

01;05

## Взаимодействие и пиннинг плоских вихрей в трехмерной джозефсоновской среде и возможные расстояния между двумя изолированными вихрями

© М.А. Зеликман

Санкт-Петербургский государственный технический университет,  
195251 Санкт-Петербург, Россия

(Поступило в Редакцию 12 июля 2000 г.)

Получены точные выражения для джозефсоновской и магнитной энергий плоских (ламинарных) вихрей, а также энергии и силы пиннинга на ячейках в трехмерной джозефсоновской среде в модели непрерывного вихря. Значения джозефсоновской и магнитной энергий вихря при учете ячеистости среды различны в отличие от континуального случая. Вклады в энергию пиннинга от джозефсоновской и магнитной энергий имеют разные знаки. Предложен алгоритм численного решения системы разностных уравнений для нахождения формы и энергии вихря в его устойчивом и неустойчивом состояниях. Показано, что модель непрерывного вихря не дает правильных значений джозефсоновской и магнитной энергии вихря и составляющих энергии пиннинга. Получены выражения для минимально возможных расстояний между двумя уединенными вихрями при малых значениях параметра пиннинга. Результаты вычислений с высокой точностью подтверждаются компьютерным расчетом. Предложен алгоритм численного решения системы разностных уравнений для нахождения минимально возможных расстояний между двумя уединенными вихрями при немалых значениях параметра пиннинга  $I$ . Минимальное значение  $I$ , при котором расстояние  $N$  между центрами вихрей может равняться 3 ячейкам, равно 1.428, для  $N = 2$   $I_{\min} = 1.947$ . При  $I > 2.907$  центры вихрей могут находиться в соседних ячейках.

### Введение

Исследования высокотемпературных сверхпроводников (ВТСП), проведенные в последние годы, показали, что очень важную роль в происходящих процессах играют возникающие в образце вихревые структуры. В частности, пиннингом и взаимодействием вихрей друг с другом определяются процессы, происходящие при помещении образца ВТСП во внешнее магнитное поле. Движение вихрей ведет к неджоулевому выделению энергии в образце, что приводит к нарушению сверхпроводимости. Решение принципиальной для физики и техники проблемы повышения величин критических токов и полей требует понимания деталей поведения вихрей, их строения, взаимодействия, механизмов и величины возможного пиннинга.

Исследованию структуры вихрей, их пиннинга и его зависимости от магнитного поля посвящено значительное количество работ [1–8]. В [3,4] анализируется поведение одномерных вихрей в длинном джозефсоновском контакте. Однако в этом рассмотрении вихрь предполагается непрерывным в пространстве распределением фазы, а его пиннинг обусловлен взаимодействием с дискретно расположенными центрами пиннинга. На самом же деле джозефсоновская среда представляет собой ячеистую структуру, что уже само по себе обуславливает пиннинг, определяемый энергией, необходимой для перемещения центра вихря из одной ячейки в другую.

В [5] проведен анализ поведения вихря в линейной цепочке СКВИД. Однако в этом случае рассмотрение ведется в двумерной ситуации, т.е. магнитное поле от-

дельной петли учитывается лишь в магнитном потоке, пронизывающем ее саму. В трехмерном же случае вихрь представляет собой систему коаксиальных "соленоидов", поэтому магнитный поток через петлю создается не только ею самой, но и другими токовыми участками, в том числе достаточно удаленными. При этом с уменьшением критического тока контакта растет размер вихря, т.е. число петель, принимающих участие в формировании магнитного потока через центральную ячейку вихря, что компенсирует уменьшение вклада в магнитный поток от каждой петли.

В работах [6,7] получена система уравнений квантования флюксоида в ячейках для трехмерной упорядоченной джозефсоновской среды, на основе которых проведен подробный анализ структуры возможных вихревых состояний. В работе [8] рассматриваются различные конфигурации ламинарных вихрей в трехмерной упорядоченной джозефсоновской среде и характер их возможного движения.

В настоящей работе проводится расчет сил пиннинга плоских (ламинарных) вихрей на ячейках среды и сил взаимоотталкивания вихрей друг от друга в трехмерной джозефсоновской среде, на основе чего рассчитываются минимальные возможные расстояния между двумя уединенными вихрями.

Рассмотрение будет проводиться, как и в [6–8], на упрощенной модели, представляющей собой кубическую решетку с постоянной решетки  $h$ , состоящую из сверхпроводящих проводов, каждая связь которой содержит один джозефсоновский контакт, причем все контакты имеют малые размеры и обладают одной и той же

величиной критического тока  $J_c$ . Ось вихря совпадает с осью решетки. Токовое распределение имеет плоскую структуру, т. е. во всех параллельных плоскостях, перпендикулярных оси вихря и расположенных на расстоянии  $h$  друг от друга, токи распределены идентично. Такая модель, являясь в достаточной степени простой, позволяет сделать определенные выводы о характере происходящих процессов, о структуре вихрей и их динамике. Эти результаты качественно сохраняются и в более сложных моделях.

В [6–8] на основе условия квантования флюксоида в ячейке получены уравнения, описывающие распределение значений скачков фазы на контактах для ламинарных конфигураций

$$\varphi_{m+1} - 2\varphi_m + \varphi_{m-1} = I \sin \varphi_m, \quad (1)$$

где  $I \equiv 2\pi\mu_0 h J_c / \Phi_0$  — безразмерный параметр,  $\Phi_0$  — квант магнитного потока.

Уравнение, аналогичное (1), было впервые получено Френкелем и Конторовой при рассмотрении дислокации в кристалле.

В [6–8] показано, что с ростом параметра  $I$  размер вихря уменьшается, а сила пиннинга растет. Поэтому с ростом  $I$  минимально возможное расстояние между вихрями убывает и при больших  $I$ , когда центры вихрей могут находиться в соседних ячейках, понятие отдельных вихрей теряет смысл. Рассмотрим по отдельности случаи малых и немалых значений параметра  $I$ .

### Малые значения параметра $I$

Рассмотрим случай малых значений параметра  $I$ , когда размер вихрей велик и центры их могут находиться только на большом расстоянии друг от друга. При  $I \ll 1$  распределение становится квазинепрерывным [7]. При этом система (1) преобразуется в дифференциальное уравнение, называемое уравнением  $\sin$ -Гордона,

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = I \sin \varphi, \quad (2)$$

где длина  $x$  измеряется в единицах  $h$ .

Решение уравнения (2) для одиночного вихря имеет вид

$$\varphi(x) = 4 \arctg(\exp(-x\sqrt{I})). \quad (3)$$

График функции (3) приведен на рис. 1.

Поскольку имеющее физический смысл значение фазы определено с точностью до целого числа раз по  $2\pi$ , то можно вычесть  $2\pi$  из значений фазы при  $x < 0$ , что позволяет сделать форму вихря симметричной по координате (штриховая кривая на рис. 1). Это соответствует ограничению  $-\pi < \varphi \leq \pi$ , т. е. из значений  $\varphi_m$ , полученных решением уравнений (1) или (2), следует вычесть целое число раз по  $2\pi$ , так чтобы  $\varphi_m$  попало в указанный диапазон.

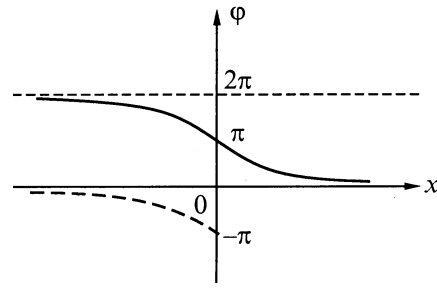


Рис. 1. Решение (3) уравнения (2) для уединенного вихря.

В [9] показано, что уравнение (3) записанное в виде  $d^2\varphi/d\xi^2 = \sin \varphi$ , где  $\xi = x\sqrt{I}$  — расстояние, измеряемое в единицах  $h/\sqrt{I}$ , имеет следующие решения, соответствующие эквидистантному расположению бесчисленного множества вихрей:

$$x = \frac{1}{2} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2 \frac{\varphi}{2} + \gamma^2}}, \quad (4)$$

где  $\varphi$  и  $\gamma$  — постоянные интегрирования.

Существование такого решения объясняется тем, что уравнение (2) не включает в себя пиннинг вихрей, поэтому сила отталкивания, действующая на какой-либо вихрь справа, может быть скомпенсирована только такой же силой слева, т. е. его соседи должны располагаться от него на одинаковом расстоянии. При отсутствии пиннинга стационарное решение, соответствующее двум уединенным вихрям, не существует, так как взаимотталкивание развело бы их на бесконечность. При наличии пиннинга минимально возможное расстояние между центрами вихрей определяется условием равенства силы их взаимного отталкивания максимальной силе пиннинга вихря.

Силу взаимотталкивания вихрей при  $I \ll 1$  можно найти, анализируя решения (4) уравнения (3). Для нахождения силы пиннинга на ячейках среды необходимо учесть дискретность среды.

### 1. Расчет силы взаимного отталкивания вихрей

Энергия токовой конфигурации рассматриваемого типа высотой  $Z$  и длиной  $Y$  определяется выражением [8]

$$E = \varepsilon_0 Y Z \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{2} (\varphi_{k+1} - \varphi_k)^2 + I(1 - \cos \varphi_k) \right], \quad (5)$$

где  $\varepsilon_0 = \Phi_0^2 / 4\pi^2 \mu_0 h^3$  — нормировочная константа.

Далее везде считаем энергии выраженными в единицах  $\varepsilon_0$ . В непрерывном случае выражение (5) переходит в интеграл

$$E(\varphi(\xi)) = \sqrt{I} Y Z \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{2} (\partial\varphi/\partial\xi)^2 + (1 - \cos \varphi) \right] d\xi. \quad (6)$$

Рассмотрим систему эквидистантных вихрей. Подставляя (4) в (6), получим выражение для энергии, приходящейся на один вихрь (на 1 м высоты и 1 м длины:  $Y = Z = 1$ ),

$$\begin{aligned} \frac{E}{\sqrt{I}} &= a \left[ 4(1 + \gamma^2) \frac{E(1/\sqrt{1 + \gamma^2})}{K(1/\sqrt{1 + \gamma^2})} - 2\gamma^2 \right] \\ &= 8\sqrt{1 + \gamma^2} E \left( \frac{1}{\sqrt{1 + \gamma^2}} \right) - \frac{4\gamma^2}{\sqrt{1 + \gamma^2}} K \left( \frac{1}{\sqrt{1 + \gamma^2}} \right), \end{aligned} \quad (7)$$

где  $K(x)$  и  $E(x)$  — полные эллиптические интегралы I и II рода;

$$a = \frac{2}{\sqrt{1 + \gamma^2}} K \left( \frac{1}{\sqrt{1 + \gamma^2}} \right) \quad (8)$$

— пространственный период, т.е. длина, приходящаяся на 1 вихрь.

Случай, когда расстояние между вихрями много больше длины вихря, равной 1 (в размерных величинах  $h/\sqrt{I}$ ), соответствует условию  $\gamma \ll 1$ . Раскладывая выражение (7) в ряд по  $\gamma$  и ограничиваясь первыми членами, получим

$$E/\sqrt{I} = 8 + 2\gamma^2. \quad (9)$$

Используя асимптотику функции  $K(1/\sqrt{1 + \gamma^2})$  при малых  $\gamma$ , получим  $a = 2\ln(4/\gamma)$ , откуда следует, что энергия на единицу длины и высоты уединенного вихря равна  $E = 8\sqrt{I}$ , а энергия, обусловленная взаимодействием вихрей, приходящаяся на 1 вихрь, равна

$$E_{\text{int}} = 2\gamma^2 = 32e^{-a}\sqrt{I}. \quad (10)$$

Поскольку вихри находятся далеко друг от друга, то можно считать, что каждый вихрь взаимодействует только с ближайшим соседом слева и справа. Таким образом, выражение (10) соответствует энергии взаимодействия двух соседних вихрей. Тогда сила взаимного отталкивания двух уединенных вихрей равна

$$F = -\frac{\partial E}{\partial r} = -\frac{\sqrt{I}}{h} \frac{\partial E}{\partial a} = 32\frac{I}{h} e^{-a} = 32\frac{I}{h} e^{-N\sqrt{I}}, \quad (11)$$

где  $N$  — число ячеек между центрами вихрей.

Отметим, что выражения (10) и (11) были получены в [4] из других соображений.

## 2. Расчет пиннинга вихрей на ячейках среды

а) Аналитический расчет. Для нахождения энергии пиннинга вихрей, связанного с дискретностью среды, в случае, когда вихри можно считать квазипрерывными (т.е. при  $I \ll 1$ ), воспользуемся подходом,

предложенным в [10]. Используя соотношение для  $\delta$ -функций

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - k) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(i2\pi nx) \\ &= \text{Re} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(i2\pi nx), \end{aligned} \quad (12)$$

представим выражение (5) для  $Y = Z = 1$  в виде

$$\begin{aligned} E &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(\varphi_k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\varphi(x + \alpha)) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - k) dx \\ &= \text{Re} \int_{-\infty}^{\infty} f(\varphi(x)) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(i2\pi n(x - \alpha)) dx, \end{aligned} \quad (13)$$

где  $\alpha$  — координата центра вихря относительно края ячейки; например, если центр вихря находится на границе двух ячеек, то  $\alpha = 0$ , если же он в центре ячейки, то  $\alpha = 0.5$ .

Если функция  $f(x)$  — четная, то выражение (13) принимает вид

$$E = 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos(2\pi n\alpha) \text{Re} \int_0^{\infty} f(\varphi(x)) \exp(i2\pi nx) dx. \quad (14)$$

Подставляя в (14) выражение (3) для непрерывного уединенного вихря и ограничиваясь членами с  $n = 0, \pm 1$ , получим

$$\begin{aligned} E &= \frac{2}{\sqrt{I}} \int_0^{\infty} f(4 \arctg(\exp(-\xi))) d\xi + \frac{4}{\sqrt{I}} \cos(2\pi\alpha) \\ &\quad \times \text{Re} \int_0^{\infty} f(4 \arctg(\exp(-\xi))) \exp\left(\frac{i2\pi\xi}{\sqrt{I}}\right) d\xi. \end{aligned} \quad (15)$$

а) Рассмотрим джозефсоновскую энергию  $E = I \times \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1 - \cos \varphi_k)$ . В этом случае

$$f_1 = I(1 - \cos(4 \arctg(e^{-\xi}))) = \frac{2I}{\text{ch}^2 \xi}. \quad (16)$$

Учитывая четность  $f_1$  по  $\xi$ , получим [11]

$$\begin{aligned} E_{J_0} &= 4\sqrt{I} \int_0^{\infty} \frac{d\xi}{\text{ch}^2 \xi} = 4\sqrt{I} \lim_{b \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{\cos(b\xi) d\xi}{\text{ch}^2 \xi} \\ &= 4\sqrt{I} \lim_{b \rightarrow 0} \frac{b\pi}{2 \text{sh}(b\pi/2)} = 4\sqrt{I}, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} E_{J_1} &= 8\sqrt{I} \cos(2\pi\alpha) \int_0^{\infty} \frac{\cos(2\pi\xi/\sqrt{I}) d\xi}{\text{ch}^2 \xi} = \frac{8\pi^2}{\text{sh}(\pi^2/\sqrt{I})} \\ &\quad \times \cos(2\pi\alpha) \approx 16\pi^2 \exp\left(-\frac{\pi^2}{\sqrt{I}}\right) \cos(2\pi\alpha). \end{aligned} \quad (18)$$

Максимальное значение  $E_{J_1}$  при разных  $\alpha$  достигается при  $\alpha = 0$ , т.е. когда центр вихря находится на границе двух ячеек.

б) Рассмотрим магнитную энергию  $E_H = 0.5 \times \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\varphi_k - \varphi_{k+1})^2$ . В этом случае

$$f_2 = 8(\operatorname{arctg}(e^{-(x+\alpha)\sqrt{I}}) - \operatorname{arctg}(e^{-(x+\alpha+1)\sqrt{I}}))^2 = 8 \operatorname{arctg}^2 \frac{e^{-\alpha\sqrt{I}} - e^{-(\alpha+1)\sqrt{I}}}{e^{-x\sqrt{I}} - e^{-(x+2\alpha+1)\sqrt{I}}}. \quad (19)$$

При  $\alpha_1 = -0.5$  функция  $f_2(x)$  четная

$$f_2 = 8 \operatorname{arctg}^2 \frac{\operatorname{sh}(\sqrt{I}/2)}{\operatorname{ch}(x\sqrt{I})}. \quad (20)$$

Раскладывая функцию  $\operatorname{arctg}$  в ряд, возводя его в квадрат и почленно интегрируя, получим

$$E_{H_0} = \frac{8}{\sqrt{I}} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{arctg}^2 \frac{\operatorname{sh}(\sqrt{I}/2)}{\operatorname{ch} \xi} d\xi = \frac{16\eta}{\sqrt{I}} \left[ 1 - \frac{4}{9}\eta + \frac{184}{675}\eta^2 - \frac{704}{3675}\eta^3 + \dots \right], \quad (21)$$

где  $\eta = \operatorname{sh}^2(\sqrt{I}/2)$ .

Переходя от ряда по  $\eta$  к ряду по  $I$ , получим

$$E_{H_0} = 4\sqrt{I} - \frac{1}{9}I^{3/2} + \frac{7}{1350}I^{5/2} + \dots \quad (22)$$

Для расчета  $E_{H_1}$  воспользуемся методами теории комплексной переменной

$$E_{H_1} = \frac{32}{\sqrt{I}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \operatorname{arctg} \exp\left(\frac{\sqrt{I}}{2} - \xi\right) - \operatorname{arctg} \exp\left(-\frac{\sqrt{I}}{2} - \xi\right) \right]^2 \exp\left(i\frac{2\pi\xi}{\sqrt{I}}\right) d\xi. \quad (23)$$

Записав функцию комплексной переменной  $\operatorname{arctg} z$  в виде

$$\operatorname{arctg} z = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \frac{1 - iz}{1 + iz},$$

получим

$$E_{H_1} = -\frac{8}{\sqrt{I}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \operatorname{Ln} \frac{1 - i \exp(-z + \sqrt{I}/2)}{1 + i \exp(-z + \sqrt{I}/2)} - \operatorname{Ln} \frac{1 - i \exp(-z - \sqrt{I}/2)}{1 + i \exp(-z - \sqrt{I}/2)} \right]^2 \exp\left(i\frac{2\pi z}{\sqrt{I}}\right) dz. \quad (24)$$

Подынтегральная функция имеет 4 особые точки

$$z = \pm \frac{\sqrt{I}}{2} \pm \frac{\pi}{2}i. \quad (25)$$

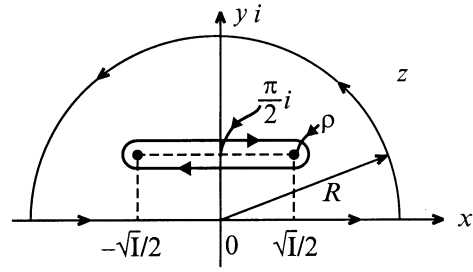


Рис. 2. Контур интегрирования в комплексной плоскости  $z$ .

Для нахождения  $E_{H_1}$  вычислим интеграл по контуру с вырезом, показанному на рис. 2, а затем устремим  $R$  к бесконечности, а  $\rho$  — к нулю. Выражение (24) удовлетворяет смягченной лемме Жордана, т.е. квадрат выражения в скобках равномерно стремится к нулю при  $|z| \rightarrow \infty$  в секторах  $-\varphi_0 \leq \arg z \leq \varphi_1$  и  $\pi - \varphi_2 \leq \arg z \leq \pi + \varphi_0$ . Поэтому интеграл по большой полуокружности стремится к нулю при  $R \rightarrow \infty$ . Легко показать, что интегралы по малым окружностям стремятся к нулю при  $\rho \rightarrow 0$ . Интегралы по верхней и нижней сторонам разреза имеют противоположный знак и различаются по модулю, так как функция в скобках меняется на  $2\pi i$  при обходе точки  $z = (\sqrt{I}/2) + (\pi/2)i$

$$E_{H_1} = \frac{8}{\sqrt{I}} \exp(-\pi^2/\sqrt{I}) \cos(2\pi\alpha) \times \operatorname{Re} \int_{-\sqrt{I}/2}^{\sqrt{I}/2} \left\{ \ln \left| \frac{1 - \exp(-\xi + \sqrt{I}/2)}{1 + \exp(-\xi + \sqrt{I}/2)} \right| - \ln \left| \frac{1 - \exp(-\xi - \sqrt{I}/2)}{1 + \exp(-\xi - \sqrt{I}/2)} \right| \right\}^2 - \left[ \ln \left| \frac{1 - \exp(-\xi + \sqrt{I}/2)}{1 + \exp(-\xi + \sqrt{I}/2)} \right| - \ln \left| \frac{1 - \exp(-\xi - \sqrt{I}/2)}{1 + \exp(-\xi - \sqrt{I}/2)} \right| - 2\pi i \right]^2 \exp \frac{i2\pi\xi}{\sqrt{I}} d\xi = \frac{8}{\sqrt{I}} \exp(-\pi^2/\sqrt{I}) \cos(2\pi\alpha) \operatorname{Re} \int_{-\sqrt{I}/2}^{\sqrt{I}/2} \left[ \ln \left| \operatorname{th} \left( \frac{\xi}{2} - \frac{\sqrt{I}}{4} \right) \right| - \ln \left| \operatorname{th} \left( \frac{\xi}{2} + \frac{\sqrt{I}}{4} \right) \right| \right] 2\pi i \exp \frac{i2\pi\xi}{\sqrt{I}} d\xi = -\frac{16\pi}{\sqrt{I}} \times \exp(-\pi^2/\sqrt{I}) \cos(2\pi\alpha) \int_{-\sqrt{I}/2}^{\sqrt{I}/2} \left[ \ln \left| \operatorname{th} \left( \frac{\xi}{2} - \frac{\sqrt{I}}{4} \right) \right| - \ln \left| \operatorname{th} \left( \frac{\xi}{2} + \frac{\sqrt{I}}{4} \right) \right| \right] \sin \frac{2\pi\xi}{\sqrt{I}} d\xi. \quad (26)$$

Раскладывая подынтегральное выражение в ряд и ограничиваясь первыми двумя членами, получим для

**Таблица 1.** Значения магнитной и джоуфсоновской энергий, найденные разными способами

$I$	Теория(17)	Теория(22)	Численная модель(33,34)		Точное решение	
	$E_{J_0}$	$E_{H_0}$	$E_{H_0}$	$E_{J_0}$	$E_H$	$E_J$
0.15	1.5492	1.5428	1.5428	1.5492	1.5525	1.5393
0.40	2.5298	2.5022	2.5022	2.5298	2.5452	2.486
0.70	3.347	3.2836	3.2837	3.347	3.3853	3.2393
1.00	4.000	3.894	3.894	4.000	4.073	3.806

**Таблица 2.** Значения составляющих энергии пиннинга, найденные разными способами

$I$	Теория (31)	Теория (32)	Численная модель (33,34)		Точное решение			Теория (31,32)
	$\Delta E_J$	$\Delta E_H$	$\Delta E_H$	$\Delta E_J$	$\Delta E_H$	$\Delta E_J$	$E_p$	$E_p$
0.15	2.705E-9	-6.6477E-10	-6.6479E-10	2.705E-9	-6.095E-8	6.617E-8	5.22E-9	2.04E-9
0.40	5.27E-5	-1.2849E-5	-1.2852E-5	5.27E-5	-6.21E-4	7.14E-4	9.29E-5	3.99E-5
0.70	2.38E-3	-5.734E-4	-5.738E-4	2.38E-3	-1.86E-2	2.24E-2	3.90E-3	1.81E-3
1.00	1.63E-2	-3.897E-3	-3.902E-3	1.63E-2	-0.095	0.121	0.026	0.0124

интеграла следующее выражение [11]:

$$\begin{aligned} & \sqrt{I} \int_{-\sqrt{I}/2}^{\sqrt{I}/2} \left[ \ln \left| \frac{\xi - 0.5}{\xi + 0.5} \right| \sin 2\pi\xi + \frac{I}{6} \xi \sin 2\pi\xi \right] d\xi \\ &= -2\sqrt{I} \int_0^1 \ln \xi \sin 2\pi\xi d\xi + \frac{I\sqrt{I}}{12\pi} = \frac{\sqrt{I}}{\pi} (C + \ln 2\pi \\ & - \text{Ci}(2\pi) + I/12) = \frac{\sqrt{I}}{\pi} (-S_1(2\pi) + I/12), \end{aligned} \quad (27)$$

где  $C$  — постоянная Эйлера,  $\text{Ci}(x)$  — интегральный косинус,

$$S_1(2\pi) = \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos x}{x} dx = 2.43766 \dots$$

Максимум  $E_{H_1}$  имеет место при  $\alpha = 0$ , однако начальный сдвиг на  $\alpha_1 = -0.5$  (см. выражение (20)) означает, что этот максимум соответствует положению центра вихря в центре ячейки. Учтя начальный сдвиг для приведения к единому началу отсчета по  $\alpha$ , окончательно получим для  $E_{H_1}$

$$E_{H_1} = -16 \exp(-\pi^2/\sqrt{I}) \cos(2\pi\alpha)(2.43766 - I/12), \quad (28)$$

где положению центра вихря в центре ячейки соответствует  $\alpha = 0.5$ .

Полная энергия вихря равна

$$E = E_{J_0} + E_{H_0} + (E_{J_1} + E_{H_1}) \cos 2\pi\alpha. \quad (29)$$

Будем называть энергией пиннинга  $E_p$ , как и в [8], разность между максимальной и минимальной энергиями

вихря при различных  $\alpha$ , т.е. в положениях с центром вихря на границе двух ячеек ( $\alpha = 0$ ) и в центре ячейки ( $\alpha = 0.5$ )

$$E_p = E(0) - E(0.5) = \Delta E_J + \Delta E_H. \quad (30)$$

Согласно проведенному анализу величины  $\Delta E_J$  и  $\Delta E_H$  должны быть равны

$$\Delta E_J = 32\pi^2 \exp\left(-\frac{\pi^2}{\sqrt{I}}\right), \quad (31)$$

$$\Delta E_H = -32 \exp\left(-\frac{\pi^2}{\sqrt{I}}\right) (2.43766 - I/12). \quad (32)$$

Для проверки правильности полученных формул был проведен точный компьютерный расчет величин

$$\begin{aligned} E_J(\alpha) &= I \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1 - \cos \varphi_k), \\ E_H(\alpha) &= \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\varphi_{k+1} - \varphi_k)^2 \end{aligned} \quad (33)$$

с использованием для  $\varphi_k$  выражения (3), соответствующего вихрю в непрерывной среде

$$\varphi_k(\alpha) = 4 \arctg(\exp(-k - \alpha)\sqrt{I}) \quad (34)$$

при  $\alpha = 0$  и  $\alpha = 0.5$ . Разность полученных значений, согласно (30), дает величины  $\Delta E_J$  и  $\Delta E_H$ , а их полусумма, согласно (29), равна  $E_{J_0}$  и  $E_{H_0}$ .

Полученные таким образом результаты для некоторых значений параметра  $I$ , а также значения энергий  $E_{J_0}$ ,  $E_{H_0}$ ,  $\Delta E_J$  и  $\Delta E_H$ , рассчитанные соответственно по формулам (17), (22), (31) и (32), сведены в таблицы 1 и 2.

б) Компьютерный расчет энергии пиннинга. Проведенное выше рассмотрение основывалось на функции (34), соответствующей решению (3) дифференциального уравнения (2), которое приближенно заменяет систему разностных уравнений (1) при малых  $I$ . Для нахождения пределов применимости такого подхода следует сравнить полученные результаты с точным решением системы (1).

Для нахождения численного решения системы (1) запишем ее в виде рекуррентного соотношения

$$\varphi_{m+1} = 2\varphi_m - \varphi_{m-1} + I \sin \varphi_m. \quad (35)$$

Тогда, зная значения скачка фазы на двух соседних контактах, можно найти всю конфигурацию. Рассмотрим случай уединенного вихря. В состоянии устойчивого равновесия [8] значения скачка фазы на контактах центральной ячейки вихря связаны соотношением  $\varphi_{-1} = 2\pi - \varphi_1$ . Выбрав некоторое значение  $\varphi_1$  и подставляя в (35) в качестве двух последовательных значений  $\varphi_k$  величины  $(2\pi - \varphi_1)$  и  $\varphi_1$ , начнем расчет последующих значений скачка фазы. Из формы вихря (рис. 1) следует, что если очередное рассчитанное значение окажется меньше нуля или больше предыдущего, то исходное значение  $\varphi_1$  увеличивается или уменьшается соответственно и расчет начинается снова. Таким образом можно найти все множество значений  $\varphi_k$ , соответствующее уединенному вихрю, и по формуле (5) рассчитать джозефсоновскую и магнитную энергии.

Аналогичный расчет можно провести и для неустойчивой конфигурации вихря. В этом случае  $\varphi_{-1} = \pi$  [8], поэтому в качестве двух последовательных значений  $\varphi_k$  выбираются величины  $\pi$  и  $\varphi_1$ , а далее последовательность операций та же.

Компьютерная реализация описанных алгоритмов позволила рассчитать джозефсоновскую и магнитную энергии, а также энергии пиннинга. Результаты расчета приведены в табл. 1 и 2.

в) Анализ полученных результатов. В работе [4] на базе [10] проводился расчет энергий и сил пиннинга одномерных вихрей в длинном джозефсоновском контакте, также описываемых системой уравнений (1). Полученные в настоящей главе результаты отличаются от результатов [4,10].

Сравнение результатов расчета на основе полученных выше аналитических выражений с результатами компьютерных вычислений позволяет сделать следующие выводы.

1. Точный численный расчет величин  $E_{J_0} = 0.5(E_J(0) + E_J(0.5))$ ,  $E_{H_0} = 0.5(E_H(0) + E_H(0.5))$ ,  $\Delta E_J = E_J(0) - E_J(0.5)$ ,  $\Delta E_H = E_H(0) - E_H(0.5)$  на основе выражений (33) и (34) (столбцы 4, 5 в табл. 1 и 2) с высокой точностью подтверждает правильность формул (17), (22), (31) и (32) (столбцы 2, 3 в табл. 1 и 2).

2. Выражения (17) и (31) для джозефсоновских энергий совпадают с формулами, полученными в [4,10] для

одномерных вихрей в длинном джозефсоновском контакте, также описываемых системой уравнений (1).

3. Выражения (22) и (32) для магнитных энергий отличаются от соотношений

$$E_H = 4\sqrt{I} \quad \text{и} \quad \Delta E_H = 32\pi^2 \exp\left(-\frac{\pi^2}{\sqrt{I}}\right),$$

предложенных в [4,10], причем если в случае  $E_H$  речь идет о поправках к формуле, то в случае  $\Delta E_H$  значения имеют противоположные знаки и отличаются по модулю примерно в 4 раза. Эти отличия связаны с тем, что автор [10] необоснованно использовал при расчете магнитной энергии  $E_H$  в (15) вместо функции (19) функцию  $f_2 = 0.5(\varphi')^2 = I(1 - \cos \varphi) = f_1$ , что и привело его к тем же результатам, что и для джозефсоновской энергии  $E_J$ .

Сравнение величин энергий, полученных при точном численном решении системы разностных уравнений (столбцы 6 и 7 в табл. 1 и 2), с результатами применения приближенного подхода, использующего решение (3) дифференциального уравнения (2), приводит к следующим выводам.

1. Соответствующие двум подходам значения магнитных и джозефсоновских энергий (столбцы 4 и 6, 5 и 7 в табл. 1) различаются, хотя и на небольшие, но существенные по смыслу величины.

2. Точные значения джозефсоновской и магнитной составляющих энергии пиннинга  $\Delta E_J$  и  $\Delta E_H$  (столбцы 5 и 7 в табл. 2) в десятки и сотни раз больше значений, полученных на базе приближенного подхода (столбцы 4 и 6 в табл. 2).

3. Несмотря на это, вследствие различия знаков джозефсоновской и магнитной составляющих энергии пиннинга точные значения суммарной энергии пиннинга  $E_p = \Delta E_J + \Delta E_H$  (столбец 8 в табл. 2) несущественно отличаются от результатов приближенного рассмотрения (столбец 9 в табл. 2). Факт удовлетворительного совпадения результатов приближенного и точного расчета суммарной энергии пиннинга при резком несогласии результатов по джозефсоновской и магнитной составляющим энергии пиннинга, скорее всего, не является случайным и имеет какую-то внутреннюю причину. Обоснование возможности использования приближенного подхода для нахождения суммарной энергии пиннинга представляет собой отдельную математическую задачу, подхода к решению которой пока не видно.

Сравнение результатов из табл. 2 позволяет записать точное значение суммарной энергии пиннинга в виде

$$E_p = k64\pi^2 \exp\left(-\frac{\pi^2}{\sqrt{I}}\right), \quad (36)$$

где коэффициент  $k$  имеет величину от 0.8 до 1 в зависимости от значения параметра  $I$ .

Отметим, что в работе [4] полная энергия пиннинга описывается выражением (18), т. е. примерно вдвое меньше (36).

**Таблица 3.** Значения минимальных возможных расстояний между вихрями, найденные разными способами

$I$	$N_{\min}$ из [4]	$N_{\min}$ по (39)	$N_{\min}$ из [12]
0.07	117.9	115.3	115
0.08	102.3	99.8	100
0.10	80.5	78.4	78
0.15	52.0	50.2	50
0.20	38.1	36.5	37
0.30	24.4	23.2	23
0.40	17.8	16.7	17
0.50	13.9	12.9	13
0.60	11.4	10.5	11
0.70	9.6	8.7	9
1.00	6.4	5.7	6

### 3. Возможные расстояния между двумя изолированными вихрями

Для нахождения силы пиннинга вихря возьмем производную по координате от энергии вихря (29)

$$F_p = \frac{\partial E}{\partial r} = \frac{2\pi}{h}(E_{J_1} + E_{H_1}) \sin(2\pi\alpha). \quad (37)$$

Минимально возможное расстояние  $N_{\min}$  между центрами двух уединенных вихрей определяется условием равенства силы их взаимного отталкивания (11) максимальной силе пиннинга вихря

$$32 \frac{I}{h} e^{-N_{\min} \sqrt{I}} = \frac{2\pi}{h} k 32 \pi^2 \exp\left(-\frac{\pi^2}{\sqrt{I}}\right), \quad (38)$$

откуда

$$N_{\min} = -\frac{1}{\sqrt{I}} \ln\left(\frac{2k\pi^3}{I} \exp\left(-\frac{\pi^2}{\sqrt{I}}\right)\right). \quad (39)$$

В аналогичном выражении для  $N_{\min}$ , полученном в [4], отсутствует коэффициент  $2k$ . При малых значениях  $I$  это может привести к заметным количественным расхождениям, что можно видеть, сравнивая данные, помещенные в табл. 3. В первой строке (табл. 3) приведены значения  $N_{\min}$ , полученные в [4], во второй строке — при расчете по формуле (39), а в третьей — минимальные расстояния  $d_{\min}$  между крайним вихрем и его соседом в конфигурации, образующейся вблизи границы образца при монотонном увеличении внешнего магнитного поля [12], полученные при точном численном решении системы (1).

При сравнении данных из табл. 3 следует учесть, что точное значение  $N_{\min}$  может равняться  $d_{\min}$  или быть на 1 больше. Причина этого такова. При минимально возможном расстоянии  $N_{\min}$  между двумя уединенными вихрями каждый из них находится на крайней возможной позиции в соответствующей ячейке. Если же за одним из вихрей (например, правым) есть еще и другие, которые позволяют ему отодвинуться еще правее в той же ячейке,

то левый вихрь сможет удерживаться на расстоянии, меньшем полученного в предположении двух изолированных вихрей. Если при этом он останется в той же ячейке, то  $d_{\min} = N_{\min}$ , если же он сместится в соседнюю ячейку, то  $d_{\min} = N_{\min} - 1$ .

Из табл. 3 видно, что расчет по (39) дает значения, с учетом вышесказанного практически полностью совпадающие с результатами численного решения системы (1), чего нельзя сказать о расчете по формулам [4]. Это совпадение подтверждает правильность как теоретического анализа, позволившего получить выражение (39), так и алгоритма численного решения системы (1) для нахождения  $d_{\min}$ .

### Немалые значения параметра $I$

Рассмотрим теперь немалые значения  $I$ , при которых размер вихря составляет лишь несколько ячеек. В этом случае переход от системы разностных уравнений к дифференциальному уравнению невозможен. Поэтому результаты, полученные выше, в такой ситуации неприменимы и необходимо исследовать дискретную систему (1). Найдем возможные расстояния между двумя изолированными плоскими (ламинарными) вихрями.

Проведем анализ системы (1) для случая двух вихрей, находящихся далеко от границы, центры которых расположены на расстоянии  $N$  ячеек друг от друга (рис. 3) в рядах с номерами 1 и  $(N + 1)$  (номера указаны в кружках на рис. 3). При удалении влево от ячейки 1 и вправо от ячейки с номером  $(N + 1)$  токи убывают и стремятся к 0 на бесконечности. При  $I > 1$  значения  $\varphi_m$  вне центральных ячеек вихрей малы, система (1) линеаризуется и ее решение имеет вид [12]

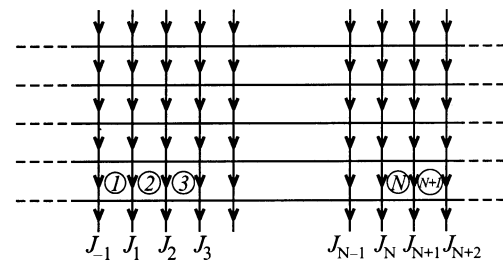
$$\varphi_m = \varphi_{-1} \gamma^{-m-1} \quad (m \leq -1), \quad (40)$$

$$\varphi_m = C_1 \gamma^{-m-1} + C_2 \gamma^{N-m} \quad (1 \leq m \leq N), \quad (41)$$

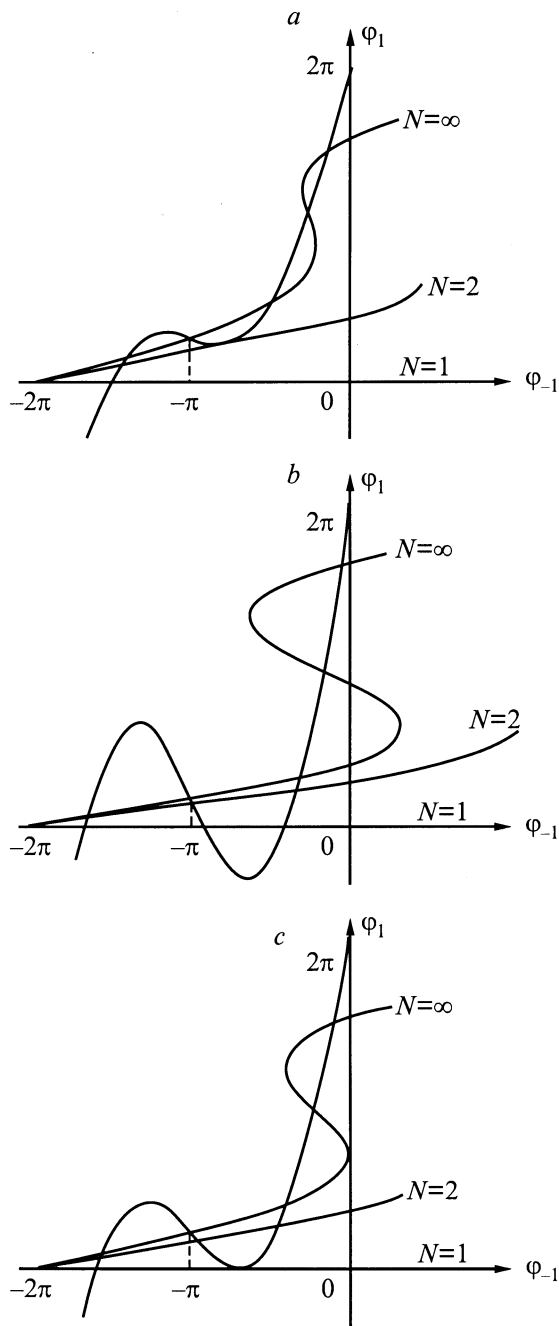
$$\varphi_m = \varphi_{N+1} \gamma^{-m-N-1} \quad (m \geq N + 1), \quad (42)$$

где  $\gamma = 1 + I/2 - \sqrt{I + I^2/4}$  — решение уравнения  $\gamma^2 - (2 + I)\gamma + 1 = 0$ .

Будем считать распределение токов и фаз симметричным относительно середины расстояния между вихрями.



**Рис. 3.** Распределение токов в плоскости, перпендикулярной осям вихрей, для случая двух уединенных взаимодействующих вихрей.



**Рис. 4.** Графическое решение системы (46) и (47) при различных значениях параметра  $I$ . Кривые, исходящие из точки  $\varphi_1 = 2\pi$ , соответствуют уравнению (47), а исходящие из точки  $\varphi_{-1} = -2\pi$  — уравнению (46).  $I = 2$  (a), 4 (b), 2.9 (c).

Тогда  $C_1 = -C_2 = \varphi_1 / (1 - \gamma^{N-1})$  и

$$\varphi_2 = \varphi_1 k, \quad k = \gamma(1 - \gamma^{N-3}) / (1 - \gamma^{N-1}). \quad (43)$$

Подставляя (43) в граничные условия на центральной ячейке вихря

$$I \sin \varphi_1 = \varphi_{-1} - 2\varphi_1 + \varphi_2 + 2\pi, \quad (44)$$

$$I \sin \varphi_{-1} = \varphi_1 - 2\varphi_{-1} + \varphi_{-2} - 2\pi, \quad (45)$$

получим следующую систему уравнений для  $\varphi_{-1}$  и  $\varphi_1$ :

$$\varphi_{-1} = I \sin \varphi_1 + (2 - k)\varphi_1 - 2\pi, \quad (46)$$

$$\varphi_1 = I \sin \varphi_{-1} + (2 - \gamma)\varphi_{-1} + 2\pi. \quad (47)$$

В (46) и (47) от расстояния между вихрями зависит только коэффициент  $k$ :  $k(\infty) = \gamma$ ,  $k(2) = -1$ ,  $k(3) = 0$  и т.д. На рис. 4 приведены зависимости (46) и (47) для  $I = 2, 2.9, 4$ , из которых можно видеть, что при каждом значении  $I$  система (46) и (47) имеет решения в определенном диапазоне  $N$ , т.е. вихри могут находиться на различных расстояниях друг от друга, начиная с какого-то минимального и до бесконечности. Это результат пиннинга, так как в его отсутствие вихри разбежались бы на бесконечность, т.е. при конечных  $N$  решений бы не было. Найдя  $N$ , мы найдем наименьшее расстояние, на котором силы пиннинга еще могут компенсировать взаимное отталкивание вихрей. Из рис. 4 видно, что при  $I = 2$   $N_{\min} = 2$ , а при  $I = 4$  центры вихрей могут располагаться даже в соседних ячейках.

Найдем минимальное значение  $I$ , при котором центры вихрей могут располагаться в соседних ячейках. В этом случае  $N = 1$ ,  $k = \infty$ , тогда из (46) следует, что  $\varphi_1$  должно равняться нулю (что легко понять, исходя из симметрии картины). Наименьшему  $I$ , удовлетворяющему (46) и (47) при  $\varphi_1 = 0$ , соответствует кривая на рис. 4, c, которая в своем минимуме касается оси  $\varphi_{-1}$ . Точный численный расчет дает для  $N = 1$  значение  $I_{\min} = 2.907$ . Минимальное значение  $I$ , при котором расстояние  $N$  между центрами вихрей может равняться 2, равно 1.947, для  $N = 3$  получаем  $I_{\min} = 1.428$ .

### Заключение

Проведен расчет энергий и сил взаимодействия и пиннинга плоских (ламинарных) вихрей в трехмерной джозефсоновской среде, основанный на модели непрерывного вихря.

Показано, что при малых значениях параметра пиннинга полученные другими авторами в рамках этой модели выражения для магнитной энергии вихря и магнитной составляющей энергии пиннинга не вполне правильны. Получены откорректированные выражения для этих величин. Значения джозефсоновской и магнитной энергий вихря при учете ячеистости среды различны в отличие от континуального случая. Вклады в энергию пиннинга от джозефсоновской и магнитной энергий имеют разные знаки. Проведен численный расчет всех энергий в этой модели, показавший правильность полученных выражений.

Предложен алгоритм численного решения системы разностных уравнений для нахождения формы и энергии вихря в его устойчивом и неустойчивом состояниях без использования модели непрерывного вихря. Вычисления по этому алгоритму показали, что модель непрерывного вихря не дает правильных значений джозефсоновской и



магнитной энергии вихря и составляющих энергии пиннинга. Точные значения джозефсоновской и магнитной составляющих энергии пиннинга в десятки и сотни раз больше значений, полученных на базе модели непрерывного вихря. Несмотря на это, вследствие различия знаков джозефсоновской и магнитной составляющих энергии пиннинга точные значения суммарной энергии пиннинга несущественно отличаются от результатов применения модели непрерывного вихря. Этот факт, скорее всего, не является случайным и имеет какую-то внутреннюю причину. Обоснование возможности использования модели непрерывного вихря для нахождения суммарной энергии пиннинга представляет собой отдельную математическую задачу, подхода к решению которой пока не видно.

На основе рассчитанных энергий взаимодействия и пиннинга при малых значениях параметра пиннинга проведено вычисление минимально возможных расстояний между двумя уединенными вихрями. Эти результаты с высокой точностью совпадают с результатами компьютерного расчета.

Предложен алгоритм численного решения системы разностных уравнений для нахождения минимально возможных расстояний между двумя уединенными вихрями при немалых значениях параметра пиннинга  $I$ . Минимальное значение  $I$ , при котором расстояние  $N$  между центрами вихрей может равняться 3 ячейкам, равно 1.428, для  $N = 2$  получаем  $I_{\min} = 1.947$ . При  $I > 2.907$  центры вихрей могут находиться в соседних ячейках.

Работа выполнена в рамках гранта Министерства науки и технологии по направлению "Сверхпроводимость".

## Список литературы

- [1] Muller K.-H., Macfarlane J.C., Driver R. // *Physica C*. 1989. Vol. 158. P. 69–84.
- [2] Rzechowski M.S., Benz S.P., Tinkham M., Lobb C.J. // *Phys. Rev. B*. 1990. Vol. 42. P. 2041–2051.
- [3] Kivshar Y.S., Malomed B.A. // *Rev. Mod. Phys.* 1989. Vol. 61. P. 763–780.
- [4] Брыксин В.В., Гольцев А.В., Дороговцев С.Н., Кузьмин Ю.А., Самухин А.Н. // *ЖЭТФ*. 1991. Т. 100. С. 1281–1290.
- [5] Parodi R., Vaccarone R. // *Physica C*. 1991. Vol. 173. P. 56–63.
- [6] Zelikman M.A. // *Superconductor Science & Technology*. 1997. Vol. 10. N 7. P. 469–474.
- [7] Zelikman M.A. // *Superconductor Science & Technology*. 1997. Vol. 10. N 11. P. 795–800.
- [8] Zelikman M.A. // *Superconductor Science & Technology*. 1999. Vol. 12. N 1. P. 1–5.
- [9] Кулик И.О., Янсон И.К. Эффект Джозефсона в сверхпроводящих туннельных структурах. М.: Наука, 1970. С. 270.
- [10] Aubry S. *Lect. Notes in Math.* N 925. The Riemann problem. Berlin: Springer, 1982. P. 240.
- [11] Рыжик И.М., Градштейн И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1963. С. 1100.
- [12] Зеликман М.А. // *ЖТФ*. 1997. Т. 67. Вып. 9. С. 38–47.