01;03

Динамика свободной поверхности проводящей жидкости в околокритическом электрическом поле

© Н.М. Зубарев, О.В. Зубарева

Институт электрофизики УрО РАН,
620016 Екатеринбург, Россия
e-mail: nick@ami.uran.ru

(Поступило в Редакцию 18 октября 2000 г.)

Рассматривается околокритическое поведение свободной поверхности идеальной проводящей жидкости во внешнем электрическом поле. На основе анализа трехволновых процессов методом интегральных оценок сформулированы достаточные критерии жесткой неустойчивости плоской поверхности. Показано, что нелинейности старших порядков не стабилизируют неустойчивость, вследствие чего рост возмущений носит взрывной характер.

Введение

Электрогидродинамическая неустойчивость свободной поверхности проводящей жидкости в сильном электрическом поле [1,2] ответственна за множество физических процессов, таких как инициация и поддержание эмиссии заряженных частиц, вакуумный пробой, вакуумный разряд и др. Взаимодействие электрического поля и индуцированных им зарядов на поверхности жидкости (жидкого металла) приводит к росту возмущений поверхности, формированию областей со значительной кривизной [3–5]. Закон дисперсии волн на плоской поверхности идеально проводящей жидкости во внешнем электрическом поле величиной E имеет следующий вид [6]:

$$\omega^2 = g|\mathbf{k}| + \frac{\alpha}{\rho}|\mathbf{k}|^3 - \frac{E^2}{4\pi\rho}|\mathbf{k}|^2, \qquad (1)$$

где ω — частота, $\mathbf{k}$ — волновой вектор, g — ускорение силы тяжести, α — коэффициент поверхностного натяжения, ρ — плотность среды.

Из него видно, что если выполняется условие

$$E^2 < E_c^2 = 8\pi\sqrt{g\alpha\rho},$$

то при любых $|\mathbf{k}|$ будет $\omega^2 > 0$ и, следовательно, возмущения поверхности не нарастают со временем. Если же величина поля E, играющая роль внешнего управляющего параметра, превысит критическое значение E_c, то возникает область значений волновых чисел $|\mathbf{k}|$, для которых $\omega^2 < 0$, что соответствует апериодической неустойчивости. Таким образом, условие $E > E_c$ является критерием неустойчивости поверхности по отношению к бесконечно малым возмущениям формы поверхности и поля скоростей.

В работах [7–9], где рассматривались жидкости с различными физическими свойствами, было показано, что нелинейное взаимодействие трех образующих гексагональную структуру стоячих волн может привести к жесткому возбуждению неустойчивости заряженной поверхности. В нашем случае это означает, что даже при докритических полях ($E < E_c$) возмущение достаточной величины может вывести плоскую поверхность из равновесия. Возникает необходимость построения критерием неустойчивости заряженной поверхности проводящей жидкости по отношению к возмущениям конечной амплитуды; критериев, которые позволяли бы по начальным данным (форме поверхности и распределении поля скоростей) дать ответ на вопрос о том, приведет ли исходное возмущение системы к потере устойчивости плоской границы и, как следствие, к взрывному росту острийных структур. Настоящая работа посвящена построению подобных критериев при помощи метода интегральных оценок, примененного ранее ля получения условий коллапса для нелинейного уравнения Шредингера [10,11], нелинейного уравнения Клейна–Гордона [12,13] и различных модификаций уравнения Буссинеска [14].

В разделе 1 мы приводим уравнения безвихревого движения идеальной проводящей жидкости со свободной поверхностью в электрическом поле и даем их гамильтоновскую формулировку. В разделе 2 строится теория возмущений по малому параметру — характерному углу наклона поверхности вплоть до членов четвертого порядка в гамильтониане. Анализ динамики поверхности существенно упрощается в случае малых надкритичностей

$$\varepsilon = (E^2 - E_c^2)/E_c^2, \quad |\varepsilon| \ll 1,$$

когда нарастают только возмущения с волновыми числами, близкими к $k_0 = \sqrt{g\rho/\alpha}$ (это значение волнового числа соответствует так называемой доминантной гармонике возмущений поверхности). Это позволяет нам в разделе 3 построить систему амплитудных уравнений, описывающих нелинейное взаимодействие трех образующих гексагональную структуру стоячих волн, которое является основным при околокритических значениях поля E. В разделе 4 развивается метод интегральных оценок для нескольких взаимодействующих нелинейных волн. При его использовании оказывается возможным перейти от системы уравнений в частных производных для комплексных амплитуд A_1, A_2 и A_3 к дифференциальному неравенству второго порядка для нормы

$$X=\int(|A_1|^2+|A_2|^2+|A_3|^2)d^2r,$$

анализируя которое, мы получаем ряд достаточных критериев жесткого возбуждения электрогидродинамической неустойчивости заряженной поверхности. Примечательно, что большинство из них относятся к докритическим значениям внешнего электрического поля, когда поверхность устойчива в линейном приближении, а развитие неустойчивости связано с трехволновыми процессами. В последующем разделе 5 мы на примере одномерной и квадратной решеток возмущений поверхности для которых трехволновые взаимодействия вырождаются, показываем, что старшие волновые процессы не насыщают неустойчивость, а, наоборот, приводят к взрывному росту амплитуд.

1. Исходные уравнения

Рассмотрим потенциальное движение идеальной проводящей жидкости бесконечной глубины во внешнем однородном электрическом поле величиной E. Будем считать, что вектор напряженности поля направлен по оси z и соответственно в невозмущенном состоянии граница жидкости представляет собой плоскую горизонтальную поверхность $z=0$. Пусть функция $\eta(x,y,t)$ задает отклонение границы от плоской, т.е. занимаемая жидкостью область ограничена свободной поверхностью $z=\eta$.

Потенциал скорости для несжимаемой жидкости Φ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\nabla^2\Phi=0 \qquad (2)$$

со следующими условиями на границе металл–вакуум и на бесконечности:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\frac{(\nabla\Phi)^2}{2}=\frac{(\nabla\varphi)^2-E^2}{8\pi\rho}+\frac{\alpha}{\rho}\nabla_\perp\cdot\frac{\nabla_\perp\eta}{\sqrt{1+(\nabla_\perp\eta)^2}}-g\eta,$$

$$z=\eta,\quad \Phi\to 0,\quad z\to-\infty, \qquad (3)$$

где φ — потенциал электрического поля.

Первый член в правой части динамического граничного условия (нестационарного уравнения Бернулли) отвечает за электростатическое давление, второй — за капиллярное давление, и третий учитывает влияние поля тяжести. Временна́я эволюция свободной поверхности определяется кинематическим соотношением (условием непротекания жидкости через ее границу)

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}=\frac{\partial\Phi}{\partial z}-\nabla_\perp\eta\cdot\nabla_\perp\Phi,\quad z=\eta.$$

Наконец, потенциал электрического поля φ в отсутствие пространственных зарядов удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\nabla^2\varphi=0,$$

которое следует решать совместно с условием эквипотенциальности границы проводящей жидкости и условием однородности поля на бесконечном удалении от поверхности

$$\varphi=0,\quad z=\eta,$$

$$\varphi\to-Ez,\quad z\to\infty.$$

Следует отметить, что выписанные нами уравнения движения обладают гамильтоновской структурой, а функции $\eta(x,y,t)$ и $\psi(x,y,t)=\Phi|_{z=\eta}$ являются канонически сопряженными величинами [15]

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{\delta H}{\delta\eta},\quad \frac{\partial\eta}{\partial t}=\frac{\delta H}{\delta\psi}, \qquad (4)$$

где гамильтониан H с точностью до константы совпадает с полной энергией системы

$$H=\int\limits_{z\leqslant\eta}\frac{(\nabla\Phi)^2}{2}d^3r-\int\limits_{z\geqslant\eta}\frac{(\nabla\varphi)^2}{8\pi\rho}d^3r$$
$$+\int\left[\frac{g\eta^2}{2}+\frac{\alpha}{\rho}\left(\sqrt{1+(\nabla_\perp\eta)^2}-1\right)\right]d^2r.$$

Для дальнейшего рассмотрения оказывается удобным представить гамильтониан в виде поверхностного интеграла. Введем возмущение потенциала электрического поля $\tilde\varphi=\varphi+Ez$. Как несложно обнаружить, возмущенный потенциал $\tilde\varphi$ удовлетворяет уравнению Лапласа,

$$\nabla^2\tilde\varphi=0, \qquad (5)$$

с условиями

$$\tilde\varphi=E\eta,\quad z=\eta, \qquad (6)$$

$$\tilde\varphi\to 0,\quad z\to\infty, \qquad (7)$$

из которых видно, что вносимое поверхностью $z=\eta$ возмущение в распределение электрического поля затухает при $z\to\infty$. Учитывая, что как следствие несжимаемости жидкости справедливо соотношение $\int\tilde\varphi|_{z=\eta}d^2r=0$, и пренебрегая членами, варьирование которых не вносит вклада в уравнения движения, получим при помощи первой формулы Грина

$$H=\int\limits_s\left[\frac{\psi}{2}\frac{\partial\Phi}{\partial n}+\frac{E\eta}{8\pi\rho}\frac{\partial\tilde\varphi}{\partial n}\right]ds$$
$$+\int\left[\frac{g\eta^2}{2}+\frac{\alpha}{\rho}\left(\sqrt{1+(\nabla_\perp\eta)^2}-1\right)\right]d^2r,$$

где ds — дифференциал поверхности, а $\partial/\partial n$ обозначает производную в направлении нормали к поверхности $z=\eta$.

Исключая нормальные производные потенциала $\tilde{\varphi}$ и Φ, можно привести выражение для гамильтониана к виду

$$H = \int \left[\frac{\psi}{2} (\Phi_z - \nabla\eta \cdot \nabla_\perp \Phi)\big|_{z=\eta} + \frac{E\eta}{8\pi\rho} (\tilde{\varphi}_z - \nabla\eta \cdot \nabla_\perp \tilde{\varphi})\big|_{z=\eta} \right] d^2r + \int \left[\frac{g\eta^2}{2} + \frac{\alpha}{\rho} \left(\sqrt{1 + (\nabla_\perp \eta)^2} - 1 \right) \right] d^2r, \quad (8)$$

более удобному для дальнейших преобразований.

2. Малоугловое приближение

Наша дальнейшая задача будет заключаться в том, чтобы исключить из уравнений движения пространственную переменную z, т. е. перейти от исходных трехмерных уравнений к двумерным. Для этого требуется выразить подынтегральное выражение в гамильтониане (8) через канонические переменные η и η. Тогда возникает необходимость решения уравнения (5) с условиями (6) и (7), а также уравнения (2) с условием

$$\Phi = \psi, \quad z = \eta,$$

а также условием (3). Воспользуемся известными решениями уравнения Лапласа для полупространства $z < 0$ и $z > 0$ для затухающих на бесконечности функций

$$\tilde{\varphi}(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{z\tilde{\varphi}(x', y', 0)}{[(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + z^2]^{3/2}} dx'dy', \quad z > 0, \quad (9)$$

$$\Phi(x, y, z) = -\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{z\Phi(x', y', 0)}{[(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + z^2]^{3/2}} dx'dy', \quad z < 0. \quad (10)$$

Нам следует выразить входящие в эти соотношения величины потенциалов $\tilde{\varphi}$ и Φ на плоскости $z = 0$ через их величины на границе $z = \eta$, т. е. через функции $E\eta$ и ψ. Пусть характерные углы наклона поверхности малы $|\nabla_\perp \eta| \ll 1$. В таком случае вблизи плоскости $z = 0$ потенциалы можно разложить в степенные ряды по возмущению поверхности η

$$\tilde{\varphi}(x, y, \eta(x, y)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\eta^n}{n!} \frac{\partial^n \tilde{\varphi}}{\partial z^n}\bigg|_{z=0},$$

$$\Phi(x, y, \eta(x, y)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\eta^n}{n!} \frac{\partial^n \Phi}{\partial z^n}\bigg|_{z=0}. \quad (11)$$

Дифференцируя (9) и (10) по z, обнаруживаем, что

$$\tilde{\varphi}_z\big|_{z=0} = -\hat{k}\tilde{\varphi}\big|_{z=0}, \quad \Phi_z\big|_{z=0} = \hat{k}\Phi\big|_{z=0},$$

где $\hat{k}$ — двумерный интегральный оператор, задаваемый выражением

$$\hat{k}f = -\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x', y')}{[(x' - x)^2 + (y' - y)^2]^{3/2}} dx'dy'.$$

Это соотношение можно рассматривать как следствие того, что оператор Лапласа формально представим в виде

$$\nabla^2 = (\partial_z + \hat{k})(\partial_z - \hat{k}),$$

где левая скобка соответствует асимптотически затухающим при $z \to +\infty$ решениям, а правая — затухающим при $z \to -\infty$.

Исключая производные по z из разложений (11), находим

$$\tilde{\varphi}(x, y, \eta(x, y)) = \hat{T}_+ \tilde{\varphi}(x, y, 0),$$

$$\Phi(x, y, \eta(x, y)) = \hat{T}_- \Phi(x, y, 0),$$

где мы ввели нелинейные операторы сдвига

$$\hat{T}_+ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\eta^n \hat{k}^n}{n!}, \quad \hat{T}_- = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\eta)^n \hat{k}^n}{n!}.$$

Пусть $T_\pm^{-1}$ — операторы, обратные операторам сдвига. Их вид можно определить при помощи метода последовательных приближений

$$T_\pm^{-1} = 1 \mp \eta\hat{k} - \eta^2\hat{k}^2/2 + \eta\hat{k}\eta\hat{k} + \dots .$$

Тогда

$$\tilde{\varphi}(x, y, 0) = E\hat{T}_+^{-1}\eta(x, y), \quad \Phi(x, y, 0) = \hat{T}_-^{-1}\psi(x, y).$$

Данные соотношения вместе с (9) и (10) задают решения уравнений Лапласа с необходимыми граничными условиями в виде бесконечных рядов. Используя эти решения, можно выразить входящие в выражение для гамильтониана всевозможные производные потенциалов $\tilde{\varphi}$ и Φ через функции η и ψ. В итоге находим

$$H = \int \frac{\psi}{2} (\hat{T}_+ \hat{k} \hat{T}_+^{-1} \psi - \nabla_\perp \eta \hat{T}_+ \nabla_\perp \hat{T}_+^{-1} \psi) d^2r - \int \frac{E^2\eta}{8\pi\rho} (\hat{T}_- \hat{k} \hat{T}_-^{-1} \eta + \nabla_\perp \eta \hat{T}_- \nabla_\perp \hat{T}_-^{-1} \eta) d^2r + \int \left[\frac{g\eta^2}{2} + \frac{\alpha}{\rho} \left(\sqrt{1 + (\nabla_\perp \eta)^2} - 1 \right) \right] d^2r.$$

Для описания начальных стадий развития неустойчивости поверхности проводящей жидкости можно ограничиться учетом конечного числа слагаемых в разложении подынтегральных выражений в функционале H по каноническим переменным. Опуская члены выше четвертого порядка малости для возмущения поверхности η и выше второго порядка для потенциала ψ, что оказывается достаточным при малых надкритичностях, и последовательно интегрируя по частям, получим окончательно

$$H = H^{(2)} + H^{(3)} + H^{(4)},$$

$$H^{(2)} = \int \left[\frac{\psi\hat{k}\psi}{2} - \frac{E^2\eta\hat{k}\eta}{8\pi\rho} + \frac{g\eta^2}{2} + \frac{\alpha(\nabla\eta)^2}{2\rho} \right] d^2r,$$

$$H^{(3)} = \frac{E^2}{8\pi\rho} \int \eta\left[(\nabla\eta)^2 - (\hat{k}\eta)^2\right] d^2r,$$

$$H^{(4)} = -\frac{E^2}{8\pi\rho} \int \left[\eta\hat{k}\eta\hat{k}\eta\hat{k}\eta + \eta\hat{k}\eta^2\nabla^2\eta\right] d^2r$$

$$- \int \frac{\alpha(\nabla\eta)^4}{8\rho} d^2r. \qquad (12)$$

Эти выражения в сочетании с (4) представляют собой двумерную редукцию уравнений движения проводящей жидкости во внешнем электрическом поле, применимую при выполнении условия малости характерных углов наклона ее поверхности.

3. Амплитудные уравнения

Рассмотрим нелинейную динамику возмущений свободной поверхности проводящей жидкости в случае, когда величина внешнего электрического поля E близка к своему пороговому значению E_e, т.е. $|\varepsilon| \ll 1$. Из дисперсионного соотношения (1) следует, что при малой надкритичности возбуждаться могут только поверхностные волны с волновыми числами, близкими к k_0. Основным нелинейным взаимодействием будет трехволновое взаимодействие между волнами, векторы которых повернуты относительно друг друга на угол $2\pi/3$. Это несложно понять из условий

$$\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 = 0, \quad |\mathbf{k}_1| = |\mathbf{k}_2| = |\mathbf{k}_3| = \mathbf{k}_0.$$

Вблизи порога естественно перейти к огибающим с помощью замен

$$\eta(\mathbf{r}, t) = \sum_{j=1}^{3} A_j(x_j, y_j, t) e^{i\mathbf{k}_j\mathbf{r}} + \text{k.c.},$$

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \sum_{j=1}^{3} B_j(x_j, y_j, t) e^{i\mathbf{k}_j\mathbf{r}} + \text{k.c.},$$

где $\mathbf{k}_1 = \{k_0, 0\}$, $\mathbf{k}_2 = \{-k_0/2, \sqrt{3}k_0/2\}$ и $\mathbf{k}_3 = \{-k_0/2, -\sqrt{3}k_0/2\}$, а A_j и B_j (здесь $j = 1, 2, 3$) — медленные функции переменных x_j и y_j, образующие ортогональные системы координат, оси абсцисс которых сонаправлены с волновыми векторами $\mathbf{k}_j$. Подобное представление для функций η и ψ соответствует гексагональной структуре возмущений поверхности.

При использовании данных соотношений для возмущений η и ψ можно аппроксимировать входящий в выражение для гамильтониана (12) интегральный оператор $\hat{k}$ дифференциальным. Воспользуемся следующим свойством:

$$\hat{k}e^{i\mathbf{kr}} = |\mathbf{k}|e^{i\mathbf{kr}},$$

связанного с тем, что фурье-образ ядра оператора $\hat{k}$ равен модулю волнового вектора. Рассмотрим плоскую волну вида

$$e^{i\mathbf{kr}} = e^{i(k_0x + q_xx + q_yy)},$$

волновое число которой близко к k_0 (т.е. $|q_x| \ll k_0$ и $|q_y \ll k_0|$). Величину $|\mathbf{k}|$ можно разложить в ряд по q_x и q_y

$$|\mathbf{k}| = \sqrt{(k_0 + q_x)^2 + q_y^2}$$

$$\approx k_0 + q_x + (2k_0)^{-1}q_y^2 - (2k_0^2)^{-1}q_xq_y^2 - (2k_0)^{-3}q_y^4.$$

Это означает, что если мы имеем дело с узким в k-пространстве пакетом волн с несущим волновым вектором $\mathbf{k} = \{k_0, 0\}$ — представим его в виде $A(x, y)e^{ik_0x}$, то оператор $\hat{k}$ можно аппроксимировать следующим образом:

$$\hat{k}A(x, y, t)e^{ik_0x} \approx (k_0A - iA_x - (2k_0)^{-1}A_{yy}$$

$$- i(2k_0^2)^{-1}A_{xyy} - (2k_0)^{-3}A_{yyyy})e^{ik_0x}$$

(аналогичные соотношения получаются для амплитуд A_j в координатах x_j и y_j).

Тогда, подставляя выражения для η и ψ в гамильтониан (12) и проведя необходимые усреднения, находим с точностью до членов более высокого порядка малости[1]

$$H = \sum_{j=1}^{3} \int \left(k_0|B_j|^2 - 2g\varepsilon|A_j|^2 + \frac{g}{k_0^2} \left| \frac{\partial A_j}{\partial x_j} - \frac{i}{2k_0} \frac{\partial^2 A_j}{\partial y_j^2} \right|^2 \right) d^2r$$

$$- 3gk_0 \int (A_1A_2A_3 + A_1^*A_2^*A_3^*) d^2r.$$

Динамические уравнения, описывающие временну́ю эволюцию амплитуд A_j и B_j, находятся из соотношений [16]

$$A_{j_t} = \frac{\delta H}{\delta B_j^*}, \quad B_{j_t} = -\frac{\delta H}{\delta A_j^*},$$

где $j = 1, 2, 3$.

Варьируя выражение для усредненного гамильтониана, получим следующие уравнения для амплитуд:

$$A_{j_t} = k_0B_j,$$

$$B_{j_t} = 2gk_0\varepsilon A_j + \frac{g}{k_0} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{i}{2k_0} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2 A_j + 3gk_0^2 \frac{A_1^*A_2^*A_3^*}{A_j^*}.$$

[1] Отметим, что в эти вычисления удобнее выполнять в k-представлении.

Исключая из этих уравнений амплитуды B_j и переходя к безразмерным величинам при помощи замен

$$\mathbf{r} \to \mathbf{r}/(\sqrt{2}k_0), \quad A_j \to A_j/k_0,$$

$$t \to t/\sqrt{2gk_0}, \quad H \to 2Hg/k_0^2, \tag{13}$$

приходим к следующей системе:

$$A_{1_{tt}} = \varepsilon A_1 + \hat{L}_1^2 A_1 + 3A_2^* A_3^*/2, \tag{14}$$

$$A_{2_{tt}} = \varepsilon A_2 + \hat{L}_2^2 A_2 + 3A_3^* A_1^*/2, \tag{15}$$

$$A_{3_{tt}} = \varepsilon A_3 + \hat{L}_3^2 A_3 + 3A_1^* A_2^*/2, \tag{16}$$

где мы ввели операторы

$$\hat{L}_j = \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{i}{\sqrt{2}} \frac{\partial^2}{\partial y_j^2}, \quad j = 1, 2, 3.$$

Соответствующий этим амплитудным уравнениям гамильтониан записывается в виде

$$H = \int \Bigg[\sum_{j=1}^{3} (|A_j|_t^2 + |\hat{L}_j A_j|^2 - \varepsilon |A_j|^2) - \frac{3}{2}(A_1 A_2 A_3 + A_1^* A_2^* A_3^*) \Bigg] d^2 r. \tag{17}$$

Таким образом, мы получили уравнения, описывающие начальные стадии развития неустойчивости поверхности проводящей жидкости в околокритическом поле, когда применимо малоугловое приближение, а основным нелинейным взаимодействием будет взаимодействие трех стоячих волн, образующих гексагональную решетку. Следует отметить, что аналогичные уравнения описывают неустойчивость заряженной поверхности жидкого гелия [8,17].

4. Критерий взрывной неустойчивости

Как известно, гексагональные структуры на заряженной поверхности различных жидкостей характеризуются жестким режимом возбуждения [7,8]. Для системы уравнений (14)–(16) это означает возможность неограниченного роста амплитуд A_j за конечное время. Действительно, в простейшем случае, когда амплитуды не зависят от пространственных переменных, вещественны и равны между собой $A_1 = A_2 = A_3 = A(t)$, то временна́я динамика величины A описывается обыкновенным дифференциальным уравнением с квадратичной нелинейностью

$$A_{tt} = \varepsilon A + 3A^2/2.$$

Ее влияние приводит к тому, что при соответствующих начальных условиях происходит рост амплитуды с асимптотикой $A \to 4(t - t_c)^{-2}$, т. е. величина A становится бесконечной к моменту t_c. Однако то, что представляется очевидным для пространственно однородных (независящих от координат) решений, требует доказательства для случая произвольных амплитуд A_1, A_2 и A_3. В частности, значительный интерес представляет собой ситуация, когда исходное возмущение поверхности локализовано в некоторой области.

Покажем при помощи метода дифференциальных неравенств, что нелинейное взаимодействие амплитуд A_j в рамках модели (14)–(16) обусловливает взрывной рост возмущений поверхности проводящей жидкости и найдем достаточные условия жесткого возбуждения неустойчивости. Введем для этого нормы

$$X_j(t) = \int |A_j|^2 d^2 r; \quad j = 1, 2, 3$$

и рассмотрим временну́ю эволюцию следующей неотрицательной величины:

$$X = \sum_{j=1}^{3} X_j.$$

Действуя по аналогии с [12], продифференцируем X дважды по t

$$X_{tt} = \sum_{j=1}^{3} \int (2|A_j|_t^2 + A_{j_{tt}} A_j^* + A_{j_{tt}}^* A_j) d^2 r$$

$$= \int \Bigg[2 \sum_{j=1}^{3} (|A_j|_t^2 + |\hat{L}_j A_j|^2 + \varepsilon |A_j^2|) + \frac{9}{2}(A_1 A_2 A_3 + A_1^* A_2^* A_3^*) \Bigg] d^2 r,$$

где мы подставили вместо кратных производных $A_{j_{tt}}$ и $A_{j_{tt}}^*$ соответствующие правые части амплитудных уравнений (14)–(16). Затем, исключая из подынтегрального выражения знаконеопределенную кубическую нелинейность при помощи выражения для гамильтониана (17), приходим к следующему соотношению:

$$X_{tt} + 3H = -\varepsilon X + 5 \sum_{j=1}^{3} \big[|A_j|_t^2 + |\hat{L}_j A_j|^2 \big] d^2 r. \tag{18}$$

Теперь наша задача заключается в том, чтобы аппроксимировать правую часть выражения (18) при помощи величины X и тем самым получить обыкновенное дифференциальное неравенство. Из известного интегрального неравенства Коши–Буняковского для функций $|A_j|$ и $|A_j|_t$,

$$\left[\int |A_j|^2 d^2 r \right] \cdot \left[\int |A_j|_t^2 d^2 r \right] \geqslant \left[\int |A_j| \cdot |A_j|_t d^2 r \right]^2,$$

следует, что $\int |A_j|_t^2 d^2 r \geqslant X_{j_t}^2/(4X_j)$. Учитывая также очевидные соотношения $\int |\hat{L}_j A_j|^2 d^2 r \geqslant 0$ для $j = 1, 2, 3$, получим из (18)

$$X_{tt} + 3H \geqslant -\varepsilon X + \frac{5}{4}\sum_{j=1}^{3}\frac{X_{j_t}^2}{X_j}, \tag{19}$$

Далее, заметим, что, как следствие алгебраического неравенства Коши, справедливо

$$\left[\sum_{j=1}^{3} X_j\right] \cdot \left[\sum_{j=1}^{3} X_{j_t}^2/X_j\right] \geqslant \left[\sum_{j=1}^{3} X_{j_t}\right]^2.$$

В таком случае имеет место следующее соотношение:

$$\sum_{j=1}^{3} X_{j_t}^2/X_j \geqslant X_t^2/X.$$

Подставляя его в (19), приходим к обыкновенному дифференциальному неравенству

$$X_{tt} + 3H \geqslant -\varepsilon X + \frac{5}{4}\frac{X_t^2}{X}, \tag{20}$$

которое будет предметом нашего дальнейшего рассмотрения. Отметим, что аналогичные неравенства возникают при получении достаточных критериев коллапса для различных известных нелинейных уравнений в частных производных [10–14].

Введение новой функции $Y = X^{-1/4}$ позволяет переписать (20) в форме второго закона Ньютона

$$Y_{tt} \leqslant -\frac{\partial P(Y)}{\partial Y}, \quad P(Y) = -\frac{1}{8}(\varepsilon Y^2 + HY^6), \tag{21}$$

где Y играет роль координаты "частицы", P — ее потенциальной энергии.

Пусть скорость "частицы" Y_t отрицательна (в этом случае $X_t > 0$). Тогда, домножая (21) на Y_t, получим

$$U_t(t) \geqslant 0, \quad U(t) = Y_t^2/2 + P(Y),$$

т. е. "частица" набирает энергию U при движении. Понятно, что достаточным критерием обращения величины Y в нуль и соответственно величины X в бесконечность за конечное время будет условие, что "частица" не встретит потенциального барьера, даже если $U_t = 0$, что соответствует знаку равенства в (20). Взрывной рост амплитуд имеет место

a) при $\varepsilon < 0$ и $H > 0$, если $Y(t_0) < |\varepsilon|^{\frac{1}{4}}/(3H)^{\frac{1}{4}}$ и $12U(t_0) \leqslant |\varepsilon|^{\frac{3}{2}}/(3H)^{\frac{1}{2}}$;

b) при $\varepsilon < 0$ и $H > 0$, если $12U(t_0) > |\varepsilon|^{\frac{3}{2}}/(3H)^{\frac{1}{2}}$;

c) при $\varepsilon < 0$ и $H \leqslant 0$;

d) при $\varepsilon \geqslant 0$, если $U(t_0) > 0$,

где $t = t_0$ соответствует начальному моменту времени. При этом момент t_c, когда амплитуды возмущений обращаются в бесконечность, оценивается следующим образом:

$$t_c \leqslant t_0 + \int_0^{Y(t_0)} \frac{dY}{\sqrt{2U(t_0) - 2P(Y)}}.$$

Отметим, что условие $Y_t(t_0) < 0$ в случаях a и c является необязательным: после отражения от потенциальной стенки "частица" достигнет точки $Y = 0$. Полученные нами условия a–d можно рассматривать как достаточные критерии неустойчивости поверхности проводящей жидкости по отношению к возмущениям конечной амплитуды, что отличает их от простейшего критерия линейной неустойчивости $E > E_c$, при получении которого возмущения полагаются бесконечно малыми. Отметим, что условия a–c относятся к случаю докритических внешних полей ($E < E_c$), когда плоская поверхность проводящей жидкости устойчива в линейном приближении, т. е. мы имеем дело с жестким возбуждением электрогидродинамической неустойчивости.

Итак, при выполнении условий a–d уравнения (14)–(16) описывают неограниченный рост амплитуд A_j. При этом применимость модели (14)–(16) для описания развития электрогидродинамической неустойчивости ограничена условием малости амплитуд: по порядку величины абсолютные значения амплитуд $|A_j|$ не должны превышать значение параметра надкритичности ε. В противном случае модель не может ограничиваться рассмотрением только трехволновых процессов. Что касается старших волновых процессов, то возникает вопрос, приведут ли они к стабилизации неустойчивости или, напротив, будут способствовать взрывному росту возмущений (экспериментальные данные [18], а также результаты численного счета [3,4] свидетельствуют в пользу последнего). Сложность оценки их влияния связана с тем, что вклад нелинейностей старших порядков становится сравнимым со вкладом квадратичных нелинейностей модели (14)–(16), только если амплитуда возмущений поверхности близка к характерной длине волны. А тогда нарушаются условия применимости нашего подхода к описанию околокритической динамике заряженной поверхности жидкого металла, основанного на построении амплитудных уравнений[2] Тем не менее выявить характер влияния старших нелинейностей можно, рассматривая одномерную и квадратную решетки возмущений поверхности, для которых трехволновые взаимодействия вырождаются, а определяющими оказываются четырехволновые.

5. Четырехволновые взаимодействия

Будем рассматривать возмущения границы проводящей жидкости с такими симметриями, чтобы влияние трехволновых процессов было пренебрежимо мало. Тем самым мы в чистом виде выделим четрехволновые взаи-

[2] Учет четырехволновых взаимодействий наряду с трехволновыми оказывается вполне возможным для помещенной в сильное электрическое поле диэлектрической жидкости с близкой к единице величиной диэлектрической проницаемости, а также для диэлектрической жидкости с незначительным свободным поверхностным зарядом. Это связано с появлением малых коэффициентов перед квадратичными нелинейностями в соответствующих амплитудных уравнениях. [7,17].

модействия, определяющие характер электрогидродинамической неустойчивости на ее развитых стадиях.

В первую очередь рассмотрим околокритическое поведение заряженной поверхности жидкого металла в предположении о квазиодномерном характере возникающей волны. Пусть волновой вектор сонаправлен с осью абсцисс. Перейдем к огибающим при помощи замен

$$\eta(x,y,t) = A(x,y,t)e^{ik_0x} + A_0(x,y,t)e^{2ik_0x} + \text{k.c.},$$

$$\psi(x,y,t) = B(x,y,t)e^{ik_0x} + B_0(x,y,t)e^{2ik_0x} + \text{k.c.},$$

в которых учтено взаимодействие $k_0 \leftrightarrow 2k_0$. Здесь A, B, A_0 и B_0 — медленно меняющиеся функции пространственных переменных x и y. Подставляя эти соотношения в выражение для гамильтониана (12), находим с точностью до членов четвертого порядка малости

$$H = H^{(2)} + H^{(3)} + H^{(4)},$$

$$H^{(2)} = \int \Bigg[k_0|B|^2 - 2g\varepsilon|A|^2 + \frac{g}{k_0^2}\left|\frac{\partial A}{\partial x} - \frac{i}{2k_0}\frac{\partial^2 A}{\partial y^2}\right|^2 + g|A_0|^2 + 2k_0|B_0|^2 \Bigg] d^2r,$$

$$H^{(3)} = -2gk_0 \int [A^2A_0^* + A^{*2}A_0]d^2r,$$

$$H^{(4)} = \frac{5}{4}gk_0^2 \int |A|^4 d^2r.$$

Амплитудные уравнения для возмущений свободной поверхности записываются в гамильтоновской форме

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta B^*}, \quad \frac{\partial B}{\partial t} = -\frac{\delta H}{\delta A^*},$$

$$\frac{\partial A_0}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta B_0^*}, \quad \frac{\partial B_0}{\partial t} = -\frac{\delta H}{\delta A_0^*}.$$

Варьируя функционал H, а затем исключая величины B и B_0, приходим к уравнениям вида

$$A_{tt} = 2gk_0\varepsilon A + \frac{g}{k_0}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{i}{2k_0}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2 A + 4gk_0^2A^*A_0 - \frac{5}{2}gk_0^3A^2A^*, \tag{22}$$

$$A_{0tt} = -2gk_0A_0 + 4gk_0^2A^2. \tag{23}$$

Поскольку характерные времена изменения амплитуд при малых надкритичностях малы $\omega^2 \sim \varepsilon$, то пренебрежем производными по времени в уравнении (23). Тогда величина A_0 может быть выражена через амплитуду A, играющую роль параметра порядка

$$A_0 \approx 2k_0A^2.$$

Исключая с помощью этого соотношения A_0 из уравнения (22) и переходя к безразмерным величинам при помощи масштабирований (13), получим уравнение для комплексной амплитуды A

$$A_{tt} = \varepsilon A + \hat{L}_1^2 A + sA|A|^2, \quad s = 11/4, \tag{24}$$

которому соответствует следующее выражение для гамильтониана:

$$H = \int \left[|A_t|^2 + |\hat{L}_1 A|^2 - \varepsilon|A|^2 - s|A|^4/2\right] d^2r. \tag{25}$$

Следует отметить, что в случае пренебрежения зависимостью амплитуды A от y уравнение (24) превращается в нелинейное уравнение Клейна–Гордона — так называемую модель $|\psi|^4$. В такой форме его можно получить из уравнения для одномерных возмущений заряженной поверхности жидкого гелия [8] как предел полной экранировки поля под поверхностью. Отметим также, что если не учитывать поперечные модуляции, то уравнение (24) совпадет с получаемым в теории неустойчивости Кельвина–Гельмгольца для случая малого отношения плотностей верхней и нижней жидкостей [12]. Это обусловлено тождественностью математического описания плоского потенциального течения несжимаемой жидкости и двумерного распределения электрического поля в отсутствие пространственных электрических зарядов. Учет более высоких степеней в разложениях по возмущениям поверхности нарушает эту аналогию.

Поскольку ответственный за кинетическую энергию член $|A_t|^2$ и ответственный за четырехволновые процессы член $|A|^4$ входят в подынтегральное выражение гамильтониана (25) с противоположными знаками, то уравнение (24) допускает инфинитные решения. Это означает, что кубическая нелинейность в (24) не стабилизирует линейную неустойчивость, а, наоборот, усиливает ее, приводя при определенных условиях к взрывному росту амплитуды возмущений границы проводящей жидкости A.

Другим возможным случаем, когда трехволновые процессы вырождены, является взаимодействие двух стоячих волн, векторы которых $\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{k}_2$ повернуты друг относительно друга на угол $\pi/2$ (координаты векторов $\mathbf{k}_1 = \{k_0, 0\}$ и $\mathbf{k}_2 = \{0, k_0\}$). Представим возмущение формы поверхности η в виде:

$$\eta(\mathbf{r},t) = \sum_{j=1}^{2}[A_je^{i\mathbf{k}_j\mathbf{r}} + 2k_0A_j^2e^{2i\mathbf{k}_j\mathbf{r}}] + (12\sqrt{2}+16)k_0 \times [A_1A_2e^{i(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2)\mathbf{r}} + A_1A_2^*e^{i(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)\mathbf{r}}] + \text{k.c.},$$

а возмущение потенциала скорости на границе жидкости ψ в виде

$$\psi(\mathbf{r},t) = \sum_{j=1}^{2}[(2k_0)^{-1}A_{j_t}e^{i\mathbf{k}_j\mathbf{r}} + A_jA_{j_t}e^{2i\mathbf{k}_j\mathbf{r}}] + (6+4\sqrt{2}) \times [(A_1A_2)_te^{i(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2)\mathbf{r}} + (A_1A_2^*)_te^{i(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)\mathbf{r}}] + \text{k.c.},$$

где мы учли нелинейные взаимодействия основной пространственной гармоники k_0 с комбинационными гармониками $2k_0$ и $\sqrt{2k_0}$. Данное представление для функций η и ψ соответствует симметрии квадратной решетки.

Действуя аналогично рассмотренному выше квазиодномерному случаю, получим после перехода к безразмерным величинам следующие динамические уравнения:

$$A_{1_{tt}} = \varepsilon A_1 + \hat{L}_1^2 A_1 + sA_1|A_1|^2 + \sigma A_1|A_2|^2,$$

$$A_{2_{tt}} = \varepsilon A_2 + \hat{L}_2^2 A_2 + sA_2|A_2|^2 + \sigma A_2|A_1|^2,$$

где $\sigma = 32\sqrt{2} + 65/2$, а также мы обозначили

$$\hat{L}_1 = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{i}{\sqrt{2}}\frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad \text{и} \quad \hat{L}_2 = \frac{\partial}{\partial y} - \frac{i}{\sqrt{2}}\frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

Интеграл движения для этих уравнений, соответствующий сохраняющейся полной энергии консервативной системы, задается выражением

$$H = \sum_{j=1}^{2} \int \left(|A_j|_t^2 + |\hat{L}_j A_j|^2 - \varepsilon|A_j|^2 - s|A_j|^4/2\right) d^2r$$

$$- \sigma \int |A_1|^2 |A_2|^2 d^2r.$$

Первое слагаемое в правой части этого функционала по структуре совпадает с гамильтонианом (25) для квазиодномерной волны. Последнее слагаемое отвечает за нелинейное взаимодействие пары рассматриваемых волн. Примечательно, что коэффициент σ перед этим слагаемым более чем на один порядок превышает коэффициент s. Это означает, что вклад взаимодействия $k_1 \leftrightarrow k_2$ будет определяющим и, следовательно, квадратная структура возмущений поверхности существенно более выгодна, чем одномерная.

В любом случае как для квадратной решетки, так и для одномерной (ее можно считать частным случаем квадратной, соответствующем условию $A_2 = 0$) четырехволновые взаимодействия будут способствовать развитию неустойчивости, а не подавлять ее. Условия взрывного роста амплитуд A_1 и A_2 можно получить, рассмотрев эволюцию нормы

$$X = \int \left(|A_1|^2 + |A_2|^2\right) d^2r.$$

Действуя по аналогии с разделом 4, приходим к мажорирующему неравенству

$$X_{tt} + 4H \geqslant -2\varepsilon X + \frac{3}{2}\frac{X_t^2}{X},$$

совпадающему с рассмотренным в работе [12]. Введение переменной $Y = X^{-1/2}$ сводит задачу к анализу движения "частицы" с координатой Y в потенциальной яме $P(Y)$

$$Y_{tt} \leqslant -\frac{\partial P(Y)}{\partial Y}, \quad P(Y) = -\frac{1}{2}(\varepsilon Y^2 + HY^4).$$

Анализируя это неравенство для случая, когда в начальный момент времени $t = t_0$ скорость "частицы" направлена к началу координат (т. е. $Y_t(t_0) < 0$), несложно обнаружить, что величина Y обратится в нуль, во-первых, при $\varepsilon > 0$, если $U(t_0) > 0$, во-вторых, при $\varepsilon < 0$ и $H < 0$ и, в-третьих, при $\varepsilon < 0$ и $H > 0$, если $U(t_0) > \varepsilon^2/(8H)$ либо $Y^2(t_0) < |\varepsilon|/(2H)$. Здесь $U(Y)$, как и в разделе 4, обозначает полную механическую энергию "частицы". При выполнении этих условий норма X обращается в бесконечность за конечное время, что и соответствует взрывному росту амплитуд в результате четырехволновых взаимодействий.

Все это дает основание полагать, что нелинейности старших порядков не будут сдерживать взрывной рост амплитуд в модели (14)–(16). А в таком случае интегральные критерии a–d можно рассматривать как достаточные критерии взрывного роста возмущений поверхности жидкого металла во внешнем электрическом поле.

Заключение

Основным результатом настоящей работы является построение достаточных интегральных критериев неустойчивости свободной поверхности идеально проводящей жидкости в околокритическом внешнем электрическом поле. Эти критерии представляют собой обобщение известного условия линейной неустойчивости ($E > E_c$) на случай, когда амплитуды возмущений поля скоростей и формы поверхности конечны. Найденные критерии являются динамическими в том смысле, что они учитывают влияние распределения скоростей в среде в начальный момент времени: роль запасенной кинетической энергии может быть определяющей при жестком механизме неустойчивости.

Анализ трехволновых и четырехволновых нелинейных взаимодействий (это соответствует учете квадратичных и кубических нелинейностей в амплитудных уравнениях) показал, что развитие электрогидродинамической неустойчивости носит взрывной характер, т. е. приводит к появлению сингулярностей в решениях за конечное время. Этот вывод качественно согласуется с результатами численного моделирования развития неустойчивости границы жидкого металла: в работе [4] было показано, что кривизна поверхности нарастает по степенному закону, характерному для взрывной неустойчивости, обусловливая формирование особенностей — точек заострения.

Отметим в заключение, что критерии жесткой неустойчивости, аналогичные критериям a–d, могут быть также получены для диэлектрических жидкостей с индуцированными поверхностными зарядами [9], для диэлектрических жидкостей со свободными поверхностными зарядами (сюда относятся жидкие гелий и водород в электрическом поле) [9,19] и, кроме того, для феррожидкостей в вертикальном магнитном поле.

Авторы благодарны Н.Б. Волкову и А.М. Искольдскому за интерес к работе; Н.М. Зубарев признателен Е.А. Кузнецову за стимулирующие обсуждения.

Данная работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 00-02-17428) и INTAS (проект № 99-1068).

Список литературы

[1] *Tonks L.* // Phys. Rev. 1935. Vol. 48. P. 562–568.
[2] *Френкель Я.И.* // ЖЭТФ. 1936. Т. 6. Вып. 4. С. 350.
[3] *Pregenzer A.L., Marder B.M.* // J. Appl. Phys. 1986. Vol. 60. N 11. P. 3821–3824.
[4] *Suvorov V.G., Litvinov E.A.* // J. Phys. D. 2000. Vol. 33. P. 1245–1251.
[5] *Зубарев Н.М.* // ЖЭТФ. 1998. Т. 114. Вып. 6 (12). С. 2043–2054.
[6] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982.
[7] *Кузнецов Е.А., Спектор М.Д.* // ЖЭТФ. 1976. Т. 71. Вып. 1 (7). С. 262–272.
[8] *Горьков Л.П., Черникова Д.М.* // ДАН СССР. 1976. Т. 228. № 4. С. 829–832.
[9] *Zubarev N.M.* // Phys. Lett. A. 2000. Vol. 272. P. 119–123.
[10] *Kuznetsov E.A., Rasmussen J.J., Rypdal K., Turitsyn S.K.* // Physica D. 1995. Vol. 87. P. 273–284.
[11] *Лушников П.М.* // Письма в ЖЭТФ. 1995. Т. 62. Вып. 5. С. 447–452.
[12] *Кузнецов Е.А., Лушников П.М.* // ЖЭТФ. 1995. Т. 108. Вып. 2 (8). С. 614–630.
[13] *Maslov E.M., Shagalov A.G.* // Phys. Lett. A. 1998. Vol. 239. P. 46–50.
[14] *Turitsyn S.K.* // Phys. Rev. E. 1993. Vol. 47. N 2. P. R796–R799.
[15] *Захаров В.Е.* // ПМТФ. 1968. Вып. 2. С. 86–94.
[16] *Захаров В.Е., Кузнецов Е.А.* // УФН. 1997. Т. 167. № 11. С. 1137–1167.
[17] *Черникова Д.М.* // ФНТ. 1980. Т. 6. Вып. 12. С. 1513–1521.
[18] *Габович М.Д., Порицкий В.Я.* // Письма в ЖЭТФ. 1981. Т. 33. Вып. 6. С. 320–324.
[19] *Зубарев Н.М.* // Письма в ЖТФ. 1981. Т. 26. Вып. 9. С. 65–69.