверхности твердого тела. М.: Радио, 1986. С. 190–191.

[2] *Горелик В.А., Протопопов О.Д., Трубицын А.А.* // ЖТФ. 1988. Т. 58. Вып. 8. С. 1531–1534.

[3] Справочник по специальным функциям / Под ред. А. Абрамовица, И. Стиган. Пер. с англ. / Под ред. В.А. Диткина, Л.Н. Карамзиной. М.: Наука, 1979.

[4] *Дж. Бендат, А. Пирсол.* Применения корреляционного и спектрального анализа. М.: Мир, 1983.

[5] *Зашквара В.В., Корсунский М.И., Космачев О.С.* // ЖТФ. 1966. Т. 36. Вып. 1. С. 132–138.

[6] *Trubitsyn A.A.* // J. Electron Spectrosc. Relat. Phenom. 1985. Vol. 73. P. 305–310.

[7] *Franzen W., Taaffe J.* // US Patent 4.367.406. 1983.

[8] *Sar-El H.Z.* // Nucl. Instr. Meth. 1966. Vol. 42. N 1. P. 71–76.