

01;09;12

Разрушение асфальто-парафиновых отложений в нефтяных трубопроводах движущимся источником высокочастотного электромагнитного излучения

© В.А. Балакирев, Г.В. Сотников, Ю.В. Ткач, Т.Ю. Яценко

Институт электромагнитных исследований,
310022 Харьков, Украина
e-mail: sotnikov@kipt.kharkov.ua

(Поступило в Редакцию 11 октября 2000 г. В окончательной редакции 6 марта 2001 г.)

Предложен новый способ ликвидации асфальто-парафиновых и газогидратных пробок в нефтепроводах с помощью передвижного источника электромагнитного излучения — "электромагнитного крота". "Электромагнитный крот" устраняет пробку путем ее расплавления вследствие выделения тепла при поглощении интенсивной электромагнитной волны. Для эффективного проплавления диэлектрической пробки источник электромагнитного излучения передвигается вдоль трубы по мере перемещения поверхности раздела твердой и жидкой фаз. Для модельной задачи определены время ликвидации парафиновой пробки и зависимость этого времени от частоты излучения. Сделаны оценки эффективности предложенного способа.

Введение

В последнее время все большее количество природных углеводородов транспортируется по нефте- и газопроводам в условиях, приводящих к образованию мощных пробок, состоящих из асфальто-парафинов или кристаллогидратов соответственно. Надежная и коммерчески выгодная эксплуатация таких трубопроводов в условиях, благоприятных для образования кристаллогидратных и асфальто-парафиновых пробок, требует разработки новых методов разрушения таких пробок, а также создания способов профилактики их образования.

Используемые в настоящее время способы разрушения пробок зависят прежде всего от их вида, структуры, физико-химических характеристик и т. п. Для разрушения асфальто-парафиновых пробок, образующихся в нефтепроводах, в основном используются методы разогрева (паром или горячей водой), химические методы и методы механической очистки трубопроводов. Все методы очистки от пробок нефте- и газопроводов, используемые в настоящее время, требуют больших финансовых затрат, технологически очень сложны, а иногда (например, химические методы) приводят к негативным побочным явлениям.

В связи со сказанным представляет интерес использование мощного электромагнитного излучения для теплового воздействия на асфальто-парафиновых отложения, образующиеся в нефтяных скважинах на участках насоснокомпрессорных станций и магистральных нефтепроводов.

Первые и основные работы по применению электромагнитного излучения в нефтяной промышленности были направлены на интенсификацию добычи нефти путем воздействия на нефтяные пласты высокочастотным (ВЧ) электромагнитным излучением [1–5]. Электромагнитное поле, поглощаясь в них, приводит к уменьшению вязкости нефти при ее нагреве. Использовать ВЧ электромагнитное излучение для очистки оборудования нефтяных

скважин от парафиновых пробок предложено в [6,7], а в работе [8] проведено численное моделирование ВЧ электромагнитного прогрева парафиновой пробки, заполняющей участок оборудования нефтяной скважины. Во всех перечисленных выше работах использовались электромагнитные волны с достаточно низкой частотой (меньше 100 MHz). Такой выбор неслучаен и определяется плотностью мощности объемного тепловыделения в пробке вследствие поглощения электромагнитной волны $Q \sim \alpha \exp(-\alpha z)$ (α — показатель поглощения, z — расстояние до источника излучения). Показатель поглощения ВЧ излучения пропорционален частоте излучения (в случае слабой зависимости тангенса угла диэлектрических потерь от частоты). Поэтому при слишком низких частотах и соответственно слабом затухании ВЧ мощности на длине пробки тепловыделение малое и не производит необходимого нагрева. Асфальто-парафиновая пробка является прозрачной для волн низкой частоты. В обратном случае электромагнитная волна высокой частоты поглощается в ближайшей к излучателю зоне, что приводит к сильному перегреву нефти. Поэтому частота излучения выбирается таким образом, чтобы показатель поглощения ВЧ мощности был порядка обратной длины парафиновой пробки. Такое условие может быть легко реализовано при прогреве нефтяных пластов или для ликвидации парафиновой пробки в скважине, в электродинамическом смысле представляющей собой коаксиальную линию передачи. В нефтепроводе с реальными поперечными размерами такое условие выполнить невозможно. Нефтепровод представляет собой цилиндрический волновод, способный пропускать только волны с частотами выше частоты отсечки. Так, нефтепровод радиуса 72 см, заполненный парафином с диэлектрической проницаемостью [7,9], имеет частоту отсечки $f = 1.048 \cdot 10^8$ Hz для волны типа $E_{0,1}$. При рабочей частоте $f = 1.4 \cdot 10^8$ Hz коэффициент затухания мощности $\alpha = 0.08 \text{ m}^{-1}$. На длине парафиновой пробки,

равной, например, 100 м, мощность электромагнитной волны ослабляется в e^8 раз. Очевидно, что в этом случае парафиновая пробка не будет никогда расплавлена.

В настоящей работе для устранения парафиновых пробок в реальных нефтепроводах предлагается использовать передвижной источник электромагнитного излучения. Скорость его передвижения будет определяться скоростью движения границы раздела жидкой и твердой фаз в процессе плавления асфальто-парафинового отложения под воздействием ВЧ электромагнитного излучения. Для краткости мы будем называть предлагаемое устройство "электромагнитным кротом" по аналогии с "механическим кротом" (скрапером), используемым в нефтегазовой промышленности для механической очистки трубопроводов от парафиновых или газогидратных пробок.

Постановка задачи. Основные уравнения

Процесс нагрева и плавления парафиновой пробки будем описывать на основе уравнений теплопроводности с заданным внешним тепловым источником. Как было уже сказано выше, в электродинамическом смысле парафиновую пробку в трубопроводе можно рассматривать как цилиндрический металлический волновод, заполненный диэлектриком. Задачу предполагаем аксиально-симметричной. Также предполагаем, что диэлектрик полностью заполняет металлический волновод. При последующем численном решении уравнения теплопроводности будем использовать метод сквозного счета [10]. Поэтому уравнение теплопроводности запишем в общем виде без явного выделения фаз

$$\rho c_T \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + Q(r, z, t), \quad (1)$$

где ρ — плотность высокопарафинистой нефти, c_T — ее теплоемкость, λ — теплопроводность.

Плотность и теплопроводность считаем не зависящими от температуры, а теплоемкость при температуре фазового перехода T_S имеет δ -образную особенность

$$c_T = c_0 + L\delta(T - T_S), \quad (2)$$

L — скрытая теплота фазового перехода, $\delta(T - T_S)$ — дельта-функция.

Плотность мощности объемного тепловыделения запишем в виде

$$Q = Q_0 \Theta(z - z_0(t)) \exp(-\alpha(z - z_0(t))). \quad (3)$$

Формула учитывает перемещение источника электромагнитного излучения по закону $z = z_0(t)$. Явный вид Q_0 указан ниже в формуле (7). В выражении (3)

$$\Theta(z - z_0) = \begin{cases} 1, & z \geq z_0, \\ 0, & z < z_0, \end{cases}$$

α — коэффициент затухания мощности ВЧ электромагнитной волны.

Источник электромагнитного излучения расположен в плоскости $z = 0$ при $t = 0$. Затухание электромагнитной волны обусловлено объемными потерями в диэлектрической пробке и поверхностными — в металлических стенках цилиндрического волновода вследствие неидеальности проводимости его поверхности (конечного импеданса). Учитывая аксиальную симметрию задачи, для волны E_{0n} легко получить уравнение для определения постоянной затухания $\alpha \equiv \alpha_V + \alpha_S = 2k'_z$ (α_V — коэффициент затухания, обусловленный объемными потерями; α_S — коэффициент затухания, обусловленный поверхностными потерями; k'_z — мнимая часть продольного волнового числа $k_z = k'_z + ik''_z$)

$$k_{\perp} \frac{J_0(k_{\perp} R)}{J_1(k_{\perp} R)} = \frac{1+i}{2} k \varepsilon_0 \sqrt{\frac{\omega}{2\pi\sigma}}. \quad (4)$$

В уравнение (4) введены обозначения $k_{\perp}^2 = k^2 \varepsilon_0 - k_z^2$, $k = \omega/c$, ω — круговая частота; c — скорость света; J_0, J_1 — функции Бесселя нулевого и первого порядка; ε_0 — комплексная диэлектрическая проницаемость парафина; R — радиус волновода; σ — проводимость металла, из которого сделаны стенки трубопровода. Считая мнимую часть диэлектрической проницаемости ε''_0 малой по сравнению с ее действительной частью ε'_0 , из (3) получим приближенное решение

$$\alpha_V = \frac{\omega^2 \varepsilon''_0}{c^2 k'_{z0}}, \quad \alpha_S = \frac{\omega \varepsilon'_0}{c R k'_{z0}} \sqrt{\frac{\omega}{2\pi\sigma}},$$

$$k'_{z0} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon'_0 - \frac{\mu_n^2}{R^2}}, \quad (5)$$

μ_n — значение n -го корня функции Бесселя $J_0(\mu_n) = 0$.

Плотность мощности объемного тепловыделения для неподвижного источника может быть определена исходя из определения потерь ВЧ мощности при прохождении электромагнитной волны через поглощающую среду

$$Q_0 = \frac{\omega}{8\pi} |\mathbf{E}|^2 \varepsilon''_0. \quad (6)$$

Для рассматриваемого нами случая волны типа E_{0n} отличными от нуля являются компоненты электрического поля E_z и E_r , определяемые для цилиндрического волновода, заполненного диэлектриком, хорошо известными выражениями [11]. Проведя необходимые преобразования, для величины Q_0 получим следующее выражение:

$$Q_0 = \frac{\varepsilon''_0 \mu_n^2}{\pi \operatorname{Re}(k_z \varepsilon_0) R^4} \times P \left[J_0^2 \left(\mu_n \frac{r}{R} \right) + \frac{|k_z|^2 R^2}{\mu_n^2} J_1^2 \left(\mu_n \frac{r}{R} \right) \right], \quad (7)$$

где P — ВЧ мощность источника электромагнитного излучения.

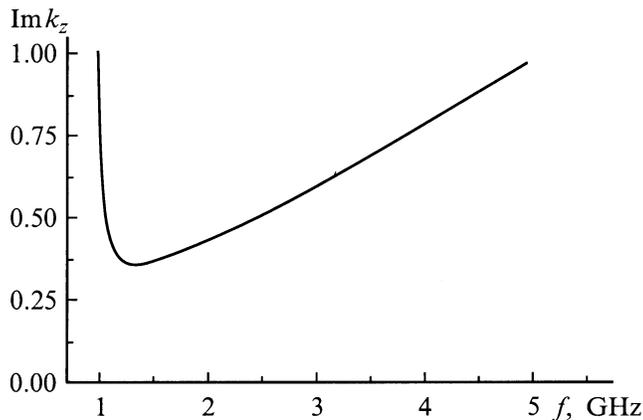


Рис. 1. Мнимая часть продольного волнового числа как функция частоты для металлического цилиндрического волновода, заполненного парафином. Относительная диэлектрическая постоянная $\epsilon = 2.3 + i0.0276$ (использованы данные работ [10,11]).

Уравнение теплопроводности (1) необходимо дополнить граничными условиями. На торце пробки $z = 0$ зададим граничное условие в виде конвективного теплообмена по закону Ньютона

$$\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0} = \kappa_1 [T(r, 0, t) - T_0], \quad (8)$$

T_0 — температура окружающей среды и начальная парафиновой пробки, κ_1 — коэффициент теплообмена.

На удаленном торце пробки $z = H$ теплообмен отсутствует

$$\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=H} = 0. \quad (9)$$

На боковой поверхности цилиндра $r = R$ граничное условие также запишем в виде закона конвективного теплообмена, но с другим коэффициентом теплообмена κ и с учетом тепловыделения вследствие поглощения электромагнитной волны на поверхности металлического волновода

$$-\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=R} = \kappa [T(R, z, t) - T_0] - q(z, t), \quad (10)$$

где $\kappa = Nu \cdot \lambda / R$ — коэффициент теплообмена со внешней средой, Nu — число Нуссельта.

Мощность, поглощенная в металлических стенках трубопровода, может быть найдена путем решения строгой электромагнитной задачи в металле и диэлектрике. Определив компоненты электрического поля и воспользовавшись формулой, аналогичной (6), в для области, заполненной металлом с соответствующей диэлектрической проницаемостью, найдем мощность, поглощенную в объеме металла. В реальных условиях глубина скин-слоя намного меньше толщины трубы и поэтому можно считать, что ВЧ мощность электромагнитной волны

поглощается на внутренней поверхности трубопровода. Устремив глубину скин-слоя к нулю, для поверхностной плотности мощности тепловыделения получим выражение

$$q = \frac{\omega |\epsilon_0|^2}{c \operatorname{Re}(k_z \epsilon_0)} \sqrt{\frac{\omega}{2\pi\sigma}} \frac{P}{2\pi R^2} \exp(-\alpha(z - z_0(t))) \times \Theta(z - z_0(t)). \quad (11)$$

Здесь, так же как и в (3), учтен тот факт, что источник электромагнитного излучения излучает только вперед и перемещается внутри трубы в продольном направлении по закону $z_0(t)$.

Для замыкания системы уравнений, определяющих процесс ликвидации парафиновой пробки движущимся источником электромагнитного излучения, необходимо задать закон его перемещения $z_0(t)$. Как было указано во введении, $z_0(t)$ определяется законом движения

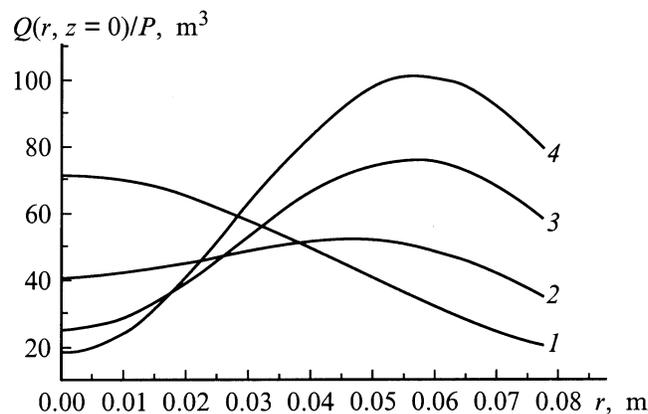


Рис. 2. Поперечное распределение плотности мощности тепловых потерь, нормированной на мощность источника в цилиндрическом волноводе, заполненном парафином. $f, 10^9 \text{ Hz}$: 1 — 1.4, 2 — 2, 3 — 3, 4 — 4.

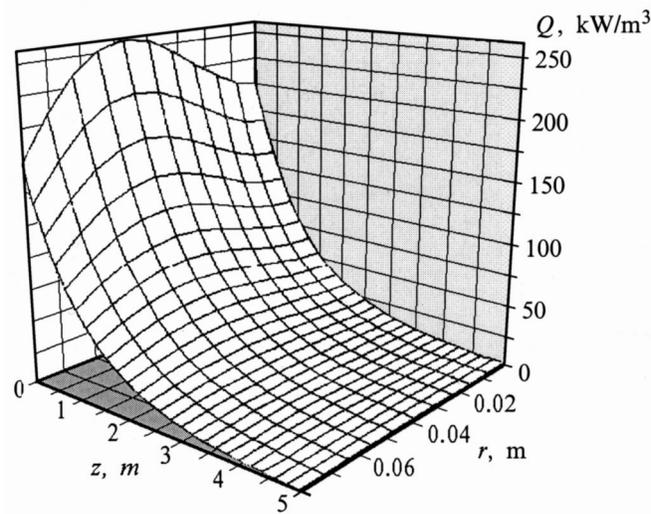


Рис. 3. Распределение плотности мощности тепловых потерь по объему парафиновой пробки.

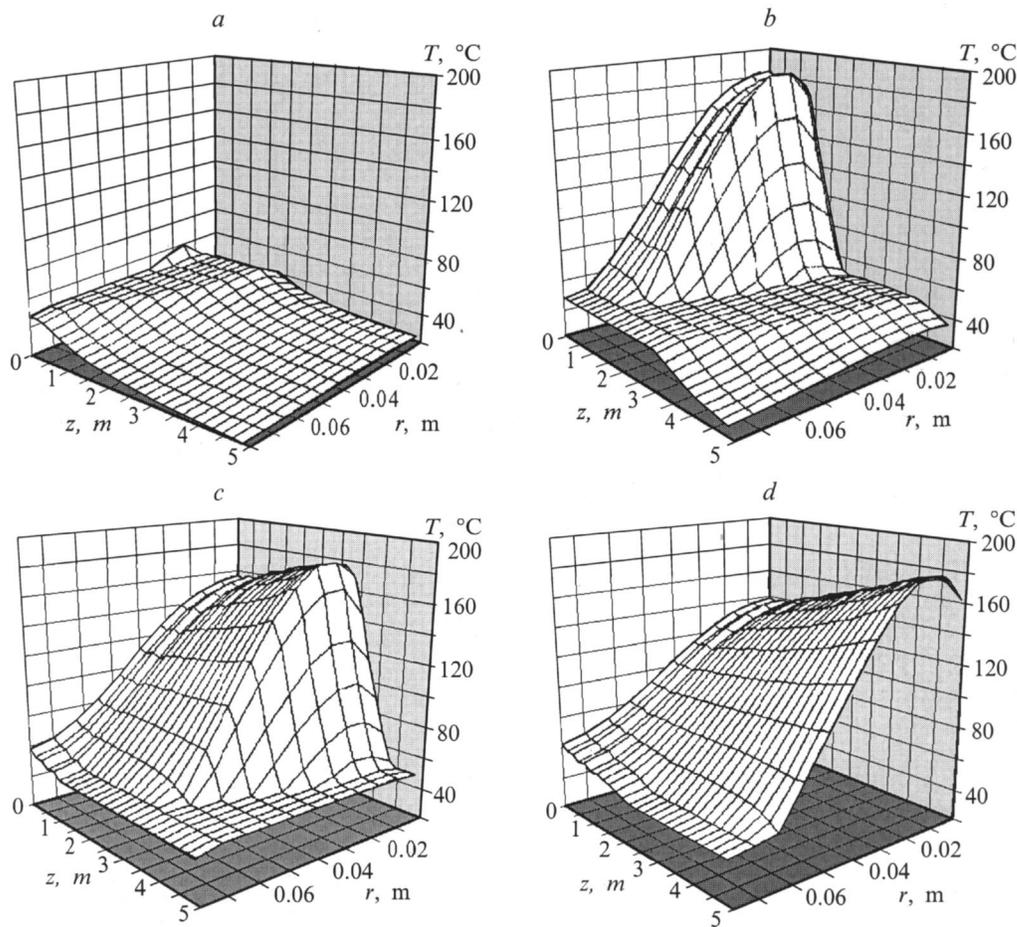


Рис. 4. Профиль температуры для различных моментов времени. t , min: a — 15, b — 75, c — 135, d — 180 в процессе ликвидации асфальто-парафиновой пробки "электромагнитным кротом" на участке нефтепровода длиной $H = 5$ м. $R = 0.0775$ м. $f = 1.4 \cdot 10^9$ Hz.

границы раздела жидкой и твердой фаз. Но движение самой границы определяется тем же дифференциальным уравнением (1). Уравнение для скорости движения границы фаз в явном виде может быть записано только в одномерном случае [10]. Поэтому при численном решении уравнения теплопроводности (1) с граничными условиями (7)–(9) и сложной зависимости плотности мощности тепловыделения $Q(r, z)$ от пространственных координат будем исходить из следующего алгоритма. Источник излучения перемещается в трубе в продольном направлении так, чтобы минимальное продольное расстояние от него до поверхности фазового перехода было постоянным.

Анализ численных результатов

Для численного анализа процесса ликвидации асфальто-парафиновой пробки будем использовать теплофизические параметры высокопарафинистой нефти [7]: $\rho = 950$ kg/m³, $c_0 = 3$ kJ/(kg · K), $T_S = 50^\circ\text{C}$,

$L = 300$ kJ/kg, $\lambda = 0.125$ W/(mK). Температура окружающей среды была выбрана равной $T_0 = 20^\circ\text{C}$. Действительная и мнимая часть диэлектрической постоянной ε_0 выбирались для обезвоженной нефти. В таком случае в широком диапазоне частот они слабо зависят от частоты [12,13]. При численном счете использовались типичные значения $\varepsilon'_0 \approx 2.3$, $\text{tg } \delta = \varepsilon''_0/\varepsilon'_0 \approx 1.2 \cdot 10^{-2}$. Коэффициенты теплообмена $\varkappa_1 = 0.2$ W/(m²K), $\varkappa = 1.613$ W/(m²K). Значение \varkappa соответствует числу Нуссельта $Nu = 1$ (труба в сухом грунте). При численном решении уравнения теплопроводности (1) с граничными условиями (8)–(10) была применена явная разностная схема на равномерной прямоугольной сетке. Особенность в точке $r = 0$ — в операторе Лапласа обходились стандартным образом [14]: δ -функция в выражении (2) для теплоемкости аппроксимировалась ступенькой с полушириной, равной 0.4°C .

Для контроля точности аппроксимации системы уравнений разностной схемой использовался закон сохранения энергии, который непосредственно следует из

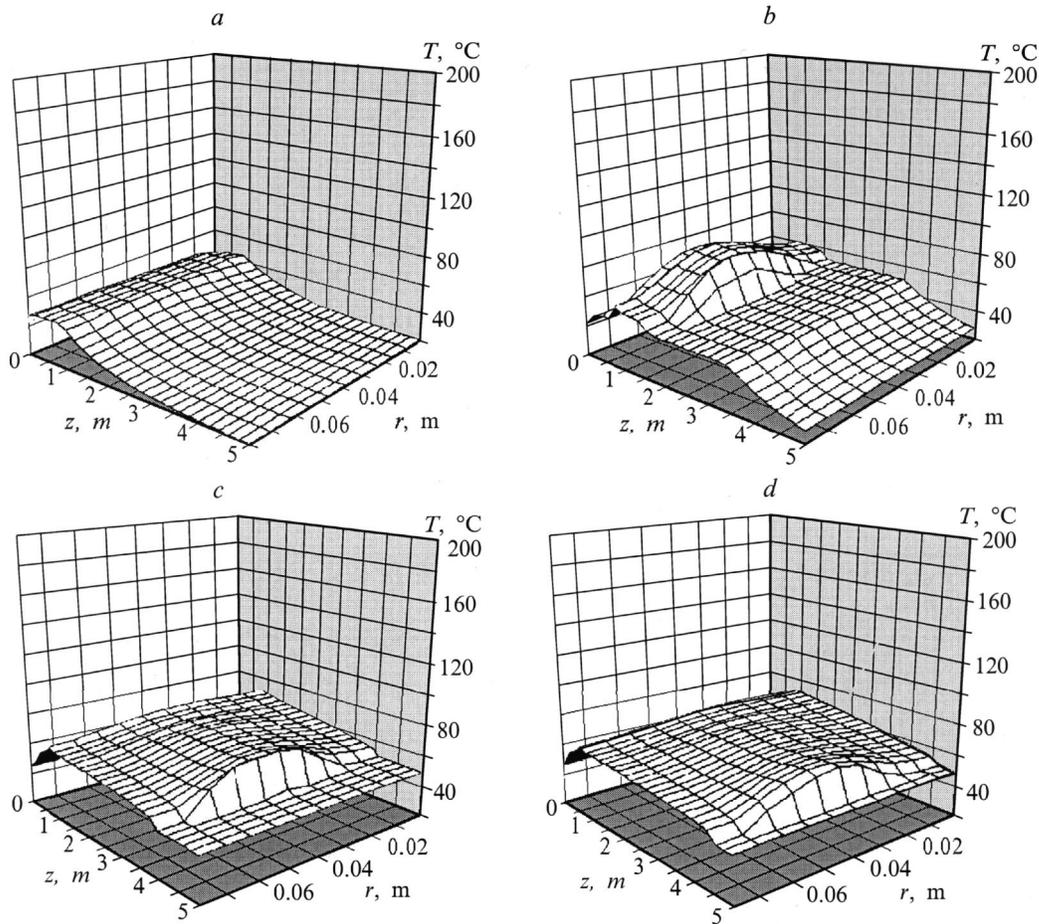


Рис. 5. То же, что на рис. 4, для частоты $f = 2 \cdot 10^9$ Hz (для рис. 5, d $t = 150$ min).

уравнений (1) и соотношения (7)–(9),

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial}{\partial t} \int dV \int_{T_0}^T c(T') dT' &= P [1 - \exp(-\alpha(H - z_0(t)))] \\ &- 2\pi \kappa_1 \int_0^R dr [T(r, z = 0) - T_0] \\ &- 2\pi \kappa R \int_0^H dz [T(r = R, z) - T_0]. \end{aligned} \quad (12)$$

Баланс энергии (12) совпадает с приведенным в [15] при неподвижном источнике электромагнитного излучения ($z_0(t) = 0$).

Приведенные ниже численные результаты были получены для модельного нефтепровода радиуса $R = 0.0775$ m. Предполагалось, что стенки нефтепровода сделаны из стали, проводимость которой $\sigma = 0.37 \times 10^{17}$ s⁻¹. Длина парафиновой пробки выбрана равной $H = 5$ m.

На рис. 1 приведена зависимость мнимой части продольного волнового числа k_z'' от частоты для приведенных выше параметров цилиндрического волновода с асфальто-парафиновой пробки. Здесь и далее в численных расчетах мы ограничимся рассмотрением волны E_{01} . Частота отсечки E_{01} волны для рассматриваемого цилиндрического волновода равна $f_0 \approx 0.97 \cdot 10^9$ Hz. Мнимая часть продольного волнового числа имеет минимум $k_{z\min}'' \approx 0.37$ m⁻¹ на частоте $f \approx 1.38 \cdot 10^9$ Hz и растет при дальнейшем увеличении частоты. Хотя для предлагаемого нами способа ликвидации парафиновых пробок с помощью движущегося источника электромагнитного излучения величина длины проникновения ВЧ мощности в глубь пробки не принципиальна, все-таки ее следует выбирать по возможности больше. Слишком малая величина длины проникновения будет усложнять возможность оперативного контроля за передвижением источника электромагнитного излучения.

Процесс перехода твердой фазы в жидкую фазу парафина существенным образом определяется распределением плотности мощности объемного тепловыделения $Q(r, z)$. На рис. 2 приведены распределения $Q(r, z = 0)$, нормированные на мощность источника, в поперечном

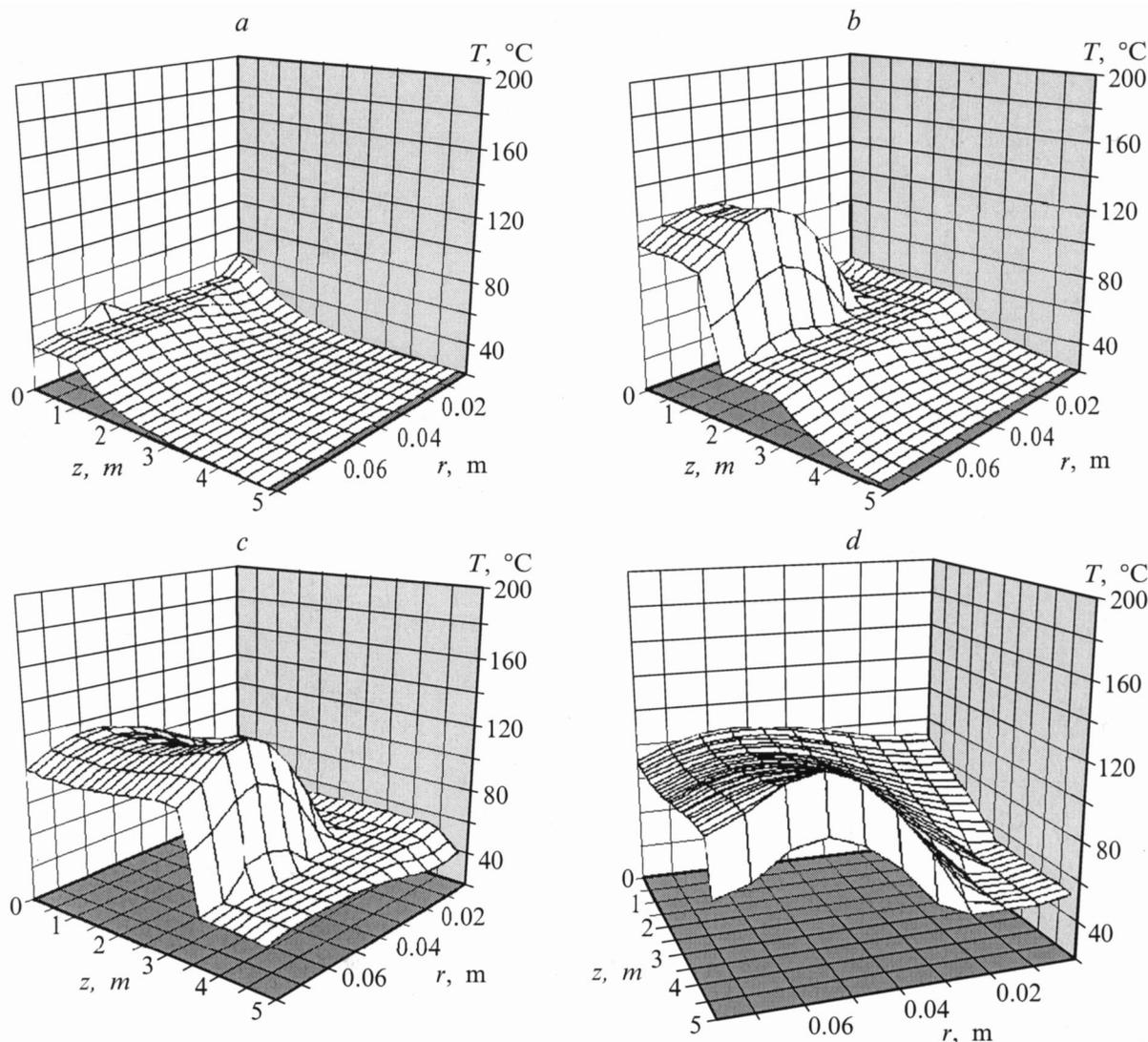


Рис. 6. То же, что на рис. 4, для частоты $f = 3 \cdot 10^9$ Hz (для рис. 6, d $t = 195$ min).

сечения волновода для различных частот при неподвижном источнике. В минимуме коэффициента затухания (и для более низких частот) главную роль в распределении плотности мощности Q играет продольная компонента электрического поля волны E_{01} с максимумом на оси цилиндрического волновода (рис. 2, кривая 1). С увеличением частоты растет поперечная компонента электрического поля. На частоте $f = 2.0 \cdot 10^9$ Hz продольная и поперечная компоненты электрического поля сравнимы по величине (рис. 2, кривая 2). Для более высоких частот в распределении плотности мощности тепловыделения преобладающей становится поперечная компонента электрического поля E_{01} с максимумом ближе к стенкам волновода (рис. 2, кривые 3, 4). Наиболее однородное в поперечном сечении распределение плотности мощности тепловыделения обеспечивает волна с частотой $f = 2.0 \cdot 10^9$ Hz. Хотя в максимуме плотности мощности $Q(r, z = 0)$ для такого случая

меньше, чем в остальных, приведенных на рис. 2 вариантов, именно E_{01} -волна с частотой $2 \cdot 10^9$ Hz наиболее предпочтительна для ликвидации парафиновой пробки с поперечным радиусом $R = 7.75$ cm. Разогрев будет более однородным, и расплавление парафина должно происходить практически одновременно по всему поперечному сечению парафиновой пробки. Вследствие этого не будет сильного перегрева отдельных слоев нефти, что приводило бы к снижению эффективности ликвидации парафиновой пробки, а также к другим техническим проблемам. В продольном направлении плотность мощности тепловыделения падает по экспоненциальному закону. С ростом частоты в продольном направлении скорость спада плотности мощности тепловыделения $Q(r, z)$ увеличивается в соответствии с зависимостью, приведенной на рис. 1. В качестве примера на рис. 3 приведено распределение $Q(r, z)$ для неподвижного источника $z_0(t) = 0$ и мощности $P = 5$ kW.

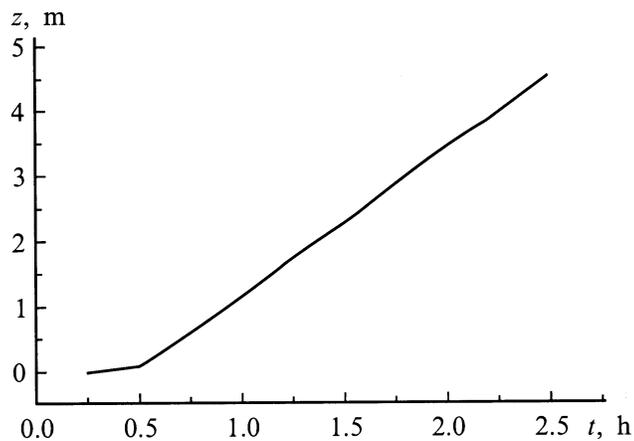


Рис. 7. Положение "электромагнитного крота" вдоль трубы нефтепровода, отсчитываемое от начального положения, в различные моменты времени.

Результаты численного моделирования процесса ликвидации парафиновой пробки "электромагнитным кротом" приведены на рис. 4 ($f = 1.4 \cdot 10^9$ Hz), рис. 5 ($f = 2 \cdot 10^9$ Hz) и рис. 6 ($f = 3 \cdot 10^9$ Hz) для различных моментов времени. Мощность источника излучения для всех случаев выбрана $P = 5$ kW. Как и следовало ожидать, процесс расплавления парафиновой пробки сильно зависит от топографии плотности мощности тепловыделения (рис. 2 и 3). В начальный момент в области, примыкающей к источнику электромагнитного излучения, поверхность температуры имеет плато, наиболее широкое для частоты $f = 2 \cdot 10^9$ Hz, что связано с более однородным распределением плотности мощности тепловыделения по сечению пробки. Локализация первоначального проплавления однозначно определяется максимумом плотности мощности тепловыделения $Q(r, z)$. Для низких частот ($f = 1.4 \cdot 10^9$ Hz) проплавление парафиновой пробки идет от центра диэлектрической пробки. Для высоких частот ($f \geq 3 \cdot 10^9$ Hz) место первоначального проплавления расположено ближе к периферии цилиндра. Для частоты $f = 2 \cdot 10^9$ Hz расплав парафиновой пробки идет приблизительно от середины радиуса диэлектрического цилиндра. Следует отметить, что для этого случая распределение температуры нефти и парафина по поперечному сечению оказывается наиболее однородным. Максимальная температура расплавленного парафинового образования и нефти не превосходит 75°C , в то время как для частоты E_{01} -волны $f = 1.4 \cdot 10^9$ Hz она приближается к 175°C , а для $f = 3 \cdot 10^9$ Hz максимальная температура $T \approx 120^\circ\text{C}$. Время ликвидации парафиновой пробки длиной $H = 5$ м в исследованном диапазоне 1–5 GHz сильно зависит от частоты волны. Так, для $f = 1.4 \cdot 10^9$ Hz это время составляет 3 h, для $f = 2 \cdot 10^9$ Hz оно минимально и составляет 2.5 h, для $f = 3 \cdot 10^9$ Hz время ликвидации парафиновой пробки равно 3.25 h.

При дальнейшем увеличении частоты излучения время проплавления диэлектрической пробки будет расти, что связано с уменьшением длины проникновения ВЧ мощности в направлении движения "электромагнитного крота" и увеличением радиальной неоднородности плотности мощности тепловыделения. Все большая часть полезной мощности идет не на расплавление асфальто-парафинового образования, а на перегрев отдельных его слоев и дальнейшее рассеивание тепла через боковую поверхность.

На рис. 7 приведено положение источника электромагнитного излучения вдоль трубы нефтепровода, отсчитанное от начального положения. Мощность источника излучения $P = 5$ kW, его рабочая частота $f = 1.4 \cdot 10^9$ Hz. Первое время $t < 0.5$ h "электромагнитный крот" остается неподвижным, пока не проплавится в поперечном сечении первый слой. Затем скорость "крота" возрастает и через 1,5 h она выходит на постоянное значение.

Заключение

Сделаем оценку эффективности рассмотренного способа ликвидации асфальто-парафиновой пробки с помощью передвижного источника электромагнитного излучения. Определим эффективность "электромагнитного крота" как отношение полезной работы к затраченной. Под полезной будем понимать работу, затраченную на нагрев парафиновой пробки до температуры плавления и дальнейший переход в жидкую фазу. Затраченная работа — энергия, излученная источником электромагнитного излучения в нефтяную трубу. Для источника электромагнитного излучения с частотой $f = 2.0 \cdot 10^9$ Hz и параметров диэлектрической пробки, приведенных выше, эффективность составляет $\approx 70\%$.

Таким образом, проведенные в настоящей работе исследования показали, что для ликвидации протяженных парафиновых пробок в трубопроводах источником электромагнитного излучения необходимо его перемещать вдоль трубы нефтепровода со скоростью, определяемой самосогласованно из закона движения поверхности раздела жидкой и твердой фаз.

Список литературы

- [1] Саяхов Ф.Л., Чистяков С.И., Бабаян Г.А., Федоров Б.И. // Изв. вузов. Нефть и газ. 1972. № 2. С. 47–50.
- [2] Саяхов Ф.Л., Бабаян Г.А., Альмешев А.Н. // Нефтяное хозяйство. 1975. № 12. С. 33–34.
- [3] Саяхов Ф.Л., Фатихов М.Х., Кузнецов О.Л. // Изв. вузов. Нефть и газ. 1981. № 3. С. 36–40.
- [4] Зьонг Нгок Хай, Катусев А.Г., Нигматулин Р.Н. // Прикладная математика и механика. 1987. Т. 51. Вып. 1. С. 29–38.
- [5] Зьонг Нгок Хай, Мусаев Н.Д., Нигматулин Р.Н. // Прикладная математика и механика. 1987. Т. 51. Вып. 6. С. 977–983.

- [6] Саяхов Ф.Л., Фатыхов Н.А., Имашев Н.Ш. А.С. № 1314756. БИ. № 1. 1989.
- [7] Ахметов А.Т., Дьячук А.И., Кислицын А.А. и др. А.С. № 1344756. БИ. № 3. 1992.
- [8] Кислицын А.А. // ПМТФ. 1993. Т. 34. № 3. С. 97–103.
- [9] Кислицын А.А. // ПМТФ. 1996. Т. 37. № 3. С. 75–82.
- [10] Самарский А.А., Моисеенко Б.Д. // ЖВМиМФ. 1965. Т. 5. № 5. С. 817–827.
- [11] Вайштейн Л.А. Электромагнитные волны. М.: Радио и связь, 1988. 440 с.
- [12] Чистяков С.И., Саяхов Ф.Л., Бондаренко Л.Н. // Нефтяное хозяйство. 1969. № 11. С. 51–63.
- [13] Чистяков С.И., Денисова Н.Ф., Саяхов Ф.Л. // Изв. вузов. Нефть и газ. 1972. № 5. С. 53–56.
- [14] Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы М.: Наука, 1989. 432 с.
- [15] Балакирев В.А., Сотников Г.В., Ткач Ю.В., Яценко Т.Ю. // Электромагнитные явления. 1998. Т. 1. № 4. С. 552–561.