

03;07;12

Интерференционная методика измерения скорости газового потока при больших числах Пекле

© А.А. Пикулев

Российский федеральный ядерный центр
Всероссийский научно-исследовательский институт экспериментальной физики,
607190 Саров, Нижегородская область, Россия

(Поступило в Редакцию 29 ноября 2000 г.)

Разработана методика определения скорости газового потока интерферометрическим методом для больших чисел Пекле. Показано, что при внесении в однородный поток газа источника тепла площади, заметаемые интерференционными максимумами, приблизительно равны между собой и стремятся к некоторому предельному значению. Предельная величина площади обратно пропорциональна скорости газового потока и не зависит от теплопроводности и типа течения. Найдено теоретическое выражение для величины относительной погрешности данного метода.

Введение

В настоящее время для исследования термофизических и газодинамических параметров газовых потоков широко используются интерференционные методы. Так, в экспериментах [1,2] с помощью интерферометров Майкельсона и Маха-Цендера [3] были проведены измерения температуры среды в случае объемной накачки газа осколками деления ядер урана, исследован температурный пограничный слой на нагретой стенке канала и характер следа за радиатором. Измерения проводились на макете лазера, представляющего собой газовый контур с двумя ячейками, между которыми были размещены теплообменники. При проведении последнего эксперимента за радиатором поперек потока газа размещалась тонкая нихромовая проволочка, нагреваемая электрическим током. Схема ячейки с установленной проволочкой показана на рис. 1. Исследования температурного следа за нагретой проволочкой позволяют найти величину теплопроводности газа в зависимости от расстояния до радиатора и соответственно определить тип течения и размер конвективных ячеек, образующихся в следе за радиатором [4,5].

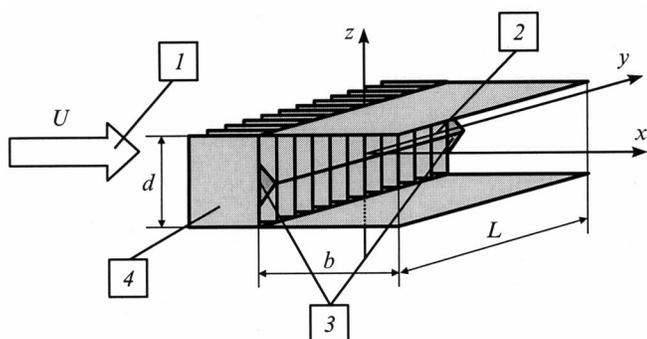


Рис. 1. Схема газовой ячейки (второй радиатор не показан): 1 — направление потока газа, 2 — проволочка, 3 — крепление проволочки, 4 — радиатор.

Для возможности обработки результатов экспериментов подобного рода необходимо знание средней скорости потока газа. Определение скорости в экспериментах [1,2] осуществлялось по перепаду давления. Такой способ требует калибровки и имеет невысокую точность. Поэтому желательно проводить независимое измерение скорости другими методами. Измерение скорости с помощью трубок Вентури или Пито [6] для герметичных каналов трудноосуществимо. Использование специально разработанного для этой цели импульсного термоанемометра [7] тоже обладает двумя основными недостатками: 1) необходимость калибровки; 2) результат измерения зависит от теплопроводности газа, т.е. от типа течения.

В данной работе показано, что при больших числах Пекле скорость газа можно определить из результатов интерференционных экспериментов с нагретой тонкой проволочкой, поставленной поперек потока. Предложенный метод обладает несколькими достоинствами: 1) независимость результата измерения от теплопроводности и типа течения; 2) не требует проведения дополнительных экспериментов (используется та же интерферограмма, что и для исследования следа за радиатором); 3) не требует калибровки.

Основные термодинамические уравнения

Рассмотрим термодинамику газа. Течение в рассматриваемой области считаем изобарическим, а линии тока — прямыми, параллельными оси Ox . Стационарное уравнение переноса энергии при простоянном давлении без учета диссипационных членов имеет вид [8]

$$c_p \rho (\mathbf{u}, \nabla T) = \operatorname{div}(\mu \nabla T) + q, \quad (1)$$

где ρ , \mathbf{u} , T — плотность, скорость и температура газа; μ — теплопроводность; c_p — теплоемкость газа при постоянном давлении; q — мощность объемного источника тепла.

На входе в канал поток газа имеет скорость U_0 , плотность ρ_0 и температуру T_0 . Единственную ненулевую составляющую скорости газа u_x обозначим через U . Из уравнения неразрывности [8] следует $\rho U = \rho_0 U_0$. Дальнейшее рассмотрение удобно вести в безразмерных переменных. Для этого введем характерный линейный размер — расстояние h , на котором исследуется распределение температуры. В качестве характерной температуры и скорости используем T_0 и U_0 , а температуру газа представим в виде $T = T_0 + \Delta T$. Имеем $x = h\bar{x}$, $y = h\bar{y}$, $z = h\bar{z}$, $\Delta T = T_0 \Delta \bar{T}$. Считаем изменения температуры малыми, т.е. $|\Delta T| \ll T_0$. Уравнение энергии в безразмерном виде:

$$\frac{\partial \Delta \bar{T}}{\partial \bar{x}} = \frac{\nabla^2 \Delta \bar{T}}{\text{Pe}} + \bar{q}, \quad \bar{q} = \frac{hq}{c_p \rho_0 U_0 T_0},$$

$$\text{Pe} = \frac{c_p \rho_0 U_0 h}{\mu}, \quad (2)$$

где Pe — число Пекле [8].

Ниже, там, где это специально не оговорено, будем пользоваться безразмерными переменными, причем знак обезразмеривания опускаем.

Предположим, что конвективный теплоперенос вдоль оси Ox существенно превышает диффузионный, т.е. выполняется соотношение $\text{Pe} \gg 1$. Уравнение энергии в этом случае упрощается

$$\frac{\partial \Delta T}{\partial x} = \frac{1}{\text{Pe}} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Delta T + q. \quad (3)$$

Пусть локализованный источник мощностью W расположен в окрестности начала координат. Проинтегрируем уравнение (3) по объему прямоугольного параллелепипеда $V = \{x \in [-a, a]; y, z \in (-\infty, +\infty)\}$, охватывающего область источника. Получаем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta T dz = W. \quad (4)$$

Следовательно, поток энергии, переносимой газом через любую плоскость $x = \text{const} > 0$, равен мощности источника тепла. Очевидно, что поток энергии через некоторую поверхность S , отклонение которой от плоскости $x = \text{const} > 0$ незначительно, тоже приблизительно равен W

$$\iint_S \Delta T(\mathbf{i}, ds) \cong W, \quad (5)$$

где \mathbf{i} — орт оси Ox , ds — элемент площади поверхности S , ориентация которого совпадает с положительным направлением нормали.

Рассмотрим следующую задачу: точечный источник тепла, расположенный в начале координат, помещен в однородный поток газа. Мощность тепловой энергии, выделяемая источником, равна W . Возмущение потока,

создаваемое источником тепла, будем считать пренебрежимо малым. Представим коэффициент температуропроводности в виде $\chi = \chi_l + \chi_t$, где χ_l, χ_t — коэффициенты ламинарной и турбулентной температуропроводности соответственно [9], причем $\chi_t = \chi_t(x)$. Это позволяет учесть влияние мелкомасштабного конвективного перемешивания, например следа за радиатором. Для ламинарного течения $\chi_t = 0$. Учитывая определение числа Пекле (2) получаем

$$\frac{1}{\text{Pe}} = \frac{1}{\text{Pe}_l} + \frac{1}{\text{Pe}_t(x)}, \quad (6)$$

где Pe_l, Pe_t — ламинарное и турбулентное числа Пекле.

Возмущение температуры ΔT удовлетворяет двум граничным условиям: 1) условию перед источником тепла, 2) условию на бесконечности $\Delta T(x < 0 \cup y, z \rightarrow \pm\infty) = 0$. Отметим, что ΔT кроме этих условий удовлетворяет также интегральному условию (5). Решение уравнения (3) имеет вид функции точечного источника [10]

$$\Delta T = \frac{p^2 W}{\pi} \sigma(x) e^{-p^2(y^2+z^2)}, \quad \frac{1}{p^2} = 4 \int_0^x \frac{dx}{\text{Pe}}, \quad (7), (8)$$

где $\sigma(x)$ — функция Хевисайда [11].

Приведем также решение уравнения (3) для линейного источника тепла с равномерным распределением энерговыделения по длине, который совпадает с осью Oy . В этом случае температура не зависит от координаты y

$$\Delta T = \frac{pw}{\sqrt{\pi}} \sigma(x) e^{-p^2 z^2}, \quad (9)$$

где w — мощность линейного источника тепла на единицу длины.

Измерение скорости потока газа

Изменение температуры среды, как правило, сопровождается изменением ее показателя преломления, которое можно зарегистрировать интерферометрическим методом. Для идеального газа, находящегося при постоянном давлении, показатель преломления связан с температурой известной формулой [12] ($|\Delta T| \ll 1$)

$$\Delta n = -(n_0 - 1) \Delta T. \quad (10)$$

Дополнительный набег фазы в измерительном канале равен

$$\varphi = k \int_0^L \Delta n dy = -k(n_0 - 1) \int_0^L \Delta T dy, \quad (11)$$

где k — волновое число, L — длина плеча интерферометра.

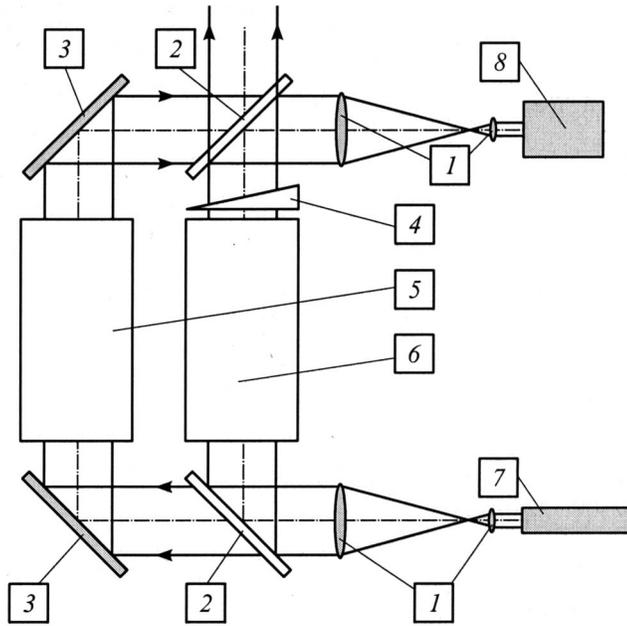


Рис. 2. Схема неравноплечего интерферометра Маха-Цендера: 1 — фокусирующие линзы, 2 — полупрозрачные зеркала, 3 — глухие зеркала, 4 — оптический клин, 5 — измерительный канал, 6 — канал сравнения, 7 — лазер, 8 — камера.

Схема проведения эксперимента с использованием неравноплечего интерферометра Маха-Цендера [3] показана на рис. 2. Плоскопараллельный пучок лазера разделяется на два, первый из которых проходит через измерительный канал, а второй — через канал сравнения. Измерения удобно проводить, внося в канал сравнения оптический клин по направлению потока газа (ось Ox). Ниже считаем интенсивности обоих пучков равными, что способствует увеличению контрастности интерференционной картины. Максимумы удовлетворяют следующему уравнению [3]:

$$\varphi(x_m(z), z) + 2\pi N x_m(z) + \varphi_0 = 2\pi t, \quad (12)$$

где N — число полос на единицу длины, φ_0 — начальная разность фаз, $x_m(z)$ — положение максимума m .

В отсутствие нагрева максимумы интерференционной картины представляют собой параллельные оси Oz прямые, расположенные на одинаковом расстоянии друг от друга. Их положение определяется по формуле

$$2\pi N \Delta_m + \varphi_0 = 2\pi t, \quad \varphi_0 = 2\pi N \Delta_0, \quad (13)$$

где Δ_m — невозмущенное положение максимума m .

При $N = 0$ получаем так называемую нулевую линию. Основной трудностью в случае работы с нулевой линией является определение начального набега фазы φ_0 , для вычисления которого трудно указать эффективную методику. Обозначим через $\xi_m(z)$ величину отклонения максимумов от невозмущенного положения Δ_m : $\xi_m(z) = x_m(z) - \Delta_m$. Уравнение для отклонения

максимумов N -линии имеет вид

$$\varphi(x_m(z), z) = -2\pi N \xi_m(z). \quad (14)$$

Основной величиной, характеризующей отклонение интерференционных полос от невозмущенного положения, является площадь, ограниченная кривой ξ_m ,

$$S_m = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi_m dz. \quad (15)$$

Интегрируя выражение (14) по координате z в бесконечных пределах и пользуясь формулами (11), (15), получаем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta T(x_m(z), y, z) dz = \frac{2\pi N S_m}{k(n_0 - 1)}. \quad (16)$$

В (16) интегрирование производится по поверхности цилиндрической формы. После сравнения с (15) находим

$$2\pi N S_m \cong 2\pi N S = k(n_0 - 1)W. \quad (17)$$

Имеем следующий результат: все площади S_m приблизительно равны между собой и стремятся к S . Чем ниже по потоку от источника тепла находится максимум интерференционной картины, тем точнее выполняется выражение (17). Это связано с увеличением местного числа Пекле вниз по потоку и падением роли теплопроводности в процессе теплопереноса. Таким образом, закон равенства площадей S_m является интерферометрическим выражением закона сохранения тепловой энергии при больших числах Пекле и не зависит от формы теплового источника и типа течения. Скорость газа определяется по формуле (в размерных переменных)

$$U_0 \cong \frac{k(n_0 - 1)W}{2\pi c_p \rho_0 N S T_0}. \quad (18)$$

Определим набег фазы от точечного источника тепла. Считаем, что лазерный пучок охватывает всю область теплового следа за источником по осям Oy и Oz . Из формул (8), (11) получаем

$$\varphi = -\frac{(n_0 - 1)kW}{\sqrt{\pi}} p(x) \exp(-p^2 z^2). \quad (19)$$

Для N -линии отклонение максимумов интерференционных линий от невозмущенного значения вычисляется по формуле (14), откуда, используя (19), получаем

$$\xi_m = \frac{p(x_m)S}{\sqrt{\pi}} \exp(-p(x_m)^2 z^2). \quad (20)$$

Формулы (19), (20) справедливы не только для точечного источника, но и для любого линейного источника, расположенного вдоль координатной оси Oy с произвольным распределением тепловыделения по длине. В этом

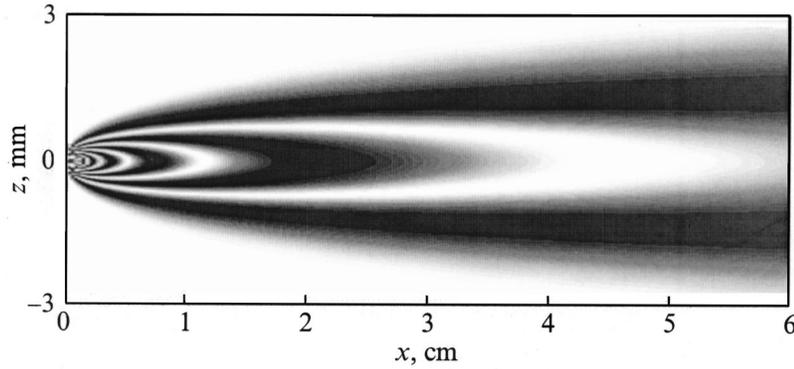


Рис. 3. Интерферограмма линейного источника в случае нулевой линии: $\chi_t = 0$.

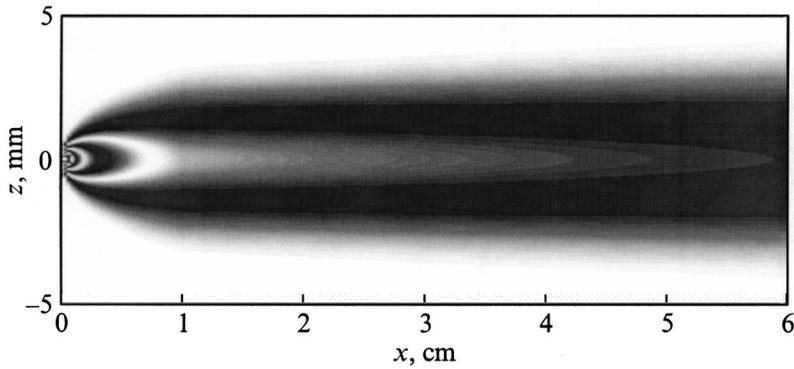


Рис. 4. Интерферограмма линейного источника в случае нулевой линии: $\chi_t = 5\chi_t$, $x_t = 1$ см.

случае, как и выше, должно выполняться требование охвата лазерным пучком всего следа за источником по осям $0y$ и $0z$, а W определяет полную мощность источника.

Уравнение (20) является трансцендентным, т. е. его решение не представляется в виде элементарных функций. Для простоты предположим, что выполняется соотношение $\xi_m \ll \Delta_m$ и будем искать решение (20) методом последовательных приближений. В качестве нулевого приближения используем следующее выражение:

$$\xi_m^{(0)} = \frac{p(\Delta_m)S}{\sqrt{\pi}} \exp(-p(\Delta_m)^2 z^2). \quad (21)$$

Если проинтегрировать (22) по координате z , то получим

$$S_m^{(0)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi_m^{(0)} dz = S. \quad (22)$$

Следовательно, все площади $S_m^{(0)}$ равны между собой и не зависят от теплопроводности, что совпадает с полученным выше результатом (17). Исследование уравнения (20) показывает, что площади S_m удовлетворяют следующим условиям:

$$0 < S_1 < S_2 < \dots < S_m < \dots < S, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} S_m = S. \quad (23)$$

Из неравенств (23) видно, что использование формулы (18) приводит к несколько завышенному значению скорости.

Для выяснения вопроса о точности формулы (18) разложим правую часть выражения (20) в ряд Тейлора, сохраняя члены до второго порядка малости по ξ_m включительно. После интегрирования и приведения подобных членов получаем

$$S_m^{(2)} = S \left\{ 1 + \frac{p_x}{2\sqrt{2\pi}} S + \frac{pp_{xx} - p_x^2}{3\pi\sqrt{3}} S^2 \right\}_{x=\Delta_m}, \quad \frac{p(\Delta_m)S}{\Delta_m\sqrt{\pi}} \ll 1. \quad (24)$$

В случае, если число Пекле постоянно вдоль потока газа, (24) принимает вид

$$S_m^{(2)} = S \left\{ 1 - \frac{\alpha_m}{4\sqrt{2}} + \frac{\alpha_m^2}{6\sqrt{3}} \right\}, \quad \alpha_m = \frac{S}{2\Delta_m} \sqrt{\frac{\text{Pe}}{\pi\Delta_m}} \ll 1. \quad (25)$$

Таким образом, точность выполнения закона площадей определяется вторым членом разложения (24) или (25). При удалении от источника вниз по потоку точность быстро возрастает, поэтому практически при любых условиях проведения эксперимента можно найти полосы, для которых закон сохранения площадей выполняется с большой точностью.

Результаты, полученные выше, иллюстрируются рис. 3–6. Интерферограммы приведены для следующих

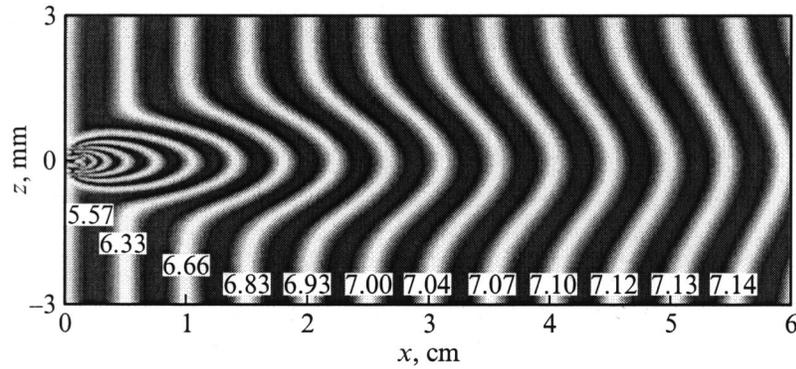


Рис. 5. Интерферограмма линейного источника в случае N -линии: $\chi_t = 0$.

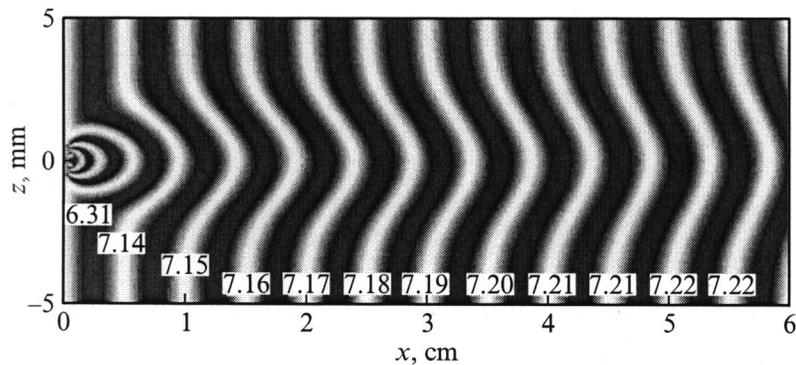


Рис. 6. Интерферограмма линейного источника в случае N -линии: $\chi_t = 5\chi_l$, $x_t = 1$ см.

условий: воздух при нормальных условиях, скорость прокачки $U_0 = 5$ м/с, начальная фаза $\varphi_0 = 0$, мощность источника $W = 6$ Вт, длина волны $\lambda = 632$ нм. Для характерного линейного размера $h = 1$ см в этих условиях ламинарное число Пекле равно $Pe = 2704$, т.е. ограничение, наложенное на величину числа Пекле, выполняется. Как показывают исследования [4,5], турбулентное число Пекле в следе за радиатором может быть в несколько десятков раз меньше ламинарного числа Пекле. Этот факт необходимо учитывать при использовании вышеприведенной модели теплового следа за линейным источником. На рис. 3 приведена интерферограмма точечного (линейного) источника для нулевой линии $\chi_t = 0$. Влияние конвективного следа за радиатором для нулевой линии показано на рис. 4. Интенсификация процессов теплообмена в следе моделировалась введением области длиной x_t , расположенной непосредственно за радиатором, в которой $\chi_t > 0$. Для $x > x_t$ коэффициент турбулентной теплопроводности принимался равным нулю. Длину x_t и величину χ_t в следе за пластинчатым радиатором при разных условиях можно найти в работах [4,5]. В настоящей работе принято $x_t = 1$ см, $\chi_t = 5\chi_l$. Сравнение рис. 3 и 4 показывает, что наличие радиатора приводит к более быстрому расширению теплового следа за источником в области зоны конвективного перемешивания.

Рис. 5, 6 построены для тех же условий, что и рис. 3, 4 соответственно, но при $N = 2$ см⁻¹. У каждого интерференционного максимума приведена величина площади S_m в мм². Значения площадей получены численным решением уравнения (20) с помощью процедуры последовательных приближений. Предельное значение площади для обоих случаев составляет $S = 7.3$ мм². Сравнение рис. 5 и 6 показывает, что наличие зоны интенсивного перемешивания за радиатором (рис. 6) приводит к более быстрому стремлению площадей интерференционных максимумов к предельному значению S , чем в случае ее отсутствия (рис. 5). Для $m > 4$ относительная погрешность $\varepsilon_m = (S - S_m)/S$ не превосходит 4% и вполне удовлетворительно описывается функцией

$$0 < \varepsilon_m < \varepsilon_m^{(1)} = \frac{S - S_m^{(1)}}{S} = \frac{\alpha_m}{4\sqrt{2}}. \quad (26)$$

Оказывается, что величина погрешности $\varepsilon_m^{(1)}$, найденная в предположении ламинарности течения $Pe = 0$, является максимальной, поэтому может быть использована в качестве оценки точности определения скорости для течений любого типа.

Выше предполагалось, что наличие неоднородности показателя преломления в измерительном канале вносит только фазовые искажения, не влияя на распространение лазерного пучка. Если набег фазы достаточно велик,

происходит искривление лучей, которые загибаются в сторону оптически более плотной среды. Это приводит к увеличению интерференционных площадей S_m , расположенных непосредственно за проволочкой, что нарушает закон (23). Этот факт необходимо учитывать при проведении экспериментов.

В качестве заключения опишем процедуру измерения скорости.

1. При проведении интерферометрического эксперимента измеряется величина мощности теплового источника W и температура газа перед проволочкой T_0 .

2. По интерферограмме определяется количество полос на единицу длины N и вычисляются значения площадей S_m , ограниченных интерференционными максимумами.

3. По формуле (18) определяются значения скорости U_m , соответствующие этим максимумам m .

4. Из набора U_m выбирается значения, для которого сумма относительной погрешности измерения интерференционных площадей и $\varepsilon_m^{(1)}$ (26) минимальна.

Автор выражает благодарность Л.В. Львову за полезные обсуждения.

Список литературы

- [1] Боровков В.В., Лажинцев Б.В., Мельников С.П. и др. // Изв. АН СССР. Сер. физ. 1990. Т. 54. № 10. С. 2009–2015.
- [2] Боровков В.В., Лажинцев Б.В., Нор-Аревян В.А. и др. // Квантовая электрон. 1995. Т. 22. № 12. С. 1187–1191.
- [3] Заммерфельд А. Оптика М.: ИЛ, 1953. 486 с.
- [4] Milos F.S., Acrivos A. // Phys. Fluids. 1986. Vol. 29. N 5. P. 1353–1359.
- [5] Milos F.S., Acrivos A., Kim J. // Phys. Fluids. 1987. Vol. 30. N 1. P. 7–18.
- [6] Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973. 758 с.
- [7] Кульгавчук В.М., Матвеев В.Ю. // Труды 2-й Междунар. конф. по физике ядерно-возбужденной плазмы и проблемам лазеров с ядерной накачкой. Арзамас-16, 1995. Т. 2. С. 93–101.
- [8] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1988. 736 с.
- [9] Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1973. 848 с.
- [10] Соболев С.Л. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1992. 432 с.
- [11] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1989. 624 с.
- [12] Таблицы физических величин. Справочник / Под ред. И.К. Кикоина. М.: Атомиздат, 1976. 1008 с.