

01;09;10

## Амплитудная характеристика циклотронного резонанса

© В.Н. Комаров

Саратовский государственный университет,  
410601 Саратов, Россия

(Поступило в Редакцию 8 июня 2000 г. В окончательной редакции 8 ноября 2000 г.)

Найдена кривая нелинейного резонанса при движении заряда в поле циркулярно поляризованной волны, распространяющейся вдоль постоянного однородного магнитного поля с фазовой скоростью  $u > c$ . Получены некоторые интегралы движения.

В однородном магнитном поле в присутствии электромагнитной волны циркулярной поляризации, распространяющейся вдоль поля с фазовой скоростью  $u = c$ , резонансные эффекты рассмотрены в [1]. В этом случае циклотронная частота содержит интеграл движения  $\Psi_3 = \varepsilon - up_z$  и остается постоянной. Здесь  $\varepsilon$  — полная энергия релятивистского заряда,  $p_z$  — проекция импульса на направление постоянного однородного магнитного поля. Если  $u \neq c$ , то зависимость этой частоты от проекций импульса не образует интеграл движения и резонанс становится нелинейным. Представляют интерес некоторые закономерности движения заряда для этого случая.

1. Предположим, что постоянное однородное магнитное поле направлено вдоль оси  $z$ ,  $\vec{H} = (0, 0, H)$ , электромагнитная волна задана векторным потенциалом

$$\vec{A}(\xi) = -\frac{cE}{w}(\vec{i} \sin \xi - g\vec{j} \cos \xi), \quad \xi = \omega t - kz, \quad (1)$$

$\omega$  — частота волны,  $k$  — волновое число,  $g$  — параметр поляризации, тогда уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{dp_x}{dt} &= eE \left(1 - \frac{v_z}{u}\right) \cos \xi + \frac{e}{c} v_y H, \\ \frac{dp_y}{dt} &= eE \left(1 - \frac{v_z}{u}\right) g \sin \xi - \frac{e}{c} v_x H, \\ \frac{dp_z}{dt} &= \frac{eE}{u} (v_x \cos \xi + v_y g \sin \xi). \end{aligned} \quad (2)$$

Первое уравнение исходной системы (2) умножим на  $p_x$ , второе на  $p_y$  и сложим, тогда

$$\frac{d}{dt} \frac{p_x^2 + p_y^2}{2} = \left(1 - \frac{v_z}{u}\right) eE (p_x \cos \xi + p_y g \sin \xi). \quad (3)$$

Первое уравнение исходной системы умножим на  $p_y$ , второе — на  $p_x$ . Вычтем второе, тогда

$$\begin{aligned} p_y \frac{dp_x}{dt} - p_x \frac{dp_y}{dt} &= \left(1 - \frac{v_z}{u}\right) eE (p_y \cos \xi - p_x g \sin \xi) \\ &+ \frac{e}{c} H (v_y p_y + v_x p_x). \end{aligned} \quad (4)$$

В поперечной плоскости перейдем к полярной системе координат, так что  $p_x = p \cos \varphi$ ,  $p_y = p \sin \varphi$ . После

преобразований

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= \left(1 - \frac{v_z}{u}\right) eE \cos \theta, \\ \frac{d\theta}{dt} &= \left(g\omega - \frac{eE \sin \theta}{p}\right) \cdot \left(1 - \frac{v_z}{u}\right) + \frac{ecH}{\varepsilon}, \\ \theta &= g\xi - \varphi, \quad \varepsilon = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 p^2 + c^2 p_z^2}. \end{aligned} \quad (5)$$

Полученная система уравнений позволяет найти амплитудную характеристику стационарных колебаний в поперечной плоскости.

2. Из системы (5) исключим  $\cos \theta$  и  $\sin \theta$ , тогда

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{v_z}{u}\right)^2 \cdot (eE)^2 &= \left(\frac{dp}{dt}\right)^2 \\ &+ \left[\frac{-d\theta}{dt} + g\omega \left(1 - \frac{v_z}{u}\right) + \frac{ecH}{\varepsilon}\right]^2 \cdot p^2. \end{aligned} \quad (6)$$

При стационарных колебаниях  $dp/dt = 0$ ,  $d\theta/dt = 0$  [2], тогда

$$\left(\frac{eE}{\omega}\right)^2 = \left[g + \frac{ecH}{\omega(1 - v_z/u)\varepsilon}\right]^2 \cdot p^2. \quad (7)$$

Здесь  $p$  — амплитуда установившихся колебаний. В исходной системе уравнений (2) первое уравнение умножим на  $v_x = p_x c^2/\varepsilon$ , второе — на  $v_y$ , сложим полученные равенства. С привлечением третьего уравнения после интегрирования найдем интеграл движения

$$\Psi_3 = \varepsilon - up_z. \quad (8)$$

Без постоянного магнитного поля он описан в [3], отсюда

$$p_z = \frac{-u\Psi_3 + \sqrt{c^2\Psi_3^2 + (u^2 - c^2)(m^2 c^4 + c^2 p^2)} \text{sign}(u - v_z)}{u^2 - c^2}. \quad (9)$$

После преобразований

$$\varepsilon(1 - v_z/u) = \frac{c}{u} \sqrt{\Psi_3^2 + (u^2 - c^2)(m^2 c^2 + p^2)} \text{sign}(u - v_z)$$

уравнение резонансной кривой имеет вид

$$A^2 = \left[ g + \frac{eHu \operatorname{sign}(u - v_z)}{\omega \sqrt{\Psi_3^2 + (u^2 - c^2)(m^2c^2 + p^2)}} \right]^2 \cdot p^2, \quad A = \frac{eE}{\omega}. \quad (10)$$

Если поперечный импульс мал  $p \ll mc$ , то возможно разложение, тогда получим уравнение слабо нелинейных колебаний [2,4]

$$A^2 = \left\{ g + \frac{ecH \operatorname{sign}(u - v_z)}{\omega \sqrt{\Psi_3^2 + (u^2 - c^2)m^2c^2}} \times \left[ 1 - \frac{(u^2 - c^2)p^2}{2[\Psi_3^2(u^2 - c^2)m^2c^2]} \right] \right\}^2 \cdot p^2. \quad (11)$$

Для  $u = c$  слагаемое с магнитным полем в (10) равно  $ecH/(\omega\Psi_3)$  и резонансная частота постоянна [5]. Из (9) следует ограничение на рост поперечного импульса  $p$ , если  $u < c$ . В дальнейшем считаем  $u > c$ ,  $\operatorname{sign}(u - v_z) = 1$ . Из уравнения резонансной кривой (10)

$$\frac{dp^2}{d\omega} = \frac{2p^2 euH}{\omega^2 X} \left( g + \frac{euH}{\omega X} - \frac{euH(u^2 - c^2)p^2}{\omega X^3} \right)^{-1},$$

$$X = \sqrt{\Psi_3^2 + (u^2 - c^2)(m^2c^2 + p^2)}. \quad (12)$$

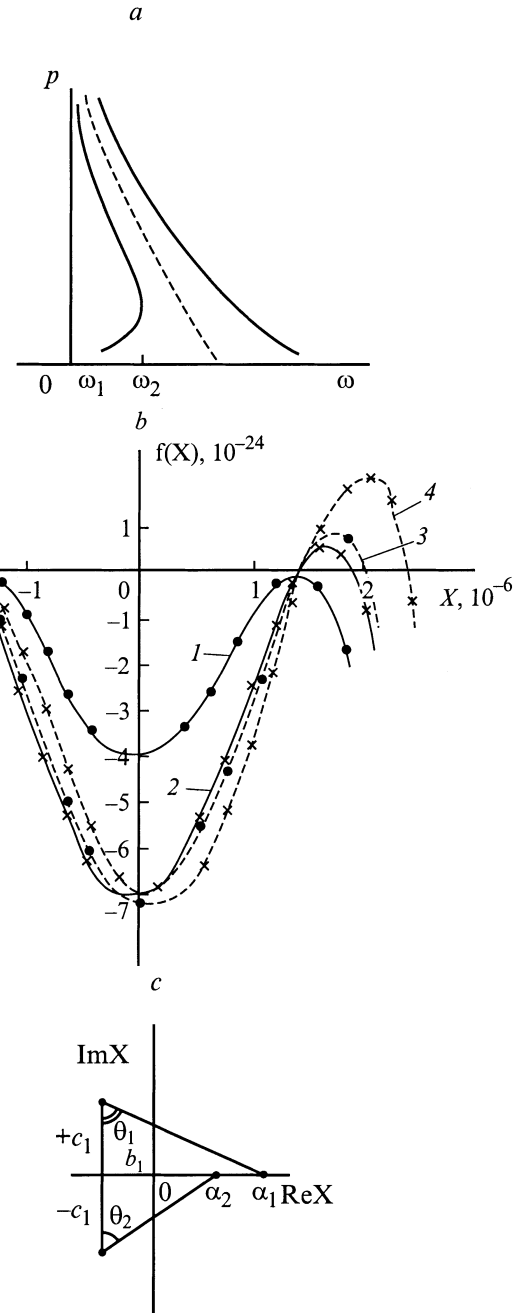
Производная обращается в бесконечность при двух значениях частоты (см. рисунок, а)

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = \frac{euH}{gX^3} (-\Psi_3^2 - (u^2 - c^2)m^2c^2). \quad (13)$$

Из выражения для  $\omega_2$  следует, что резонанс возможен при условии  $eH/g < 0$ , например, для электрона  $e < 0$  и правополяризованной волны  $g = +1$ , распространяющейся по направлению постоянного магнитного поля  $H > 0$ . В интервале частот  $\omega_1 < \omega < \omega_2$  возможно одно из трех значений установившейся амплитуды, для частот  $\omega > \omega_2$  значение амплитуды одно.

3. Уравнения движения (2) представляют систему обыкновенных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, причем отклонение (запаздывание) зависит от времени. В общем случае их можно решать методом шагов на отдельных интервалах времени [6]. Некоторые параметры движения можно получить из интегралов уравнений (5). Из первого уравнения (5) выразим  $dt$  и подставим во второе. После преобразований получим

$$\frac{d}{dp} A \sin \theta + \frac{A \sin \theta}{p} = g + \frac{eH}{k \sqrt{\Psi_3^2 + (u^2 - c^2)(m^2c^2 + p^2)}}, \quad (14)$$



а — общая форма и характерные частоты резонансной кривой; б — зависимость  $f(X)$  при значениях параметров: 1 —  $A = 0$ ,  $H = 0$ ; 2 —  $A = 2 \cdot 10^{-17}$ ,  $H = 0$ ; 3 —  $A = 2 \cdot 10^{-17}$ ,  $2\frac{eH}{k} = -10^{-7}$ ; 4 —  $A = 2 \cdot 10^{-17}$ ,  $2\frac{eH}{k} = -5 \cdot 10^{-7}$ ; в — расположение двух вещественных и двух комплексных корней на комплексной плоскости.

откуда

$$2Ap \sin \theta = g(p^2 - p_0^2) + 2 \frac{eH}{k(u^2 - c^2)} \times \left( \sqrt{\Psi_3^2 + (u^2 - c^2)(m^2c^2 + p^2)} - \sqrt{\Psi_3^2 + (u^2 - c^2)(m^2c^2 + p_0^2)} \right) + 2C.$$

Здесь  $p_0$  — начальное значение поперечного импульса,  $2C = \text{const}$ . При  $u \rightarrow c$  слагаемое с  $H$  переходит в  $(p^2 - p_0^2)/(k\Psi_3)$ . Если постоянного магнитного поля нет или в магнитном поле поперечный импульс мал  $p \ll mc$ , то получим известный интеграл

$$(\bar{p} + (e/c)\bar{A}(\xi))^2 = \text{const}.$$

В дальнейшем слагаемые с нижним пределом  $p_0$  включены в  $2C$ . Объединяя интеграл  $2C$  с первым равенством системы (5), придем к соотношению на модуль поперечного импульса

$$\left[ \frac{2pdp/dt}{\omega(1 - v_z/u)} \right]^2 = 4p^2A^2 - \left[ gp^2 + \frac{2eH}{k(u^2 - c^2)} \times \sqrt{\Psi_3^2 + (u^2 - c^2)(m^2c^2 + p^2)} + 2C \right]^2. \quad (15)$$

С использованием продольного интеграла

$$1 - \frac{v_z}{u} = (u^2 - c^2)X / (\Psi_3 \cdot cu + u^2X), \quad (16)$$

тогда

$$\left[ 2 \frac{dX}{dt} \left( X - \Psi_2 \frac{c}{u} \right) \right]^2 = \frac{\omega^2}{u^4} (u^2 - c^2) f(X), \quad (17)$$

где

$$f(X) = 4A^2(X^2 - a^2)(u^2 - c^2) - \left[ 2Cg(u^2 - c^2) + (X^2 - a^2) + 2g \frac{eH}{k} X \right]^2, \\ a = \sqrt{\Psi_3^2 + (u^2 - c^2)m^2c^2}.$$

Без поля волны из (15) следует сохранение поперечного импульса в постоянном магнитном поле. Уравнения вида (17) описывают изменение полной энергии [7] и другие частные случаи движения релятивистских зарядов в поле поперечной волны [8]. После разделения переменных решение получим в виде эллиптических интегралов

$$t - t_0 = \frac{2u^2}{\omega(u^2 - c^2)} \left[ \int_{X_0}^X \frac{XdX}{\sqrt{f(X)}} - \Psi_3 \frac{c}{u} \int_{X_0}^X \frac{dX}{\sqrt{f(X)}} \right]. \quad (18)$$

Их значения зависят от расположения корней на комплексной плоскости.

4. Подкоренное выражение описывается алгебраической кривой четвертой степени, имеющей два максимума и один минимум. Возможны различные положения этой кривой относительно оси  $X$ . Четыре корня могут быть или все действительные, или два кратных действительных и два различных действительных, или два действительных и два комплексно-сопряженных. При включении поля волны значения  $f(X)$  увеличиваются для  $X < -a$  и  $X > a$  и уменьшаются для  $-a < X < a$ . Включение

магнитного поля нарушает симметрию  $f(X)$ , так как коэффициенты при нечетных степенях определяются его значением. Для  $g = +1$ ,  $e < 0$  включение постоянного магнитного поля приводит к уменьшению значения левого максимума. Поле волны и постоянное магнитное поле оказывают разное действие на значения левого экстремума, если он достигается при  $X < a$ . В достаточно сильном магнитном поле левый максимум достигается при  $X > -a$ , тогда поле волны и постепенное магнитное поле уменьшают значение этого экстремума и увеличение одного из них может привести к комплексным корням. На рисунке, *b* приведены зависимости  $f(X)$  для  $g = +1$ ,  $H > 0$ ,  $u = 1.5c$ ,  $\omega = 6.28 \cdot 10^{10}$  rad/s,  $k = 1.4$  rad/cm,  $\Psi_3 \approx mc^2$ ,  $p_0 = mc/10$ ,  $\theta_0 = 0$ ,  $m$  и  $e$  — масса и заряд электрона. Численные данные в подписе к рисунку выражены в гауссовой системе единиц. Обозначим действительные корни  $\alpha_4 < \alpha_3 < \alpha_2 < \alpha_1$ . Вычисляя интегралы (18) для четырех действительных корней [9] и области  $\alpha_2 < X < \alpha_1$ , получим

$$t = \frac{u^2}{\omega(u^2 - c^2)} \frac{4}{\sqrt{\alpha_1 - \alpha_3(\alpha_2 - \alpha_4)}} \\ \times \left[ \alpha_3 F(\varphi, k) + (\alpha_2 - \alpha_3) \Pi \left( \varphi, \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_3}, k \right) - \Psi_3 \frac{c}{u} F(\varphi, k) \right] + J_1, \quad (19)$$

где

$$k^2 = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_3 - \alpha_4)}{(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_4)}, \quad \sin^2 \varphi = \frac{(\alpha_1 - \alpha_3)(X - \alpha_2)}{(\alpha_1 - \alpha_2)(X - \alpha_3)}.$$

Здесь и дальше в аргументах  $k$  — модуль эллиптических функций. Константа  $J_1$  содержит нижние пределы интегрирования. В случае кратных корней  $\alpha_3 = \alpha_4$  получим

$$t = \frac{u^2}{\omega(u^2 - c^2)} \\ \times \left\{ -2 \arcsin \frac{\alpha_1 + \alpha_2 - 2X}{\alpha_1 - \alpha_2} + \frac{2(\alpha_3 - \Psi_3 c/u)}{\sqrt{(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_3)}} \right. \\ \left. \times \arcsin \frac{(\alpha_3 - \alpha_2)(\alpha_1 - X) + (\alpha_1 - \alpha_3)(X - \alpha_2)}{(\alpha_1 - \alpha_2)(X - \alpha_3)} \right\} + J_2. \quad (20)$$

В случае двух комплексных и двух вещественных корней с использованием известных подстановок [10] получим

$$t = \frac{\mu u^2}{\omega(u^2 - c^2)} \left\{ \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} - \Psi_3 \frac{c}{u} - \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\nu} F(\varphi, k) \right. \\ \left. + \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2\nu} \Pi \left( \varphi, \frac{\nu^2}{\nu^2 - 1}, k \right) + \frac{\sqrt{1 - \nu^2}(\alpha_1 - \alpha_2)}{4\sqrt{\nu^2 + k^2 - \nu^2 \cdot k^2}} \right. \\ \left. \times \arcsin \frac{(2k^2 - 2k^2 \cdot \nu^2 + \nu^2) \sin^2 \varphi + \nu^2 - 1}{1 - \nu^2 \cos^2 \varphi} \right\} + J_3. \quad (21)$$

Здесь

$$\left(\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}\right)^2 = \frac{\cos \theta_1 \alpha_1 - X}{\cos \theta_2 X - \alpha_2}, \quad k^2 = \sin^2 \frac{\theta_1 - \theta_2}{2},$$

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{\alpha_1 - b_1}{c_1}, \quad \operatorname{tg} \theta_2 = \frac{\alpha_2 - b_1}{c_1},$$

$$\nu = \operatorname{tg} \frac{\theta_2 - \theta_1}{2} \operatorname{tg} \frac{\theta_2 + \theta_1}{2}, \quad \alpha_3 = b_1 + ic_1, \quad \alpha_4 = b_1 - ic_1,$$

$$\mu = \sqrt{\cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 / c_1}.$$

5. Интересна зависимость  $X(t)$ , и требуется обращение полученных выражений. Включение поля волны приводит к расхождению корней  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$  и  $\alpha_4$ . Разность  $\alpha_1 - \alpha_2$  характеризует изменение модуля поперечного импульса и соответствует ширине правого максимума. Разность  $\alpha_1 - \alpha_3$  характеризует расстояние между одноименными сторонами максимумов  $f(X)$ , так что  $(\alpha_1 - \alpha_2)/(\alpha_1 - \alpha_3) < 1$  и неравенство выполняется тем лучше, чем слабее поле волны, тогда в (19) приближительно

$$\Pi(\varphi, n, k) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1 - n \sin^2 \varphi) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \approx F(\varphi, k)$$

(22)

и

$$t \approx \frac{u^2}{\omega(u^2 - c^2)} \frac{4}{\sqrt{(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_4)}} \times \left( \alpha_2 - \Psi_3 \frac{c}{u} \right) F(\varphi, k) + J_1. \quad (23)$$

После обращения эллиптического интеграла первого рода [11]

$$X \approx \left[ \alpha_2 - \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_3} \alpha_3 \operatorname{sn}^2(\gamma, k) \right] / \left[ 1 - \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_3} \operatorname{sn}^2(\gamma, k) \right], \quad (24)$$

где

$$\gamma = \frac{(t - J_1)\omega(u^2 - c^2)}{4u^2(\alpha_2 - \Psi_3 c/u)} \sqrt{(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_4)},$$

$$\operatorname{sn}(\gamma, k) = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{t_1(v)}{t_4(v)}, \quad v = \frac{\gamma}{2K},$$

$$K(k) = \frac{\pi}{2} \left[ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 k^4 + \dots \right],$$

$$t_1(v) = 2 \left( h^{\frac{1}{4}} \sin \pi v - h^{\frac{9}{4}} \sin 3\pi v + h^{\frac{25}{4}} \sin 5\pi v \dots \right),$$

$$h = \exp \left( -\pi \frac{K'(k)}{K(k)} \right),$$

$$t_2(v) = 1 - 2h \cos 2\pi v + 2h^4 \cos 4\pi v - 2h^9 \cos 6\pi v \dots \left. \right),$$

$$K'(k) = K(k'), \quad k' = \sqrt{1 - k^2}$$

или приближенно

$$X \approx \alpha_2 + (\alpha_2 - \alpha_3) \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_3} \operatorname{sn}^2(\gamma, k),$$

в слабом поле волны еще  $\alpha_1 - \alpha_3 \approx \alpha_2 - \alpha_3$ , тогда

$$X \approx \alpha_2 + (\alpha_1 - \alpha_2) \operatorname{sn}^2(\gamma, k). \quad (25)$$

Величина  $k^2$  содержит множители, составленные из отношений ширины максимумов к расстоянию между ними и в слабом поле волны  $k^2 \rightarrow 0$ , тогда  $\operatorname{sn} \rightarrow \sin$ . В общем же случае колебания негармонические. При увеличении поля волны и корня  $\alpha_1$  коэффициент при втором слагаемом в правой части (20) может быть мал. Тогда обращение для случая кратных корней приводит к зависимости

$$X \approx \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} - \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} \sin \frac{(t - J_2)\omega(u^2 - c^2)}{2u^2}. \quad (26)$$

В случае комплексных корней упрощение можно получить, если  $\alpha_1 + \alpha_2 \gg \alpha_1 - \alpha_2$ , тогда в (21)

$$t \approx \frac{\mu u^2}{\omega(u^2 - c^2)} \left( \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} - \Psi_3 \frac{c}{u} \right) F(\varphi, k) + J_3, \quad \theta_1 \approx \theta_2,$$

$$\left(\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}\right)^2 = \frac{1 - \cos \varphi}{1 + \cos \varphi} \approx \frac{\alpha_1 - X}{X - \alpha_2}.$$

Откуда

$$X \approx \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} + \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} \times \operatorname{cn} \frac{(t - J_3)\omega(u^2 - c^2)}{u^2 \mu ((\alpha_1 + \alpha_2)/2 - \Psi_3 c/u)}. \quad (27)$$

Здесь

$$\operatorname{cn}(\varphi, k) = \sqrt{\frac{k'}{k}} \frac{t_2(v)}{t_4(v)}, \quad v = \frac{\varphi}{2K},$$

$$t_2(v) = 2 \left( h^{\frac{1}{4}} \cos \pi v + h^{\frac{9}{4}} \cos 3\pi v + h^{\frac{25}{4}} \cos 5\pi v \dots \right).$$

Если  $k \ll 1$ , то  $\operatorname{cn} \rightarrow \cos$ , колебания происходят по гармоническому закону. Из интеграла 2С можно найти циклотронный угол  $\varphi(t)$ , зная зависимость  $z(t)$ . Она определяется из условия  $v_z = p_z c^2 / \varepsilon$  и интеграла  $\Psi_3$

$$z(t) = z_0 + \int_{t_0}^t c \frac{-\Psi_3 u + cX(t)}{-\Psi_3 c + uX(t)} dt. \quad (28)$$

Продольная координата  $z$  содержит линейную зависимость от времени и осцилляции, определяемые характером корней  $f(X)$ . Причем для случая четырех действительных корней дополнительный вклад в линейную зависимость даст постоянная составляющая, содержащаяся в  $\operatorname{sn}^2$ . Она зависит от напряженности поля волны (25). Для корней других типов подобного вклада нет. Аналогичные особенности проявляются и для

циклотронного угла  $\varphi(t)$ . Соответственно  $X(t)$  возможны три различные зависимости  $\varphi(t)$ , что согласуется с выводами [12].

6. При произвольной фазовой скорости волны  $u > c$  циклотронная частота зависит от проекций импульсов как  $euH/\sqrt{\Psi_3^2 + (u^2 - c^2)(m^2c^2 + p^2)}$ . На резонансной кривой для частот  $\omega > \omega_2$  имеется одно значение установившейся амплитуды, для  $0 < \omega < \omega_2$  значение амплитуды одно из трех. Интегралы  $2C, J_i$ , известный  $\Psi_3$ , так же как и исходная система уравнений, описывают движение заряда в импульсном пространстве. Интегралы  $J_i$  определяются характером корней  $f(X)$ . Корни  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  определяют точки поворота в импульсном пространстве. Корень  $\alpha_2$  слабо зависит от напряженности полей. Во всех случаях колебания негармонические. В случае четырех вещественных корней после усреднения по периоду колебаний остается зависимость от напряженности поля волны для продольной координаты и циклотронного угла. Флуктуации полей или начальных условий сводит случай кратных корней к двум другим.

## Список литературы

- [1] Болдырев Е.М. // ЖТФ. 1997. Т. 67. Вып. 2. С. 94–99.
- [2] Ольховский И.И. Курс теоретической механики для физиков. М.: Наука, 1970. 447 с.
- [3] Давыдовский В.Я. // Физика плазмы. 1979. Т. 5. № 2. С. 446–448.
- [4] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. М.: Наука, 1973. 208 с.
- [5] Милантьев В.П. // УФН. 1997. Т. 167. № 1. С. 3–16.
- [6] Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971. 295 с.
- [7] Roberts C.S., Buchsbaum S.J. // Phys. Rev. 1964. Vol. 135. N 2. P. A381–A389.
- [8] Терновский В.В., Хапаев А.М. // ЖВМиМФ. 1996. Т. 36. № 6. С. 114–122.
- [9] Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981. 798 с.
- [10] Бейтмен Г., Эрдейи А. Эллиптические и автоморфные функции, функции Ламе и Матъе. М.: Наука, 1967. 299 с.
- [11] Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т. III. Ч. 2. М.: Наука, 1974. 672 с.
- [12] Володин Б.А., Хапаев А.М. // ЖВМиМФ. 1987. Т. 27. № 2. С. 245–251.